ESPAÇO VETORIAL REAL DE DIMENSÃO FINITA

Definição

Sejam um conjunto não vazio *V*, o conjunto dos números reais **R** e duas operações binárias, adição e multiplicação por escalar.

$$+ : V \times V \to V \qquad\qquad \cdot : \mathbf{R} \times V \to V$$
$$(v,u) \mapsto v+u \qquad\qquad (k,v) \mapsto k \cdot v$$

V é um Espaço Vetorial sobre **R**, ou Espaço Vetorial Real ou um **R**-espaço vetorial, com estas operações se as propriedades abaixo, chamadas axiomas do espaço vetorial, forem satisfeitas:

EV1. (Associativa) Para quaisquer $v,u,w \in V$, $(v+u)+w = v+(u+w)$.
EV2. (Comutativa) Para todo $v,u \in V$, $v+u = u+v$.
EV3. (Elemento Neutro) Existe $e \in V$ tal que para todo $v \in V$, $e+v = v+e = v$.
Notação: $e = \mathbf{0}_V$
EV4. (Elemento Simétrico) Para todo $v \in V$, existe $v' \in V$ tal que $v+v' = v'+v = \mathbf{0}_V$.
Notação: $v' = -v$
Assim, $v+(-u) = v-u$
EV5. Para quaisquer $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ e para todo $v \in V$, $k_1 \cdot (k_2 \cdot v) = (k_1 k_2) \cdot v$.
EV6. Para quaisquer $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ e para todo $v \in V$, $(k_1 + k_2) \cdot v = (k_1 \cdot v) + (k_2 \cdot v)$.
EV7. Para todo $k \in \mathbf{R}$ e para quaisquer $v,u \in V$, $k \cdot (v+u) = (k \cdot v) + (k \cdot u)$.
EV8. Para todo $v \in V$, $1 \cdot v = v$.

Os elementos de um espaço vetorial são denominados **vetores** e os números reais de **escalares**.

Exemplos :

1) $\mathbf{R}^2$ com as operações:
$$(x,y)+(z,t) = (x+z, y+t)$$
$$k \cdot (x,y) = (kx, ky)$$
É um espaço vetorial pois os oito axiomas acima são verificados, cabe lembrar que o elemento neutro da adição $\mathbf{0}_V$ é o par ordenado $(0,0)$.

2) $\mathbf{R}^n$ com as operações:
$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$
$$k \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (kx_1, kx_2, ..., kx_n)$$

3) O conjunto das matrizes reais de ordem $m \times n$, com as operações usuais é um espaço vetorial, tal que o elemento neutro da adição é a matriz nula.

4) O conjunto dos polinômios, com coeficientes reais, de grau menor ou igual a *n*, com as operações abaixo:
$$p(x)+q(x) = (a_n + b_n)x^n + ... + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$
$$k \cdot p(x) = ka_n x^n + ... + ka_1 x + ka_0$$
onde $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_n x^n + ... + b_1 x + b_0$.
É um espaço vetorial, onde o elemento neutro da adição $\mathbf{0}_V$ é o polinômio $0x^n + ... + 0x + 0$.

5) $\mathbf{R}^2$ com as operações abaixo não é um espaço vetorial.

$(x, y) + (z, t) = (x + z, 0)$

$k \cdot (x, y) = (kx, ky)$

Não possui elemento neutro, pois:

Seja $\mathbf{0}_V = (e_1, e_2)$ tal que $(x, y) + (e_1, e_2) = (x, y)$.

Mas, $(x, y) + (e_1, e_2) = (x + e_1, 0)$.

Assim, $(x, y) = (x + e_1, 0)$.

Portanto, para todo $y \in \mathbf{R}, y = 0$.

Logo, não existe elemento neutro.

Subespaço Vetorial

Um subespaço vetorial de *V* é um subconjunto não vazio $S \subseteq V$ com as seguintes propriedades:

Sub1. $\mathbf{0}_V \in S$.

Sub2. Fechamento de *S* em relação à operação de Adição.
Se $u \in S$ e $v \in S$ então $u + v \in S$.

Sub3. Fechamento de *S* em relação à operação de Multiplicação por Escalar
Se $u \in S$ e $k \in \mathbf{R}$ então $k \cdot u \in S$.

Notação: $S \leq V$.

Exemplos:

1) $S = \{(x,0,0), x \in \mathbf{R}\}$ é um subespaço vetorial do $\mathbf{R}^3$ com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.
Um vetor *u* pertence ao subespaço *S* quando possui a 2ª e 3ª coordenadas iguais a zero.
Verificando as propriedades de subespaço.

1. $\mathbf{0}_V \in S$? Sim, $(0,0,0) \in S$.

2. Se $u \in S$ e $v \in S$ então $u + v \in S$?
Sejam $u = (x_1, 0, 0) \in S$ e $v = (x_2, 0, 0) \in S$.
Então $u + v = (x_1 + x_2, 0, 0) \in S$.
Logo, *S* é fechado sob a operação de adição de vetores.

3. Se $u \in S$ e $k \in \mathbf{R}$ então $k \cdot u \in S$?
Seja $u = (x_1, 0, 0) \in S$.
Então $k \cdot u = (kx_1, 0, 0) \in S$.
Logo, *S* é fechado sob a operação de multiplicação por escalar.

O subespaço *S* poderia ser descrito ainda por $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 0 \text{ e } z = 0\}$.

2) O conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 0 \text{ e } y \geq z\}$ não é um subespaço vetorial do $\mathbf{R}^3$ com as operações usuais.

1. $\mathbf{0}_V \in S$? Sim, $(0,0,0)$ satisfaz as condições $x = 0$ e $y \geq z$.

2. Se $u \in S$ e $v \in S$ então $u + v \in S$?
Sejam $u = (0, y, z) \in S$ e $v = (0, t, r) \in S$, com $y \geq z$ e $t \geq r$.

Então $u+v=(0, y+t, z+r) \in S$, com $y+t \geq z+r$.

3. Se $u \in S$ e k $\in \mathbf{R}$ então $k \cdot u \in S$?
Não. (Contra-exemplo)
Sejam $(0,4,-1) \in S$ e $-2 \in \mathbf{R}$.
$(-2) \cdot (0,4,-1) = (0,-8,2) \notin S$, pois $-8 \leq 2$.

3) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = y+1\}$ não é um subespaço do $\mathbf{R}^3$, pois $(0,0,0) \notin S$.

O fato do vetor $\mathbf{0}_V$ pertencer ao conjunto *S* não implica que este seja um subespaço.

Todo espaço vetorial *V* admite pelo menos dois subespaços: o próprio espaço *V* e o conjunto $\{\mathbf{0}_V\}$, chamado subespaço nulo. Estes dois subespaços são denominados **subespaços triviais** de *V* e os demais **subespaços próprios** de *V*.

Combinação Linear

Sejam os vetores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Um vetor $w \in V$ está escrito como combinação linear dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ quando existem $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbf{R}$ tais que $w = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n$.

Exemplos:

1) O vetor $(-1,-1)$ é uma combinação linear dos vetores $(1,2)$ e $(3,5)$, pois: $(-1,-1) = 2 \cdot (1,2) + (-1) \cdot (3,5)$

2) O vetor $(1,2,3)$ não pode ser escrito como combinação linear dos vetores $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$, pois:
$k_1 \cdot (1,0,0) + k_2 \cdot (0,0,1) = (1,2,3)$ (*)
$(k_1,0,0) + (0,0,k_2) = (1,2,3)$
$(k_1,0,k_2) = (1,2,3)$
Assim, $\begin{cases} k_1 = 1 \\ 0 = 2 \\ k_2 = 3 \end{cases}$
O sistema é impossível.
Logo não existem valores reais para k_1 e k_2 que satisfaçam a igualdade (*).

3) Determinando a "lei" que define (todos) os vetores que podem ser escritos como combinação linear de $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$.
$k_1 \cdot (1,0,0) + k_2 \cdot (0,0,1) = (x, y, z)$
$(k_1,0,0) + (0,0,k_2) = (x, y, z)$
$(k_1,0,k_2) = (x, y, z)$
Assim, $\begin{cases} k_1 = x \\ 0 = y \\ k_2 = z \end{cases}$
O sistema é possível quando $y = 0$ e para quaisquer $x, z \in \mathbf{R}$.
Assim, $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 0\}$ é o conjunto de todos os vetores escritos como combinação linear de $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$.
Geometricamente, trata-se do plano XZ.

Subespaço Vetorial Gerado e Conjunto Gerador

Sejam os vetores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ e $[v_1, v_2, ..., v_n]$ o conjunto de todas as combinações lineares destes vetores. O conjunto $[v_1, v_2, ..., v_n]$ é um subespaço vetorial de *V*, denominado **subespaço vetorial gerado** pelos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$.

O conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é o **conjunto gerador** do subespaço $[v_1, v_2, ..., v_n]$.

Exemplos:

1) O vetor $(1,2) \in \mathbf{R}^2$ gera o conjunto $[(1,2)] = \{(x,2x), x \in \mathbf{R}\}$.

$k \cdot (1,2) = (x, y)$

$(k,2k) = (x, y)$

Assim, $\begin{cases} k = x \\ 2k = y \therefore y = 2x \end{cases}$

O conjunto de todas as combinações lineares do vetor $(1,2)$ é o conjunto de todos os seus múltiplos escalares.

Geometricamente, $[(1,2)]$ é uma reta definida pela equação $y - 2x = 0$.

2) $[(1,1,0),(1,2,1)] = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

$k_1 \cdot (1,1,0) + k_2 \cdot (1,2,1) = (x, y, z)$

$(k_1, k_1, 0) + (k_2, 2k_2, k_2) = (x, y, z)$

$(k_1 + k_2, k_1 + 2k_2, k_2) = (x, y, z)$

Assim, $\begin{cases} k_1 + k_2 = x \\ k_1 + 2k_2 = y \\ k_2 = z \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}$ e matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y - x \\ 0 & 0 & z - y + x \end{pmatrix}$.

Para se determinar os vetores que são combinações lineares de $(1,1,0)$ e $(1,2,1)$ é necessário que o sistema seja possível, isto é, $x - y + z = 0$.

Logo, $[(1,1,0),(1,2,1)] = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + z = 0\} = \{(y - z, y, z), y, z \in \mathbf{R}\}$.

Geometricamente, $[(1,1,0),(1,2,1)]$ é um plano no $\mathbf{R}^3$ com equação $x - y + z = 0$.

3) $[(1,3),(4,2)] = \mathbf{R}^2$.

$k_1 \cdot (1,3) + k_2 \cdot (4,2) = (x, y)$

$(k_1 + 4k_2, 3k_1 + 2k_2) = (x, y)$

Assim, $\begin{cases} k_1 + 4k_2 = x \\ 3k_1 + 2k_2 = y \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 4 & x \\ 3 & 2 & y \end{pmatrix}$ e matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 4 & x \\ 0 & 1 & \frac{3x - y}{10} \end{pmatrix}$.

Como o sistema é possível e determinado, nenhuma condição deve ser satisfeita.

Logo, $[(1,3),(4,2)] = \mathbf{R}^2$.

4) Encontre a equação do espaço gerado pelos vetores $(1,1,2), (-2,0,1)$ e $(-1,1,3)$.

O espaço gerado é o conjunto de vetores $v = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ que possam ser escritos como combinação linear dos vetores dados, isto é, $k_1 \cdot (1,1,2) + k_2 \cdot (-2,0,1) + k_3 \cdot (-1,1,3) = (x, y, z)$.

Assim, $\begin{cases} k_1 - 2k_2 - k_3 = x \\ k_1 + 0k_2 + k_3 = y \\ 2k_1 + 2k_2 + 3k_3 = z \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 2 & 1 & 3 & z \end{pmatrix}$ e matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & \frac{y-x}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x-5y+2z}{2} \end{pmatrix}$.

Para que o sistema seja possível é necessário que $x - 5y + 2z = 0$.

Assim, com esta condição satisfeita, obtém-se vetores $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ que são combinação linear dos vetores dados.

Portanto, o espaço gerado é $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 5y + 2z = 0\}$, que geometricamente representa um plano em $\mathbf{R}^3$.

Vetores Linearmente Independentes e Linearmente Dependentes

Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$ é **linearmente independente** (LI) quando $k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n = \mathbf{0}_V$ se e somente se $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$.

Se existir pelo menos um $k_i \neq 0$, com $i = 1,...,n$, então o conjunto é **linearmente dependente** (LD).

Exemplos:

1) $\{(1,3), (4,2)\}$ é LI, pois:

$k_1 \cdot (1,3) + k_2 \cdot (4,2) = (0,0)$

$(k_1 + 4k_2, 3k_1 + 2k_2) = (0,0)$

Assim, $\begin{cases} k_1 + 4k_2 = 0 \\ 3k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

O sistema é possível e determinado com $k_1 = k_2 = 0$.

Assim, o conjunto é LI. Um dos vetores não é múltiplo escalar do outro.

Foi visto que o espaço gerado por $\{(1,3), (4,2)\}$ é $\mathbf{R}^2$, ou seja $[(1,3), (4,2)] = \mathbf{R}^2$.

2) $\{(1,3), (2,6)\}$ é LD, pois:

$k_1 \cdot (1,3) + k_2 \cdot (2,6) = (0,0)$

$(k_1 + 2k_2, 3k_1 + 6k_2) = (0,0)$

Assim, $\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 0 \\ 3k_1 + 6k_2 = 0 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

O sistema é possível e indeterminado, com $k_1 = -2k_2$. Então, o conjunto é LD, pois $(2,6) = 2 \cdot (1,3)$. Os vetores (1,3) e (2,6) pertencem a uma mesma reta. O espaço gerado pelo conjunto {(1,3), (2,6)} é $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 3x\}$, isto é, $[(1,3),(2,6)] = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 3x\}$.

3) {(2,0,5),(1,2,3),(3,2,8)} é LD, pois: $k_1 \cdot (2,0,5) + k_2 \cdot (1,2,3) + k_3 \cdot (3,2,8) = (0,0,0)$

Assim, $\begin{cases} 2k_1 + k_2 + 3k_3 = 0 \\ 2k_2 + 2k_3 = 0 \\ 5k_1 + 3k_2 + 8k_3 = 0 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Como o sistema é possível e indeterminado, o conjunto é LD.

Base e Dimensão de um Espaço Vetorial

Seja um conjunto finito $B \subseteq V$. Diz-se que B é uma **base** do espaço vetorial V quando B é um conjunto linearmente independente e gera V, isto é, $[B] = V$.

O número de elementos (cardinalidade) de uma base B do espaço vetorial V é denominado **dimensão** do espaço vetorial V.

Se a dimensão de V é igual a n, diz-se que V é um espaço vetorial finito n-dimensional. Em particular, a dimensão do espaço nulo $\{\mathbf{0}_V\}$ é zero. Não há base para o espaço nulo.

Notação: $\dim V$

Exemplos:

1) Os conjuntos {(1,0), (0,1)} e {(1,3), (4,2)} são bases do $\mathbf{R}^2$.
   O conjunto {(1,2), (3,5), (2,1)} não é base do $\mathbf{R}^2$, pois apesar de gerar $\mathbf{R}^2$, não é LI.
   O conjunto {(1,2)} é LI mas não gera o $\mathbf{R}^2$, portanto também não é uma base do $\mathbf{R}^2$.
   Toda base de $\mathbf{R}^2$ tem dois vetores de $\mathbf{R}^2$ que geram $\mathbf{R}^2$ e que são LI.
   Logo, $\dim \mathbf{R}^2 = 2$.

2) {(-1,0,1),(2,3,0),(1,2,3)} é uma base do $\mathbf{R}^3$.
   O conjunto {(-1,0,1),(2,3,0)} é LI, mas não gera o $\mathbf{R}^3$. Logo, não é base do $\mathbf{R}^3$.
   O conjunto {(-1,0,1),(2,3,0),(1,2,3),(0,2,4)} gera o $\mathbf{R}^3$, mas não é LI. Também não é uma base do $\mathbf{R}^3$.
   Toda base de $\mathbf{R}^3$ é formada por três vetores LI de $\mathbf{R}^3$.
   Logo, $\dim \mathbf{R}^3 = 3$.

Um vetor qualquer $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ pode ser escrito como $(x, y, z) = x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1)$

Assim, {(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} gera o $\mathbf{R}^3$, isto é, $[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] = \mathbf{R}^3$.

Além disso, este conjunto é LI.

Logo, {(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} é uma base do $\mathbf{R}^3$, denominada a **base canônica** do $\mathbf{R}^3$.

Espaço Vetorial	*Base Canônica*	*Dimensão*
R	$\{1\}$	1
$\mathbf{R}^2$	$\{(1,0),(0,1)\}$	2
$\mathbf{R}^4$	$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$	4
$Mat_{2\times 2}(\mathbf{R})$	$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$	4
Polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 2	$\{1, x, x^2\}$	3

Operações com Subespaços Vetoriais

1. **Interseção**

Sejam S_1 e S_2 subespaços do espaço vetorial real *V*.

O conjunto interseção de S_1 e S_2, $S_1 \cap S_2 = \{v \in V \mid v \in S_1 \text{ e } v \in S_2\}$, é também um subespaço vetorial de V.

(Sub1) $\mathbf{0}_V \in S_1 \cap S_2$?

$\mathbf{0}_V \in S_1$, pois $S_1 \leq V$.

$\mathbf{0}_V \in S_2$, pois $S_2 \leq V$.

Assim, $\mathbf{0}_V \in S_1 \cap S_2$.

(Sub2) Se $v \in S_1 \cap S_2$ e $u \in S_1 \cap S_2$ então $v + u \in S_1 \cap S_2$?

$v \in S_1 \cap S_2 \;\therefore\; v \in S_1$ e $v \in S_2$

$u \in S_1 \cap S_2 \;\therefore\; u \in S_1$ e $u \in S_2$

Então, $v + u \in S_1$ e $v + u \in S_2$.

Logo, $v + u \in S_1 \cap S_2$.

(Sub3) Se $v \in S_1 \cap S_2$ e $k \in \mathbf{R}$ então $k \cdot v \in S_1 \cap S_2$?

$v \in S_1 \cap S_2 \;\therefore\; v \in S_1$ e $v \in S_2$

Então, $k \cdot v \in S_1$ e $k \cdot v \in S_2$.

Logo, $k \cdot v \in S_1 \cap S_2$.

Exemplos:

1) Sejam $S_1 = \{(x,0,0), \text{com } x \in \mathbf{R}\}$ e $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} \mid y = x + z\}$.

$S_1 \cap S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} \mid (x,y,z) \in S_1 \text{ e } (x,y,z) \in S_2\}$.

Assim, $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ y = x + z \end{cases}$

Logo, $S_1 \cap S_2 = \{(0,0,0)\}$.

Geometricamente, tem-se uma reta e um plano no $\mathbf{R^3}$ que se interceptam na origem.

2) Sejam $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} \mid y = 3x\}$ e $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} \mid 2x - y + 3z = 0\}$.

$S_1 \cap S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} \mid y = 3x \text{ e } 2x - y + 3z = 0\}$.

Assim, $\begin{cases} -3x+y=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, $S_1 \cap S_2 = \{(3z,9z,z), z \in \mathbf{R}\}$, ou seja, $S_1 \cap S_2 = \{z \cdot (3,9,1), z \in \mathbf{R}\}$.

Geometricamente, a interseção é representada por uma reta que passa pelos pontos (0,0,0) e (3,9,1).

2. **Soma**

Sejam S_1 e S_2 subespaços do espaço vetorial real *V*.

O conjunto soma de S_1 e S_2, $S_1 + S_2 = \{v \in V \mid v = s_1 + s_2, \text{com } s_1 \in S_1 \text{ e } s_2 \in S_2\}$, é também um subespaço vetorial de V.

Exemplos:

1) Sejam $S_1 = \{(x,0,0), x \in \mathbf{R}\}$ e $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} \mid y = x+z\}$.

$S_1 + S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} \mid (x,y,z) = s_1 + s_2, \text{com } s_1 \in S_1 \text{ e } s_2 \in S_2\}$.

Tem-se que, $(x,0,0) \in S_1$ e $(x,x+z,z) \in S_2$, para quaisquer $x,z \in \mathbf{R}$.

Mas, $x \cdot (1,0,0) \in S_1$ e $x \cdot (1,1,0) + z \cdot (0,1,1) \in S_2$, para quaisquer $x,z \in \mathbf{R}$.

Assim, {(1,0,0)} é base do subespaço S_1 e {(1,1,0),(0,1,1)} é uma base do subespaço S_2.

Então, $(x,y,z) \in S_1 + S_2$ quando $(x,y,z) = k_1 \cdot (1,0,0) + k_2 \cdot (1,1,0) + k_3 \cdot (0,1,1)$.

Assim, $\begin{cases} k_1 + k_2 = x \\ k_2 + k_3 = y \\ k_3 = z \end{cases}$

Sistema possível, logo $S_1 + S_2 = \mathbf{R^3}$.

2) Sejam $S_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R^4} \mid x - y - t = 0\}$ e $S_2 = \{(0,0,z,0), z \in \mathbf{R}\}$.

$S_1 + S_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R^4} \mid (x,y,z,t) = s_1 + s_2, \text{com } s_1 \in S_1 \text{ e } s_2 \in S_2\}$.

Tem-se que, $(y+t,y,z,t) \in S_1$ e $(0,0,z,0) \in S_2$, para quaisquer $y,z,t \in \mathbf{R}$.

Mas, $y \cdot (1,1,0,0) + z \cdot (0,0,1,0) + t \cdot (1,0,0,1) \in S_1$ e $z \cdot (0,0,1,0) \in S_2$, para quaisquer $y,z,t \in \mathbf{R}$.

$(x,y,z,t) \in S_1 + S_2$ quando $(x,y,z,t) = k_1 \cdot (1,1,0,0) + k_2 \cdot (0,0,1,0) + k_3 \cdot (1,0,0,1) + k_4 \cdot (0,0,1,0)$

Assim, $\begin{cases} k_1 + k_3 = x \\ k_1 = y \\ k_2 + k_4 = z \\ k_3 = t \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & -1 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+y-x \end{pmatrix}$$

Para que o sistema seja possível é necessário que $t + y - x = 0$.

Então, $S_1 + S_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R^4} \mid t + y - x = 0\}$.

Seja V um espaço vetorial n-dimensional. Se S_1 e S_2 são subespaços de V então:

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) .$$

Este resultado é conhecido como **Teorema da Dimensão**.

3. **Soma Direta**

Sejam S_1 e S_2 subespaços do espaço vetorial real V.

A soma de S_1 e S_2 é denominada soma direta quando $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}_V\}$.

Notação: $S_1 \oplus S_2$

Coordenadas de um Vetor em relação a uma Base Ordenada

Seja V é um espaço vetorial n-dimensional, qualquer conjunto LI com n vetores é uma base de V.
Ao se escolher uma base para o espaço vetorial V, está-se adotando um sistema referencial no qual pode-se expressar qualquer vetor de V.
Considere $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$ uma base, qualquer vetor $v \in V$ pode ser expresso de maneira única como combinação linear dos vetores da base A,

$$v = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n$$

onde $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbf{R}$ são as **coordenadas do vetor *v* em relação a base ordenada *A***.

Notação: $v_A = (k_1, k_2, ..., k_n)$ e na forma matricial $[v]_A = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ... \\ k_n \end{pmatrix}$.

Toda vez que a expressão “coordenadas em relação a uma base” é utilizada, uma base ordenada está sendo considerada.

Exemplos: O vetor $v = (1,2)$ pode ser escrito:

1) Considerando a base canônica do $\mathbf{R}^2$.

   $(1,2) = 1 \cdot (1,0) + 2 \cdot (0,1)$ ou seja $[v] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2) Considerando a base $A = \{(1,1), (-1,0)\}$.

   $(1,2) = k_1 \cdot (1,1) + k_2 \cdot (-1,0)$

   Assim, $\begin{cases} k_1 - k_2 = 1 \\ k_1 + 0k_2 = 2 \end{cases}$

   Logo, $k_1 = 2$ e $k_2 = 1$.

   Portanto, $(1,2) = 2 \cdot (1,1) + 1 \cdot (-1,0)$ e $[v]_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Matriz de Transição de uma Base para uma outra Base

Que relação existe entre as coordenadas de um vetor no antigo referencial e em um novo referencial? Uma matriz permitirá a relação entre estes referenciais, as bases do espaço vetorial. Esta matriz é denominada **matriz de transição** ou **matriz mudança de base**.

O desenvolvimento a seguir considera duas bases do $\mathbf{R}^2$, no entanto o mesmo raciocínio pode ser utilizado para qualquer espaço vetorial *V* *n*-dimensional.

Sejam $A = \{u_1, u_2\}$ e $B = \{w_1, w_2\}$ bases do $\mathbf{R}^2$.

Para qualquer $v \in \mathbf{R}^2$, tem-se:

$$v = a \cdot u_1 + b \cdot u_2 \qquad (1)$$

isto é, $[v]_A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Como u_1 e u_2 são vetores do $\mathbf{R}^2$, podem ser escritos como combinação linear dos vetores da base *B*.

$$\begin{cases} u_1 = a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2 \\ u_2 = a_{12} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2 \end{cases} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$v = a \cdot (a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2) + b \cdot (a_{12} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2)$$
$$v = (a \cdot a_{11} + b \cdot a_{12}) \cdot w_1 + (a \cdot a_{21} + b \cdot a_{22}) \cdot w_2$$

Portanto, $a \cdot a_{11} + b \cdot a_{12}$ e $a \cdot a_{21} + b \cdot a_{22}$ são as coordenadas de *v* em relação à base *B*.

Assim, $[v]_B = \begin{pmatrix} a \cdot a_{11} + b \cdot a_{12} \\ a \cdot a_{21} + b \cdot a_{22} \end{pmatrix}$.

Podendo ser rescrito como, $[v]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

A matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ acima é denotada por $[I]_B^A$ sendo denominada a matriz de transição da base *A* para a base *B*.

As colunas da matriz $[I]_B^A$ são as coordenadas dos vetores da base *A* em relação à base *B*.

Obtém-se a equação matricial, $[v]_B = [I]_B^A \cdot [v]_A$.

Analogamente, $[v]_A = [I]_A^B \cdot [v]_B$ para mudança da base *B* para a base *A*.

Observe que, $[v]_B = [I]_B^A \cdot [v]_A$.

Como, $[v]_A = [I]_A^B \cdot [v]_B$.

Tem-se que, $[v]_B = [I]_B^A \cdot [I]_A^B \cdot [v]_B$.

Como, $[v]_B = I_n \cdot [v]_B$.

Então, $I_n = [I]_B^A \cdot [I]_A^B$.

Logo, $[I]_B^A = ([I]_A^B)^{-1}$.

Exercícios

1) Verifique se $\mathbf{R^2}$ é um espaço vetorial, para as operações definidas abaixo.

a) $(x, y) + (z, t) = (x - z, y - t)$
$k \cdot (x, y) = (-kx, -ky)$

b) $(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$
$k \cdot (x, y) = (kx, 0)$

c) $(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$
$k \cdot (x, y) = (2kx, 2ky)$

d) $(x, y) + (z, t) = (0, 0)$
$k \cdot (x, y) = (kx, ky)$

e) $(x, y) + (z, t) = (xz, yt)$
$k \cdot (x, y) = (kx, ky)$

f) $(x, y) + (z, t) = (x + z + 1, y + t + 1)$
$k \cdot (x, y) = (kx, ky)$

g) $(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$
$k \cdot (x, y) = (kx, y)$

2) Considere o conjunto $Fun(\mathbf{R})$ de todas as funções $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Definem-se duas operações binárias $+ : Fun(\mathbf{R}) \times Fun(\mathbf{R}) \to Fun(\mathbf{R})$ tal que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $\cdot : \mathbf{R} \times Fun(\mathbf{R}) \to Fun(\mathbf{R})$ tal que $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$.
Estas operações definem um espaço vetorial?

3) Verifique se os seguintes subconjuntos são subespaços de $\mathbf{R^3}$.

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R^3} \mid z = 3\}$
b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R^3} \mid x^2 = y\}$
c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R^3} \mid x = 2y\}$
d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R^3} \mid x > 0\}$
e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R^3} \mid y = x + z\}$
f) $S = \{(0, y, y), y \in \mathbf{R}\}$

4) Verifique se o conjunto solução do sistema $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 4y - z = 0 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases}$ é um subespaço vetorial de $\mathbf{R}^3$.

5) Escreva $u = (1, -2)$ como combinação linear de $(1, 2)$ e $(0, 3)$.

6) O vetor $v = (-2, 1, 0)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores (1,2,0) e (0,1,0)?

7) Escreva $p(x) = x^2 + x - 1$ como combinação linear de $q(x) = x^2 - 2x$ e $r(x) = 2x^2 - \dfrac{4}{3}$.

8) O conjunto $\{(-1,2),(0,1),(3,1)\}$ gera o $\mathbf{R^2}$?

9) Determine a equação do plano gerado pelos vetores $(-1,2,0),(0,1,2)$ e $(-2,5,2)$.

10) Verifique se os conjuntos abaixo são LI ou LD.
   a) $\{(1,0,0),(1,3,5),(3,2,5)\}$
   b) $\{(1,2,-1),(0,0,1),(1,-2,3),(3,0,1)\}$
   c) $\{(1,2),(3,5),(2,1)\}$
   d) $\{(1,0,2),(0,-1,3),(0,0,2)\}$
   e) $\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$

11) Mostre que se $\{u,v,w\}\subseteq V$ é LI então $\{u+v,u+w,v+w\}$ também é um conjunto LI.

12) Complete com V(erdadeiro) ou F(also).
( ) [(1,2,0),(2,4,0)] é um plano no $\mathbf{R^3}$ que passa pela origem.
( ) [(1,2,0),(2,3,0)] é um plano no $\mathbf{R^3}$ que passa pela origem.
( ) $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\subseteq V$ é LD quando pelo menos um destes vetores é combinação linear dos demais.
( ) $\{(-1,2,3),(0,1,2),(-1,1,1)\}$ gera o $\mathbf{R^3}$.
( ) O conjunto {(1,2,3),(0,0,0),(2,3,5)} é LI.
( ) Se $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\subseteq V$ é LI então qualquer um dos seus subconjuntos também é LI.
( ) Se todo subconjunto próprio de $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\subseteq V$ é LI então $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ é LI.
( ) [(1,2)] possui somente duas bases {(1,2)} e {(2,4)}.
( ) {(1,0,4),(7,8,0)} é base de [(1,0,4),(7,8,0)].
( ) Todo conjunto LI de vetores é uma base de seu subespaço gerado.
( ) {(3,5),(0,0)} é base do $\mathbf{R^2}$.
( ){(2,3),(4,5),(7,9)} gera o $\mathbf{R^2}$ então {(2,3),(4,5)}, {(2,3),(7,9)} e {(4,5),(7,9)} são bases do $\mathbf{R^2}$.
( ) Se $[v_1,v_2,v_3,v_4]=\mathbf{R^3}$ então quaisquer três vetores deste conjunto formam uma base do $\mathbf{R^3}$.
( ) Um conjunto com três vetores do $\mathbf{R^3}$ é base do $\mathbf{R^3}$.
( ) Um conjunto com mais do que três vetores do $\mathbf{R^3}$ não será uma base do $\mathbf{R^3}$.
( ) $\{(1,2,3),(2,-1,3)\}$ é base do $\mathbf{R^2}$.
( ) Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos.
( ) $\{(2,3),(x,y)\}$ é base do $\mathbf{R^2}$ quando $(x,y)\notin[(2,3)]$.
( ) Sejam V um espaço vetorial n-dimensional e o conjunto $\{v_1,v_2,\dots,v_{n-1}\}\subseteq V$ LI.
Então $\{v_1,v_2,\dots,v_{n-1},v\}$ é base de V qualquer que seja o vetor $v\in V$.
( ) Se $\dim V=n$ então qualquer conjunto LI com n vetores é uma base de V.
( ) {(0,1,2),(1,0,1)} gera $\mathbf{R^2}$.
( ) Todo conjunto gerador de um espaço vetorial V é uma base para V.
( ) Se $S=[(1,0,-1),(2,1,3),(1,1,4)]$ então $\dim S=3$.

13) Para que valores de k os vetores $(1,2,0,k),(0,-1,k,1),(0,2,1,0)$ e $(1,0,2,3k)$ geram um espaço tridimensional ?

14) Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços de $\mathbf{R^3}$.
   a) $\{(x,y,z)\in\mathbf{R^3}\mid x=2y \text{ e } z=y\}$
   b) $\{(x,y,z)\in\mathbf{R^3}\mid x+2y-z=0\}$
   c) $\{(x,y,z)\in\mathbf{R^3}\mid y=0 \text{ e } x+z=0\}$

15) Encontre uma base e a dimensão para o conjunto solução do sistema $\begin{cases} x+2y-2z-t=0 \\ 2x+4y+z+t=0 \\ x+2y+3z+2t=0 \end{cases}$.

16) Mostre que a soma de subespaços é também um subespaço.

17) Determine o subespaço interseção e o subespaço soma para os casos abaixo, indicando quando a soma é direta.

a) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x-2y+z=0\}$ e $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+3y=0\}$

b) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x=y\}$ e $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z=0\}$

19) Sejam $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y=0\}$ e $S_2 = [(-1,2,0),(3,1,1)]$. Determine $S_1 \cap S_2$ e $S_1 + S_2$, indicando uma base e a dimensão em cada um dos casos.

20) Seja $v=(1,2,3)$ e a base $A=\{(1,0,3),(-1,7,5),(2,-1,6)\}$. Indique $[v]_A$.

21) Considere $A=\{(1,1,1),(0,2,3),(0,2,-1)\}$ uma base para o $\mathbf{R}^3$. Encontre as coordenadas de $v=(3,5,-2)$ em relação a esta base.

22) Seja $A=\{(-1,1,1),(0,2,3),(0,0,-1)\}$ e $(v)_A=(-2,0,3)$. Determine v.

23) Sendo $A=\{(-3,-1),(2,0)\}$ uma base para o $\mathbf{R}^2$ e $[v]_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Encontre:

a) As coordenadas de v na base canônica.

b) As coordenadas de v na base $B=\{(2,1),(1,5)\}$.

24) Encontre as coordenadas do vetor $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times2}(\mathbf{R})$ em relação à base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

25) Dadas as bases do $\mathbf{R}^3$, $A=\{(-1,0,2),(0,1,0),(0,0,2)\}$ e $B=\{(0,0,1),(0,-2,1),(1,0,-1)\}$.

a) Determine $[I]_B^A$.

b) Considere $[v]_A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calcule $[v]_B$.

26) Considere as bases $A=\{(-3,0,3),(-3,2,-1),(1,6,-1)\}$ e $B=\{(-6,-6,0),(-2,-6,4),(-2,-3,7)\}$.

a) Achar a matriz mudança de base de B para A.

b) Dado $v=(-5,8,-5)$, calcule $[v]_A$.

27) Seja $[I]_B^A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $B=\{(1,-2),(2,0)\}$. Determine a base A.

28) Seja $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a matriz mudança de base de B para A. Determinar a base A, sabendo que $B = \{(1,-1),(0,1)\}$.

29) Sabendo que $A = \{u_1, u_2\}$ e $B = \{w_1, w_2\}$ são bases do $\mathbf{R}^2$ tais que: $[v]_A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_1 = u_1 - u_2$ e $w_2 = 2 \cdot u_1 - 3 \cdot u_2$, determine $[v]_B$.

30) Considere $A = \{(1,1,1),(0,2,3),(0,2,-1)\}$ e $B = \{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$. Determine as matrizes mudança de base.

Respostas

1) Nenhum é espaço vetorial.

3) a)b)d) Não
c)e)f) Sim

4) Não

5) $(1,-2) = 1 \cdot (1,2) + (-\frac{4}{3}) \cdot (0,3)$

6) Sim, $k_1 = -2$ e $k_2 = 5$

7) $p(x) = (-\frac{1}{2}) \cdot q(x) + \frac{3}{4} \cdot r(x)$

9) $4x + 2y - z = 0$

10) a)d)e) LI
b)c) LD

12) F,V,V,F,F,V,F,F,V,V,
F,V,F,F,V,F,V,V,F,V,
F,F,F

13) $k = 1$ ou $k = -\frac{3}{2}$

14) a) base : $\{(2,1,1)\}$ e $\dim = 1$
b) base : $\{(-2,1,0),(1,0,1)\}$ e $\dim = 2$
c) base : $\{(1,0,1\}$ e $\dim = 1$

15) base : $\{(-2,1,0,0),(-\frac{1}{5},0,-\frac{3}{5},1)\}$
$\dim = 2$

18) a) $S_1 \cap S_2 = \{(-3y, y, 5y), y \in \mathbf{R}\}$
$S_1 + S_2 = \mathbf{R}^3$
b) $S_1 \cap S_2 = \{(y, y, -2y), y \in \mathbf{R}\}$
$S_1 + S_2 = \mathbf{R}^3$
Nenhum é soma direta.

19) $S_1 \cap S_2 = \{(\frac{7}{2}z, 0, z), z \in \mathbf{R}\}$
base : $\{(7,0,2)\}$ e $\dim = 1$
$S_1 + S_2 = \mathbf{R}^3$
base : $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\dim = 3$

20) $[v]_A = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

21) $(v)_A = (3,-1,2)$

22) $v = (2,-2,-5)$

23) a) $[v] = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $[v]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

24) $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

25) a) $[I]_B^A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $[v]_B = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

26) a) $[I]_A^B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{9} & \frac{17}{9} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$ b) $[v]_A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

27) $A = \{(1,-2),(-8,4)\}$

28) $A = \{(1,-1),(-\frac{2}{3},1)\}$

29) $[v]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

30) $[I]_B^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ e $[I]_A^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Apêndice B – Teoremas

Teo1. O elemento neutro é único.
Demonstração por Redução ao Absurdo (RAA)

Supondo que o elemento neutro não é único, isto é, existem $\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_V^{'} \in V$, $\mathbf{0}_V \neq \mathbf{0}_V^{'}$ ambos elementos neutros.

$\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V^{'} = \mathbf{0}_V$ por EV3, $\mathbf{0}_V^{'}$ é elemento neutro à direita.

$\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V^{'} = \mathbf{0}_V^{'}$ por EV3, $\mathbf{0}_V$ é elemento neutro à esquerda.

Então, $\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V^{'}$. Contradição.

Logo, só existe um elemento neutro para a operação de adição em V.

Teo2. (**Lei do Corte** ou **Lei do Cancelamento**)

Para quaisquer $v, u, w \in V$, se $v + u = v + w$ então $u = w$.

dem.: Por hipótese, $v + u = v + w$.

Pelo axioma EV4, $(-v) + (v + u) = (-v) + (v + w)$.

Por EV1, $((-v) + v) + u = ((-v) + v) + w$.

Por EV4, $\mathbf{0}_V + u = \mathbf{0}_V + w$.

Por EV3, $u = w$.

Teo3. O elemento simétrico é único.

Teo4. Para quaisquer $v, u \in V$, se $v + u = v$ então $u = \mathbf{0}_V$.

dem.: Por hipótese, $v + u = v$.

Pelo axioma EV3, $v + \mathbf{0}_V = v$.

Assim, $v + u = v + \mathbf{0}_V$.

Pela Lei do Corte, $u = \mathbf{0}_V$.

Teo5. Para quaisquer $v, u \in V$, se $v + u = \mathbf{0}_V$ então $u = -v$.

Teo6. Para todo $v \in V$, $0 \cdot v = \mathbf{0}_V$.

dem.: Considere o vetor $v + 0 \cdot v \in V$.

$v + 0 \cdot v =$	por EV8.
$1 \cdot v + 0 \cdot v =$	por EV6.
$(1 + 0) \cdot v =$	0 é o elemento neutro da adição em **R**.
$1 \cdot v =$	por EV8.
$v =$	por EV3.
$v + \mathbf{0}_V$	

Assim, $v + 0 \cdot v = v + \mathbf{0}_V$.

Pela Lei do Corte, $0 \cdot v = \mathbf{0}_V$.

Teo7. Para todo $k \in \mathbf{R}$, $k \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$.

dem.: Considere o vetor $k \cdot \mathbf{0}_V + k \cdot \mathbf{0}_V \in V$.

$k \cdot \mathbf{0}_V + k \cdot \mathbf{0}_V =$	por EV6.
$k \cdot (\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V) =$	por EV3.
$k \cdot \mathbf{0}_V =$	por EV3.

$k \cdot \mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V$

Assim, $k \cdot \mathbf{0}_V + k \cdot \mathbf{0}_V = k \cdot \mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V$.

Pela Lei do Corte, $k \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$.

Teo8. Para todo $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$ e para todo $k \in \mathbf{R}, k \neq 0$, $k \cdot v \neq \mathbf{0}_V$.

dem.: (RAA) Supondo que $v \neq \mathbf{0}_V$, $k \neq 0$ e $k \cdot v = \mathbf{0}_V$

$v =$	por EV8.
$1 \cdot v =$	por hipótese e pela existência de elemento inverso em **R**.
$\left(\frac{1}{k}k\right) \cdot v =$	por EV5.
$\frac{1}{k} \cdot (k \cdot v) =$	por hipótese.
$\frac{1}{k} \cdot \mathbf{0}_V =$	pela Teo5.
$\mathbf{0}_V$	

Assim, $v = \mathbf{0}_V$. Contradição.

Logo, $k \cdot v \neq \mathbf{0}_V$.

Corolário8. Para todo $v \in V$ e para todo $k \in \mathbf{R}$, se $k \cdot v = \mathbf{0}_V$ então $k = 0$ ou $v = \mathbf{0}_V$.

Teo9. Para todo $v \in V$, $(-1) \cdot v = -v$.

dem.: Considere o vetor $v + (-1) \cdot v \in V$.

$v + (-1) \cdot v =$	por EV8.
$1 \cdot v + (-1) \cdot v =$	por EV6.
$(1 + (-1)) \cdot v =$	0 é o elemento neutro da adição em **R**.
$0 \cdot v =$	por EV8.
$\mathbf{0}_V$	

Assim, $v + (-1) \cdot v = \mathbf{0}_V$.

Então, $v + (-1) \cdot v = v + (-v)$

Pela Lei do Corte, $(-1) \cdot v = -v$.

Teo10. Para todo $v \in V$ e para todo $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, $n \cdot v = v + v + ... + v$ (soma com *n* parcelas).

Demonstração usando indução em *n*.

Base: Para $k = 1$.

Por EV8, $1 \cdot v = v$.

Passo: (Hipótese de Indução) Supor que vale a igualdade para $k \in \mathbf{N}, k > 1$, isto é, $k \cdot v = \underbrace{v + v + ... + v}_{k \text{ parcelas}}$.

Vale a igualdade para $k + 1$?

$(k + 1) \cdot v =$	por EV6.
$k \cdot v + 1 \cdot v =$	por EV8.
$k \cdot v + v =$	por hipótese de indução.
$\underbrace{(v + v + ... + v)}_{k \text{ parcelas}} + v =$	por EV1.
$\underbrace{v + v + ... + v}_{(k+1) \text{ parcelas}}$	

Assim, $(k+1)\cdot v = \underbrace{v+v+...+v}_{(k+1)\ \text{parcelas}}$.

Logo, vale a igualdade para todo $n \in \mathbf{N}-\{0\}$.

Teo11. Todo subespaço vetorial é um espaço vetorial.

Teo12. Se $\{v_1, v_2,..., v_r\} \subseteq V$ então $[v_1, v_2,..., v_r]$ é um subespaço vetorial de *V*.

Teo13. Sejam $\{v_1, v_2,..., v_r\} \subseteq V$ e $v \in V$. Se *v* é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2,..., v_r$ então $[v_1, v_2,..., v_r, v] = [v_1, v_2,..., v_r]$.

dem.: ($\subseteq$) $[v_1, v_2,..., v_r, v] \subseteq [v_1, v_2,..., v_r]$?

$v = k_1 \cdot v_1 + ... + k_r \cdot v_r$ com $k_1,..., k_r \in \mathbf{R}$. (1)

Seja $u \in [v_1,..., v_r, v]$ qualquer.

Então $u = l_1 \cdot v_1 + ... + l_r \cdot v_r + l_{r+1} \cdot v$ com $l_1,..., l_{r+1} \in \mathbf{R}$. (2)

Substituindo (1) em (2),

$u = l_1 \cdot v_1 + ... + l_r \cdot v_r + l_{r+1} \cdot (k_1 \cdot v_1 + ... + k_r \cdot v_r) =$ por EV7.

$= l_1 \cdot v_1 + ... + l_r \cdot v_r + (l_{r+1} \cdot (k_1 \cdot v_1) + ... + l_{r+1} \cdot (k_r \cdot v_r)) =$ por EV5 e EV1

$= l_1 \cdot v_1 + ... + l_r \cdot v_r + (l_{r+1}k_1) \cdot v_1 + ... + (l_{r+1}k_r) \cdot v_r =$ por EV2

$= l_1 \cdot v_1 + (l_{r+1}k_1) \cdot v_1 + ... + l_r \cdot v_r + (l_{r+1}k_r) \cdot v_r =$ por EV6

$= (l_1 + l_{r+1}k_1) \cdot v_1 + ... + (l_r + l_{r+1}k_r) \cdot v_r =$ pelo fechamento da multiplicação e da adição em **R**.

$= m_1 \cdot v_1 + ... + m_r \cdot v_r$ com $m_1,..., m_{r+1} \in \mathbf{R}$.

Assim, $u = m_1 \cdot v_1 + ... + m_r \cdot v_r$ com $m_1,..., m_{r+1} \in \mathbf{R}$.

Logo, $u \in [v_1,..., v_r]$.

($\supseteq$) $[v_1, v_2,..., v_r] \subseteq [v_1, v_2,..., v_r, v]$ (exercício)

Teo14. Sejam $\{v_1, v_2,..., v_r\} \subseteq V$ e $\{u_1, u_2,..., u_s\} \subseteq V$. $[v_1, v_2,..., v_r] = [u_1, u_2,..., u_s]$ se e somente se cada um dos vetores do conjunto $\{v_1, v_2,..., v_r\}$ é uma combinação linear dos vetores $u_1, u_2,..., u_s$ e cada um dos vetores do conjunto $\{u_1, u_2,..., u_s\}$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2,..., v_r$.

Teo15. Seja $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$, $\{v\}$ é linearmente independente.

Teo16. Seja $\{v_1, v_2,..., v_r\} \subseteq V$. Se $v_i = \mathbf{0}_V$, para algum $i = 1,..., r$ então $\{v_1, v_2,..., v_r\}$ é linearmente dependente.

dem.: $k_1 \cdot v_1 + ... + k_i \cdot \mathbf{0}_V + ... + k_r \cdot v_r = \mathbf{0}_V$

Para qualquer $k_i \in \mathbf{R}$, $k_i \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$.

Logo, o conjunto $\{v_1, v_2,..., v_r\}$ é LD.

Teo17. Seja $\{v_1, v_2,..., v_r\} \subseteq V$. O conjunto $\{v_1, v_2,..., v_r\}$ é linearmente dependente se e somente se pelo menos um destes vetores é combinação linear dos demais.

dem.: ($\rightarrow$) Considere $\{v_1, v_2,..., v_r\}$ linearmente dependente.

$k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_i \cdot v_i + ... + k_r \cdot v_r = \mathbf{0}_V$

Então existe um $k_i \in \mathbf{R}$, $k_i \neq 0$, com $i \in [1, r]$.

Pelo EV4 e o Teo7,

$(-k_i)\cdot v_i = k_1\cdot v_1 + ... + k_{i-1}\cdot v_{i-1} + k_{i+1}\cdot v_{i+1} + ... + k_r\cdot v_r$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\left(-\dfrac{1}{k_i}\right)\in \mathbf{R}$,

$$\left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot((-k_i)\cdot v_i) = \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_1\cdot v_1 + ... + k_{i-1}\cdot v_{i-1} + k_{i+1}\cdot v_{i+1} + ... + k_r\cdot v_r)$$

Por EV5, EV7 e propriedades em $\mathbf{R}$,

$$\left(-\frac{(-k_i)}{k_i}\right)\cdot v_i = \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_1\cdot v_1) + ... + \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_{i-1}\cdot v_{i-1}) + \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_{i+1}\cdot v_{i+1}) + ... + \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_r\cdot v_r)$$

Por EV5,

$$1\cdot v_i = \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_1\cdot v_1) + ... + \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_{i-1}\cdot v_{i-1}) + \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_{i+1}\cdot v_{i+1}) + ... + \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_r\cdot v_r)$$

Por EV8 e propriedades em $\mathbf{R}$,

$$v_i = \left(-\frac{k_1}{k_i}\right)\cdot v_1 + ... + \left(-\frac{k_{i-1}}{k_i}\right)\cdot v_{i-1} + \left(-\frac{k_{i+1}}{k_i}\right)\cdot v_{i+1} + ... + \left(-\frac{k_r}{k_i}\right)\cdot v_r$$

Assim, $v_i = m_1\cdot v_1 + ... + m_{i-1}\cdot v_{i-1} + m_{i+1}\cdot v_{i+1} + ... + m_r\cdot v_r$

Logo, v_i, com $i\in[1,r]$, é combinação linear dos demais vetores.

$(\leftarrow)$ Seja o vetor $v_i\in\{v_1,v_2,...,v_r\}$ tal que $v_i = k_1\cdot v_1 + ... + k_{i-1}\cdot v_{i-1} + k_{i+1}\cdot v_{i+1} + ... + k_r\cdot v_r$.

$k_1\cdot v_1 + ... + k_{i-1}\cdot v_{i-1} + (-1)\cdot v_i + k_{i+1}\cdot v_{i+1} + ... + k_r\cdot v_r = \mathbf{0}_V$.

Então, $k_i = (-1)\neq 0$.

Logo, $\{v_1,v_2,...,v_r\}$ é linearmente dependente.

Corolário17. Sejam $\{v_1,v_2,...,v_r\}\subseteq V$ e $v\in V$. Se $\{v_1,v_2,...,v_r\}$ é linearmente independente e $\{v_1,v_2,...,v_r,v\}$ é linearmente dependente então *v* é uma combinação linear dos vetores $v_1,v_2,...,v_r$.

dem.: $\{v_1,v_2,...,v_r,v\}$ é LD.

Pelo Teo17, pelo menos um destes vetores é combinação linear dos demais.

Mas, $\{v_1,v_2,...,v_r\}$ é LI.

Logo, este vetor é o vetor *v*.

Teo18. Seja $S\subset\{v_1,v_2,...,v_r\}\subseteq V$ tal que $S\neq\varnothing$. Se *S* é linearmente dependente então $\{v_1,v_2,...,v_r\}$ é linearmente dependente.

dem.: Seja $S\subseteq\{v_1,v_2,...,v_r\}$ qualquer.

$S=\{v_{S_1},...,v_{S_p}\}$ com $v_{S_i}\in\{v_1,...,v_r\}$ para todo $i=1,...,p$.

S é LD.

Pela Teo17, existe $v_{S_j}\in S$ que é combinação linear dos demais vetores de *S*.

Mas, $v_{S_j}\in S\subseteq\{v_1,...,v_r\}$.

Então, $v_{S_j}\in\{v_1,...,v_r\}$ que é combinação linear destes vetores.

Logo, $\{v_1,v_2,...,v_r\}$ é LD.

Teo19. Sejam $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$ um conjunto linearmente independente e $k_1, ..., k_r, l_1, ..., l_r \in \mathbf{R}$.
Se $k_1 \cdot v_1 + ... + k_r \cdot v_r = l_1 \cdot v_1 + ... + l_r \cdot v_r$ então $k_i = l_i$, para todo $i = 1, ..., r$.

Corolário19. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$. Se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base de V então todo vetor $v \in V$ pode ser escrito de forma única como combinação linear dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ da base.

Teo20. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$. O conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é linearmente independente se e somente se nenhum destes vetores é combinação linear dos demais.

Corolário20a. Seja $\{v, u\} \subseteq V$. O conjunto $\{v, u\}$ é linearmente independente se e somente se um vetor não é múltiplo escalar do outro.

Corolário20b. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$ um conjunto linearmente independente e $v \in V$.
Se $v \notin [v_1, v_2, ..., v_r]$ então $\{v_1, v_2, ..., v_r, v\}$ é um conjunto linearmente independente.

Teo21. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$. Se $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é linearmente independente então qualquer um de seus subconjuntos é linearmente independente.

Teo22. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$. Se $[v_1, v_2, ..., v_r] = V$ então existe uma base A de V tal que $A \subseteq \{v_1, v_2, ..., v_r\}$.

dem.: Se $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é LI então $A = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é uma base de V.

Se $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é LD,

Então, pelo Teo17, existe $v_i \in \{v_1, v_2, ..., v_r\}$, com $i \in [1, r]$, tal que: $v_i \in [v_1, v_2, ..., v_r]$.

Pelo Teo13, $[v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ... v_r] = [v_1, v_2, ..., v_r]$.

Como, por hipótese, $[v_1, v_2, ..., v_r] = V$.

Assim, $[v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ... v_r] = V$.

Se $\{v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ... v_r\}$ é LI então $A = \{v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ... v_r\}$ é uma base de V.

Caso contrário este processo continua até a obtenção de um certo conjunto $A \subseteq \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ LI e tal que $[A] = V$.

Assim, A é uma base do espaço vetorial V.

Corolário22a. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$. Se $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ gera o espaço vetorial V então qualquer conjunto de vetores de V com mais do que r elementos é linearmente dependente.

Corolário22b. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$.
Se $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ gera V então qualquer conjunto de vetores de V linearmente independente tem no máximo r elementos.

Teo23. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$. Se $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é linearmente independente então pode-se estender o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ a um conjunto B base de V.

dem.: Se $[v_1, v_2, ..., v_r] = V$ então $B = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é uma base de V.

Se $[v_1, v_2, ..., v_r] \subset V$,

Então, seja $v \in V$ tal que $v \notin [v_1, v_2, ..., v_r]$.

Pelo Corol20b, $\{v_1, v_2, ..., v_r, v\}$ é LI.

Se $[v_1, v_2, ..., v_r, v] = V$ então $B = \{v_1, v_2, ..., v_r, v\}$ é uma base de V.

Caso contrário este processo continua até a obtenção de um certo conjunto B tal que $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq B$, B é LI e $[B] = V$.
Assim, B é uma base do espaço vetorial V.

Teo24. Sejam $\dim V = n$ e $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$. O conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base de V se é linearmente independente ou se gera o espaço vetorial V.

Teo25. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base do espaço vetorial V e $\{u_1, u_2, ..., u_m\} \subseteq V$.
i) Se $m > n$ então o conjunto $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ é linearmente dependente.
ii) Se $m < n$ então o conjunto $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ não gera o espaço vetorial V.

Teo26. Todas as bases de um espaço vetorial possuem o mesmo número de vetores.

Teo27. Para quaisquer subespaços vetoriais S e U de V, $S \cap U \neq \varnothing$ e $S + U \neq \varnothing$.
dem.: $S \leq V \therefore \mathbf{0}_V \in S$.
$U \leq V \therefore \mathbf{0}_V \in U$.
Assim, $\mathbf{0}_V \in S \cap U$ e $\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V \in S + U$.
Logo, $S \cap U \neq \varnothing$ e $S + U \neq \varnothing$.

Teo28. Para quaisquer subespaços vetoriais S e U de V, $S \cap U$ é um subespaços vetorial de V.

Teo29. Para quaisquer subespaços vetoriais S e U de V, $S + U$ é um subespaço vetorial de V.

Teo30. Seja S é um subespaço vetorial de V tal que $S \neq \{\mathbf{0}_V\}$. Então $\dim S \leq \dim V$.

Teo31. Se V é a soma direta dos subespaços vetoriais S e U então todo vetor $v \in V$ é escrito de maneira única na forma $v = s + u$, com $s \in S$ e $u \in U$.
dem.: (escrita)
Como $V = S + U$
Então, para todo $v \in V, v = s + u$ para algum $s \in S$ e $u \in U$.
(unicidade) (RAA)
Supondo que existam $s, s' \in S, s \neq s'$ e $u, u' \in U, u \neq u'$ tais que $v = s + u$ e $v = s' + u'$.
Assim, $s + u = s' + u'$.
Pelas propriedades do EV, $s + (-s') = u' + (-u)$.
Como $S \leq V$, $s + (-s') \in S$, e, analogamente, como $U \leq V$, $u' + (-u) \in U$.
Assim, $s + (-s') \in S \cap U$ e $u' + (-u) \in S \cap U$.
Por hipótese, $S \cap U = \{\mathbf{0}_V\}$.
Então, $s + (-s') = \mathbf{0}_V$ e $u' + (-u) = \mathbf{0}_V$.
Assim, $s = s'$ e $u' = u$. Contradição.
Logo, vale a unicidade.

Teo32. (**Teorema da Dimensão**)

Se S e U são subespaços vetoriais de V então $\dim(S+U) = \dim S + \dim U - \dim(S \cap U)$.

dem.: Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ uma base do subespaço interseção $S \cap U$.

Pelo Teo23, $\{v_1, v_2, ..., v_r, w_1, w_2, ..., w_s\}$ é uma base do subespaço *S*.

Analogamente, $\{v_1, v_2, ..., v_r, u_1, u_2, ..., u_t\}$ é uma base do subespaço *U*.

O subespaço soma $S+U$ é gerado pelo conjunto $\{v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s, u_1, ..., u_t\}$, isto é, $S+U = [v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s, u_1, ..., u_t]$.

Seja $k_1 \cdot v_1 + ... + k_r \cdot v_r + l_1 \cdot w_1 + ... + l_s \cdot w_s + m_1 \cdot u_1 + ... + m_t \cdot u_t = \mathbf{0}_V$ (1)

Mas, $-(m_1 \cdot u_1 + ... + m_t \cdot u_t) = k_1 \cdot v_1 + ... + k_r \cdot v_r + l_1 \cdot w_1 + ... + l_s \cdot w_s$

Assim, $m_1 \cdot u_1 + ... + m_t \cdot u_t \in S$

Mas, $m_1 \cdot u_1 + ... + m_t \cdot u_t \in U$

Assim, $m_1 \cdot u_1 + ... + m_t \cdot u_t = p_1 \cdot v_1 + ... + p_r \cdot v_r$, para certos $p_1, p_2, ..., p_r \in \mathbf{R}$.

Como $\{v_1, v_2, ..., v_r, u_1, u_2, ..., u_t\}$ é uma base.

Então, $m_1 = m_2 = ... = m_t = 0$.

Substituindo em (1): $k_1 \cdot v_1 + ... + k_r \cdot v_r + l_1 \cdot w_1 + ... + l_s \cdot w_s = \mathbf{0}_V$

Como $\{v_1, v_2, ..., v_r, w_1, w_2, ..., w_s\}$ é uma base.

Tem-se, $k_1 = ... = k_r = l_1 = ... = l_s = 0$.

Então, $\{v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s, u_1, ..., u_t\}$ é LI.

Logo, $\{v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s, u_1, ..., u_t\}$ é uma base para o subespaço soma $S+U$.

Assim, $\dim S + \dim U = (r+s) + (r+t) = r + (r+s+t) = \dim(S \cap U) + \dim(S+U)$.

Logo, $\dim(S+U) = \dim S + \dim U - \dim(S \cap U)$.

Corolário32. Seja *S* é um subespaço vetorial de *V*. Se $\dim S = \dim V$ então $S = V$.