$2^{\underline{a}}$ Prova de Fundamentos de Análise - 09/10/2023 - Tarde

Essa prova é composta de duas partes:

1: Entregue 4 questões resolvidas até às 17h30 (pelo menos uma questão de cada seção abaixo).

2: Envie a resolução escaneada, em PDF, de todas as questões até às 24h de sexta-feira, 13/10, para o e-mail: fundamentos.analise.ufpr@gmail.com.

Cortes de Dedekind

1. Primeiro defina corretamente cortes de Dedekind. A seguir, verifique se os conjuntos abaixo são cortes:

   (a) $J = \{x \in \mathbb{Q}; x < 2\}$.

   (b) $K = \{x \in \mathbb{Q}; (x^2 < 2) \text{ ou } (x^2 > 2)\}$.

   (c) $L = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq 2\}$.

2. Mostre que: se J é um corte, então existem $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que $K(r) < J < K(s)$.

3. Sejam $J > 0$ um corte de Dedekind e $\epsilon > 0$ um número racional. Mostre que existem $a \in J$ e $b \in \mathbb{Q} \setminus J$ tais que $b - a < \epsilon$.

Conjuntos finitos e infinitos

4. Seja X um conjunto infinito. Mostre que existe um subconjunto $E \subset X$ infinito e enumerável.

5. Mostre que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. A seguir, use este resultado para provar que o conjunto dos números racionais positivos é enumerável.

6. Mostre que um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é finito se e somente se existir $p \in X$ tal que $x \leq p, \forall x \in X$.

Corpos ordenados

7. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado qualquer e $a, b \in \mathbb{K}$. Mostre que:

   (a) Se $0 < a < b$ então $a^{-1} > b^{-1} > 0$;

   (b) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

   (c) Se $a, b \geqslant 0$ então $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

8. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados com $A \subset B$, mostre que $\inf B \leqslant \inf A$ e que $\sup A \leqslant \sup B$.

9. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados não vazios. Mostre que:

   (a) $A + B = \{a + b; a \in A \text{ e } b \in B\}$ é um conjunto limitado

   (b) $\sup(A + B) \leqslant \sup A + \sup B$;

10. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ duas funções limitadas. Mostre que:

    (a) fg é limitada;

    Observação: fg é o produto usual de funções, ou seja $(fg)(x) = f(x)g(x)$, com $x \in \mathbb{R}$.

    (b) $\sup(fg) \leqslant (\sup f)(\sup g)$;

    (c) Dê um exemplo no qual a desigualdade acima ocorre estritamente e um exemplo em que ocorre a igualdade.