

Propriedades Assintóticas de Problemas de Transmissão Para Placas e Vigas

JUAN CARLOS VILA BRAVO

Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro
Doutorado em Matemática

Orientador: JAIME E. MUÑOZ RIVERA

Rio de Janeiro
2003

Propriedades Assintóticas de Problemas de Transmissão Para Placas e Vigas

Juan Carlos Vila Bravo

Tese submetida ao corpo docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Jaime E. Rivera Muñoz - UFRJ
(Orientador)

Prof. Gustavo Perla Menzala - UFRJ

Prof. Alexandre L. Madureira - LNCC

Prof. Higídio Portillo Oquendo - UFPR

Prof. Mauro Fabrizio - Univ. de Bologna

Prof. Helvecio Rubens Crippa - UFRJ

Rio de Janeiro
setembro 2003

Ficha Catalográfica

de Vila Bravo, Juan Carlos.

PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS DE
PROBLEMAS DE TRANSMISSÃO PARA PLACAS
E VIGAS / Juan Carlos Vila Bravo. Rio de Janeiro:
UFRJ/IM 2003.

v, 64p. il.

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM.

1. Resultados Preliminares. 2. Problema de Transmissão para a Equação de Vigas. 3. Problema de Transmissão para a Equação de von Kármán. 4. Problema de Transmissão para uma Equação de Placas Termoelásticas do tipo Hiperbólico. 5. Instabilidade Exponencial e Decaimento Polinomial para Placas Elásticas.

Resumo

Estudamos a existência e o decaimento exponencial das soluções de problemas de transmissão para algumas equações de vigas e placas com mecanismos dissipativos na fronteira o tipo memória.

Usamos o método de Faedo-Galerkin e técnicas de semigrupo, para mostrar a existência global da solução. Para o comportamento assintótico usamos o método da energia e análise espectral.

Abstract

We study the existence and the exponential decay of the solutions transmission problems to some equations of beams and plates with dissipative mechanisms working on the border. We use the Galerkin method as well as the semigroup approach to show the global existence of the solution. For the asymptotic behavior we use the energy method and also spectral theory.

Conteúdo

Introdução	vii
1 Resultados Preliminares	1
1.1 Espaços Funcionais	1
1.2 Resultados Básicos	3
1.3 Espaços de Sobolev	5
1.4 Algumas desigualdades	6
1.5 Semigrupos	7
1.6 Equações integrais de Volterra	9
1.6.1 Equações integrodiferencial	9
1.7 Convolução e outras relações binárias	10
2 Problema de Transmissão para a Equação da Viga	13
2.1 Introdução	13
2.1.1 Modelo de Kirchhoff	14
2.2 Existência de Solução	17
2.3 Decaimento Exponencial	24
3 Problema de Transmissão para a Equação de Von kármán	27
3.1 Introdução	27
3.2 Existência de Soluções	30
3.3 Decaimento Exponencial	38
4 Problema de Transmissão para uma Equação de Placas Termoelástica do tipo Hiperbólico	42

4.1	Introdução	42
4.2	Existência de Solução	46
4.3	Decaimento Exponencial	53
5	Instabilidade Exponencial e Decaimento Polinomial para Placas Elásticas	64
5.1	Introdução	64
5.2	Existência de Solução	66
5.3	Instabilidade Exponencial	67
5.4	Decaimento Polinomial	68
5.5	Aplicação	70
	Referências bibliográficas	71

Introdução

Neste trabalho estudamos os modelos de equações para vigas e placas para materiais mistos, isto é, estudamos as propriedades de um corpo constituído por dois tipos de materiais nos quais introduzimos mecanismos dissipativos na fronteira ou em algum dos materiais que compõem o corpo. A principal dificuldade neste problemas é lidar com as condições de fronteira na interface, as quais são de terceira ordem. Para superar isto, usamos algumas estimativas de control e introduzimos multiplicadores adequados para minimizar os problemas com os termos de fronteira e da interface.

O objetivo deste trabalho é estudar:

1.- A existência e regularidade de solução para alguns modelos de placas e vigas, para isto usaremos o método de Galerkin e técnicas de semigrupo.

2.- Mostrar que os efeitos dissipativos introduzidos no modelo são o suficientemente fortes para estabilizar exponencialmente o sistema.

No primeiro capítulo estudamos o problema de transmissão para uma equação de viga com dissipação na fronteira. Mostramos a existência de solução usando o método de Galerkin e argumentos de compacidade, em seguida provamos que a energia associada ao sistema decai exponencialmente. Para isto usamos o método da energia.

No segundo capítulo estudamos o problema de materiais mistos para uma equação do tipo Von Kármán com dissipação na fronteira. As técnicas usadas para obter a existência de solução e decaimento exponencial da energia seguem ideias dos trabalhos de Lagnese [13]. No terceiro capítulo, estudamos o problema de transmissão para placas Termoelásticas, regida pela lei de Gurtin e Pipkin. Para mostrar a existência de solução usamos o método de Galerkin e argumentos de compacidade, em seguida provamos que a energia associada ao sistema decai exponencialmente. O interessante deste problema é que o sistema não é dissipativo, nem conservativo, é denominado problema de dissipação indefinida. Portanto o método da energia que é baseado nas propriedades dissipativas não pode usado diretamente; é necessário modificar este método atendendo as propriedades de positividade do núcleo. Nestas condições mostraremos que se o núcleo é definido fortemente positivo e decai

exponencialmente então a solução também decai exponencialmente.

Finalmente, no quarto capítulo estudamos a existência, unicidade e comportamento assintótico do problema abstrato $u_{tt} + Au_{tt} + A^2u + A^\alpha u_t = 0$. Mostraremos que $\forall \alpha \in [0, 1[$ a energia associada a este problema decai polinomialmente mais não exponencialmente. Para isto usamos um resultado devido a Prüss que caracteriza as propriedades espectrais de seu gerador infinitesimal

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste Capítulo faremos algumas definições e apresentaremos resultados básicos e notações que serão utilizados ao longo deste trabalho.

1.1 Espaços Funcionais

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado, com fronteira Γ bem regular e seja p um número real tal que $1 \leq p \leq \infty$.

Para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ e por D^α representamos o operador derivação de ordem $|\alpha|$, definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Quando $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ definimos $D^0 u = u$. Denotemos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções de classe C^∞ em Ω , com suporte compacto contido em Ω .

Por $\mathcal{D}(\Omega)$ denotaremos o espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido a seguinte noção de convergência:

Uma sequência $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se:

- (i) $Supp(\varphi_n - \varphi) \subset K, \forall n$ onde K é um compacto fixo de Ω ,
- (ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ a sequência $\{D^\alpha(\varphi_n - \varphi)\}_{n \in \mathbb{N}}$, converge uniformemente para zero em K .

Toda forma linear e contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$ é denominada uma distribuição sobre Ω . O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$ e é chamado espaço das distribuições sobre Ω .

Denotamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, u \text{ mensurável, e } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty\}$$

Definimos sobre estes espaços as normas

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|, \text{ se } p = \infty.$$

é simples verificar que o espaço L^p munido as normas definidas acima é um espaço completo. Em particular, se $p = 2$, temos o espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$, com o produto interno definido por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Sejam $m > 0$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, é definido por

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) ; D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall 0 \leq |\alpha| \leq m \right\},$$

onde $D^\alpha u$ é o operador derivação de ordem α . Este espaço munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach.

Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Para $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert que denotamos por $H^m(\Omega)$, cuja norma e produto estão definidas por:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx,$$

e

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx.$$

Quando $m = 0$, $H^0(\Omega)$ é identificado com $L^2(\Omega)$. Representaremos por $H_0^m(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ será representado por $H^{-m}(\Omega)$. Identificando o espaço $L^2(\Omega)$ com o seu dual resulta que:

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \cong (L^2(\Omega))' \subset H^{-m}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega),$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, sendo que todas as inclusões são contínuas e densas, veja [4].

Dado um espaço de Banach X e um real positivo T , representaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das funções $u : (0, T) \rightarrow X$ que são mensuráveis e, tais que $\|u(t)\|_X \in L^p(0, T)$. Definimos em $L^p(0, T; X)$, a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Temos que $L^p(0, T; X)$, $1 < p < \infty$, é reflexivo se X é reflexivo e seu dual topológico é representado por $L^{p'}(0, T; X')$, sendo X' o dual de X e p' o conjugado de p . Se X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representaremos o espaço de Banach formado pelas funções $u : (0, T) \rightarrow X$ mensuráveis e essencialmente limitadas, isto é,

$$\sup_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_X < \infty,$$

munido da norma

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_X.$$

Representaremos por $\mathcal{D}'(0, T; X)$ o espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$, com valores em X . Dada uma distribuição vetorial $u \in \mathcal{D}'(0, T; X)$, definimos a derivada, no sentido das distribuições, de ordem m de u como sendo a distribuição $\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = u^{(m)}$, dada por

$$\langle u^{(m)}, \varphi \rangle = (-1)^m \langle u, \varphi^{(m)} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Se $u \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, então associa-se a u a distribuição T_u definida por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(s) \varphi(s) ds, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T)$$

onde a integral é entendida como uma integral de Bochner em X , desta forma $T_u \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ e T_u está univocamente definida por u , e assim identifica-se u com T_u , e neste sentido, temos

$$L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'(0, T; X).$$

1.2 Resultados Básicos

Lema 1.2.1 *Se $u \in L^1(0, T; X)$, onde X um espaço de Banach real, e $\int_0^T u(t)\theta(t)dt = 0$, para todo $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$, então $u(t) = 0$ quase sempre em $(0, T)$.*

Demonstração: veja [4].

Lema 1.2.2 *Sejam V, H espaços de Hilbert, tais que $V \hookrightarrow H$ (imersão contínua). Se $u \in L^p(0, T; V)$ e $u' \in L^p(0, T; V')$, $1 \leq p < \infty$, $T > 0$, então, $u \in C^0([0, T]; H)$.*

Demonstração: veja [19].

Definição 1.2.1 A função $u : [0, T] \rightarrow V$ é denominada fracamente contínua, se a função escalar $t \rightarrow \langle u(t), w \rangle_{V \times V'}$ é contínua em $[0, T]$ para todo $w \in V'$. Representa-se por $C_s([0, T]; V)$ o espaço das funções de $[0, T]$ em V que são fracamente contínuas em $[0, T]$.

Lema 1.2.3 Sejam V e H dois espaços de Banach tais que $V \hookrightarrow H$ e V denso em H . Se V é reflexivo, então $L^\infty(0, T; V) \cap C_s([0, T]; H) = C_s([0, T]; V)$.

Demonstração. veja Lions-Magenes [19].

Lema 1.2.4 Se $u, w \in L^2(0, T; V)$, $u', w' \in L^2(0, T; V')$, $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ com imersões contínuas e densas, então vale a seguinte igualdade

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), w(t) \rangle_H = \langle u'(t), w(t) \rangle_{V' \times V} + \langle u(t), w'(t) \rangle_{V' \times V}.$$

Demonstração: veja [35].

Lema 1.2.5 Seja $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ uma sequência de funções de $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$. Suponha que $\|u_m\|_q \leq C$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e $u_m \rightarrow u$ quase sempre em Ω . Então tem-se

(i) $u_m \rightarrow u$ forte em $L^p(\Omega)$, $\forall 1 \leq p < q$,

(ii) $u_m \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(\Omega)$.

Demonstração: veja [25].

Lema 1.2.6 (Lions-Aubin) Considere-se B_o, B, B_1 espaços de Banach, B_o e B_1 reflexivos, $B_o \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ com imersões contínuas e $B_o \hookrightarrow B$ com imersão compacta. Seja

$$W[0, T] = \left\{ u \in L^{p_o}(0, T; B_o), u' \in L^{p_1}(0, T; B_1) \right\},$$

onde $1 < p_o, p_1 < \infty$, com a norma definida por

$$\|u\|_{W[0, T]} = \|u\|_{L^{p_o}(0, T; B_o)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}.$$

Então, $W[0, T]$ é um espaço de Banach reflexivo e imerso compactamente em $L^{p_o}(0, T; B)$.

Demonstração: veja [18].

1.3 Espaços de Sobolev

Lema 1.3.1 *Seja Ω um conjunto aberto limitado do \mathbb{R}^n , com fronteira de classe C^1 , limitada. Sejam $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$. Então, temos as seguintes imersões contínuas:*

$$(i) \text{ Se } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p, q^*] \text{ onde } \frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n},$$

$$(ii) \text{ Se } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p, +\infty[,$$

$$(iii) \text{ Se } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) .$$

Neste caso, também temos

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega}),$$

onde $m - \frac{n}{p}$ não é um inteiro e $k = \left\lfloor m - \frac{n}{p} \right\rfloor$, desde que $\partial\Omega$ seja de classe C^m .

Demonstração: veja [4].

Lema 1.3.2 *Seja Ω um conjunto aberto e limitado do \mathbb{R}^n , de classe C^1 . Então as seguintes imersões são compactas:*

$$(i) \text{ Se } p < n \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, q^*[\text{ onde } \frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

$$(ii) \text{ Se } p = n \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty[,$$

$$(iii) \text{ Se } p > n \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}).$$

Demonstração: veja [4].

Lema 1.3.3 (Traço) *Seja Ω um conjunto aberto e limitado do \mathbb{R}^n , com fronteira Γ bem regular então :*

(i) A aplicação traço definido por

$$\begin{aligned} \gamma : H^m(\Omega) &\rightarrow \prod_{i=0}^{m-1} H^{m-i-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma(u) = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u) \end{aligned}$$

é linear, contínua e sobrejetiva com núcleo $H_0^m(\Omega)$

(ii) Além disso, a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : L^2(0, T; H^m(\Omega)) &\rightarrow L^2(0, T; \prod_{i=0}^{m-1} H^{m-i-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \\ u &\mapsto \gamma(u) \end{aligned}$$

onde $(\gamma u)(t) = \gamma(u(t))$, com $\gamma(u(t))$ sendo a aplicação traço do item (i), verifica-se também que esta segunda aplicação é linear, contínua e sobrejetiva com núcleo $L^2(0, T; H_0^m(\Omega))$. Esta aplicação também é denominada de aplicação traço para as funções de $L^2(0, T; H^m(\Omega))$.

Demonstração: veja [19].

1.4 Algumas desigualdades

Lema 1.4.1 (Poincaré) *Seja Ω um aberto, limitado numa direção do \mathbb{R}^n . Então existe uma constante positiva C tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega)]^n} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

onde C só depende de Ω . Em particular, $\|\nabla u\|_{[L^2(\Omega)]^n}$ é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ equivalente com a norma de $H^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 \right)^{1/2}.$$

Demonstração: veja [4].

Lema 1.4.2 (Young) *Consideremos $a, b \geq 0$ e $1 < p, q < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Então

$$ab \leq \epsilon^p \frac{a^p}{p} + \frac{1}{\epsilon^q} \frac{b^q}{q}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Demonstração: veja [4].

Lema 1.4.3 (Desigualdade de Gronwall) *Seja $\varphi \in L^\infty(0, T)$, $m \in L^1(0, T)$, $m(t) > 0$, $\varphi(t) \geq 0$ e $K \geq 0$ constante. Se $\varphi(t) \leq K + \int_0^t m(s)\varphi(s)ds$, $\forall t \in [0, T]$, então*

$$\varphi(t) \leq K e^{\int_0^t m(s)ds}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Demonstração: veja [5].

Lema 1.4.4 (Desigualdade de Holder) *Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e tem-se*

$$\int_{\Omega} |uv| dt \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)},$$

onde $1 < p, q < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. No caso em que $p = 2$, a desigualdade de Holder é conhecida como desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Demonstração: veja [4].

1.5 Semigrupos

Seja X um espaço de Banach e seja X^* seu dual. Denotaremos o valor de $x^* \in X^*$ calculado em $x \in X$ por $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$. Para todo $x \in X$ definimos o conjunto $F(x) \subset X^*$ por

$$F(x) = \{x^* \in X^*; \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

Do teorema de Hahn-Banach segue que $F(x) \neq \emptyset, \forall x \in X$.

Definição 1.5.1 *Um operador linear A é dito Dissipativo se para todo $x \in D(A)$, existe um $x^* \in F(x)$ tal que $\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.*

Definição 1.5.2 *Uma família $\{S(t)\}_{t=0}^{+\infty}$ de operadores lineares limitados em um espaço de Banach X (i.e. $S(t) : X \rightarrow X$), é dito um semigrupo fortemente contínuo (semigrupo \mathcal{C}_0) se:*

(i) $S(0) = I$, (I é operador identidade em X).

(ii) $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$.

(iii) Para cada $x \in X$, $S(t)x$ é contínua em $t, \forall t \geq 0$.

O operador linear A definido como

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \quad \forall x \in D(A)$$

é o gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)$, e $D(A)$ é domínio de A .

Teorema 1.5.1 (Hille-Yosida) *Um operador linear (não limitado) A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $S(t)$, $t \geq 0$ se e somente se*

(i) A é fechado e $D(A) = X$.

(ii) O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém \mathbb{R}^+ e para todo $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Demonstração: veja [22].

Teorema 1.5.2 (*Lumer-Phillips*) *Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ denso em X .*

- (i) *Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem de $\lambda_0 I - A$ é todo o espaço X (i.e. $R(\lambda_0 I - A) = X$), então A é gerador infinitesimal de um semigrupo e classe \mathcal{C}_0 de contrações em X .*
- (ii) *Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe \mathcal{C}_0 de contrações em X , então $R(\lambda I - A) = X$, $\forall \lambda > 0$ e A é dissipativo.*

Demonstração: veja [22].

Corollary 1.5.1 *Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ denso num espaço de Hilbert H . Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, então A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe \mathcal{C}_0 de contrações em H .*

Demonstração: veja [20].

Definição 1.5.3 *O semigrupo $S(t)$ é dito exponencialmente estável se existem constantes positivas α e $M \geq 1$ tais que:*

$$\|S(t)\| \leq M e^{-\alpha t}$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma do espaço $\mathcal{L}(H, H)$.

Teorema 1.5.3 *Seja $S(t)$ um semigrupo de classe \mathcal{C}_0 definido em um espaço de Hilbert H . Então $S(t)$ é exponencialmente estável se e somente se*

- (i) $\sup\{\operatorname{Re}\lambda, \forall \lambda \in \sigma(A)\} < 0$,
- (ii) $\sup\{\|(\lambda I - A)^{-1}\|; \operatorname{Re}\lambda \geq 0\} < \infty$

Demonstração: veja [20].

Teorema 1.5.4 *Seja $S(t)$ um semigrupo de classe \mathcal{C}_0 de contrações definido num espaço de Hilbert H . Então $S(t)$ é exponencialmente estável se e somente se*

- (i) $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$
- (ii) $\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty$

Demonstração: veja [20].

1.6 Equações integrais de Volterra

Dado as funções $k(t, s)$ e $g(t)$, a equação integral de Volterra consiste em achar $f(t)$ o qual satisfaz a seguinte equação:

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s)f(s)ds \quad (1.1)$$

O seguinte teorema estabelece a existência e unicidade da equação (1.1).

Teorema 1.6.1 *Seja $g(t)$ e $k(t, s)$ são funções contínuas em $0 \leq s \leq t \leq T$, então existe uma única função contínua $f(t)$ em $0 \leq t \leq T$ satisfazendo a equação (1.1)*

Demonstração: veja Linz [21].

Este mesmo resultado pode-se estender a sistemas de equações fazendo apenas algumas mudanças de notações usuais de vetores e matrizes. Consideremos o seguinte sistema:

$$F(t) = G(t) + \int_0^t K(t, s)F(s)ds \quad (1.2)$$

onde:

$$F(t) = (f_i(t))_{n \times 1}, \quad G(t) = (g_i(t))_{n \times 1} \quad e \quad K(t, s)F(s) = \left(\sum_{i,j=1}^n k_{ij}(t, s)f_j(s) \right)_{n \times n}$$

denotaremos $\|\cdot\|$ a normas dadas por

$$\|F(t)\| = \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(t)| \quad e \quad \|K(t, s)\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |k_{ij}(t, s)|.$$

Com estas notações temos:

Teorema 1.6.2 *Seja $G(t)$ e $K(t, s)$ são funções contínuas em $0 \leq s \leq t \leq T$, então existe uma única função contínua $F(t)$ em $0 \leq t \leq T$ satisfazendo a equação (1.2)*

Demonstração: veja Linz [21].

1.6.1 Equações integrodiferencial

Consideremos o sistema integrodiferencial

$$\begin{cases} F'(t) + AF(t) + \int_0^t K(t, s)F(s)ds = 0 \\ F(0) = F_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

onde A é uma matriz inversível e $K(t, s)$ é uma função contínua em $0 \leq t \leq T$. Introduzimos a seguinte substituição:

$$Z(t) = F'(t)$$

assim o sistema (1.3) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} G(t) = H(t) + \int_0^t \tilde{K}(t, s)G(s)ds \\ G(0) = G_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

onde:

$$G(t) = \begin{pmatrix} Z(t) \\ F(t) \end{pmatrix}, \quad H(t) = \begin{pmatrix} -AF(t) \\ F(0) \end{pmatrix}, \quad \tilde{K}(t, s)G(s) = \begin{pmatrix} -K(t, s)F(t) \\ Z(s) \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema 1.6.2 temos que o sistema (1.4) tem uma única solução contínua $F(t)$ e $Z(t)$, portanto o sistema (1.3) admite uma solução.

1.7 Convolução e outras relações binárias

Apresentaremos algumas propriedades de núcleos que serão usados no capítulo 3. Consideremos as seguintes relações binárias

$$(k * u)(t) = \int_0^t k(t-s)u(s)ds$$

Para facilitar os cálculos introduziremos o operador binário \diamond definido por:

$$k \diamond u = \int_0^t k(t-\tau) \int_{\Omega} |u(x, t) - u(x, \tau)|^2 dx d\tau$$

note que o sinal e $k \diamond u$ depende, apenas do sinal de k .

Lema 1.7.1 *Para qualquer $u \in \mathcal{C}^1([0, T]; H^1(\Omega))$ temos*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (k * \nabla u) \cdot \nabla u_t dx &= -\frac{1}{2}k(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}(k' \diamond \nabla u) - \\ &- \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ k \diamond \nabla u - \int_0^t k(\tau) d\tau \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right\} \end{aligned}$$

Demonstração: Da derivada com respeito a t da função $(k \diamond \nabla u)$, temos:

$$\frac{d}{dt}(k \diamond \nabla u) = (k' \diamond \nabla u) + \int_0^t k(\tau) d\tau \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right\} - 2 \int_{\Omega} (k * \nabla u) \cdot \nabla u_t dx$$

logo, daí segue nosso resultado.

Definição 1.7.1 *Seja $k \in L^1_{loc}[0, \infty)$. Então $k(t)$ é dito núcleo definido positivo se*

$$\int_0^t u(s) \int_0^s k(s-\tau)u(\tau)d\tau ds \geq 0, \quad t \geq 0$$

para todo $u \in C[0, \infty)$. Além disso, $k(t)$ é chamado núcleo definido fortemente positivo se existe uma constante $\beta > 0$ tal que a função $t \mapsto k(t) - \beta e^{-t}$ é definido positivo.

Observação 1.7.1 *Todo núcleo definido fortemente positivo é um nucleo definido positivo.*

Os núcleos definidos fortemente positivo são caracterizados através do seguinte Lema.

Lema 1.7.2 *Seja $k \in L^1(0, \infty)$. Então $k(t)$ é definido fortemente positivo se e somente se existe uma constante $\delta > 0$ tal que*

$$\operatorname{Re} \tilde{k}(i\xi) \geq \frac{\delta}{1 + \xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Sendo $\tilde{k}(\lambda)$ a transformada de Laplace de $k(t)$:

$$\tilde{k}(\lambda) = \int_0^\infty k(t)e^{-\lambda t} dt, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0$$

Demonstração: veja Renardy [23]

A noção acima pode ser generalizada para espaços de Hilbert. Sejam $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\|\cdot\|$ produto interno e norma de um espaço de Hilbert H .

Definição 1.7.2 *Seja $k \in L^1_{loc}[0, \infty)$. Então $k(t)$ é dito núcleo definido positivo se*

$$\int_0^t \langle u(s), \int_0^s k(s-\tau)u(\tau)d\tau \rangle ds \geq 0, \quad t \geq 0$$

para todo $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, H)$. Além disso, $k(t)$ é chamado núcleo definido fortemente positivo se existe uma constante $\beta > 0$ tal que a função $t \mapsto k(t) - \beta e^{-t}$ é definido positivo.

A seguir apresentaremos duas estimativas os quais jogam um papel importante no decaimento exponencial.

Lema 1.7.3 *Seja k uma função contínua e um núcleo definido positivo. Então,*

$$\left\| \int_0^t k(t-s)u(s)ds \right\|^2 \leq 2k(0) \int_0^t \langle u(s), \int_0^s k(s-\tau)u(\tau)d\tau \rangle ds$$

para todo $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, H)$.

Demonstração: veja Staffans [34].

Lema 1.7.4 *Sejam $k, k' \in L^1(\mathbb{R}^+)$ com, k um núcleo definido fortemente positivo. Então*

$$\int_0^t \left\| \int_0^s k(s-\tau)u(\tau)d\tau \right\|^2 ds \leq \frac{C_k}{\beta} \int_0^t \langle u(s), \int_0^s k(s-\tau)u(\tau)d\tau \rangle ds$$

para qualquer $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, H)$ onde $C_k = \|k\|_{L^1}^2 + 4\|k'\|_{L^1}^2$ e $\beta > 0$ é a constante dada na definição 3.1.1.

Capítulo 2

Problema de Transmissão para a Equação da Viga

Neste capítulo estudaremos a existência e decaimento exponencial da solução do problema de transmissão para a equação da viga, este problema consiste em determinar as oscilações de um corpo composto de dois materiais com diferentes densidades e coeficientes de elasticidade.

2.1 Introdução

Nesta seção, faremos uma breve dedução física do modelo para vigas que estudaremos neste capítulo. Esta exposição baseia-se no livro de Lagnese [13].

Consideremos uma placa elástica fina de espessura h . Representa-se por (x, y, z) ou (x_1, x_2, x_3) a posição inicial de um ponto P da placa o estado não-deformado. Suponha-se que a placa tem uma superfície media central entre as faces de equilibrio, ocupando uma região Ω do plano $z = 0$ os pontos desta superfície estão representados por P_o .

Denotemos por $(U_1(x, y, z, t), U_2(x, y, z, t), U_3(x, y, z, t))$ (respectivamente $(u_1(x, y, t), u_2(x, y, t), u_3(x, y, t))$) a posição do ponto P (respectivamente P_o) depois da deformação, transcorrido um tempo t .

Seja $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ o tensor de deformação e tensão respectivamente. A energia devido à tensão na placa é definido por

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dx dy dz \quad (2.1)$$

e a energia cinética \mathcal{K} definido por

$$\mathcal{K} = \frac{\rho}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega} \left| \frac{dU_i}{dt} \right|^2 dx dy dz \quad (2.2)$$

onde ρ representa a densidade da massa por unidade de volumem.

Os conceitos de tensão-deformação e a relação entre eles, são importantes para a dedução física de nosso sistema e esa relação depende muito do tipo de material da placa. Para placas homogêneas e isotrópicas a relação tensão-deformação é dada por:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \mu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right)$$

onde E é modulo de Young's e μ é raio de Poisson's (para situações físicas $0 < \mu < \frac{1}{2}$).

No estudo das vibrações para placas finas é costume assumir que a tensão normal transversal σ_{33} é insignificante (i.e. $\sigma_{33} = 0$) comparando com as outras tensões. Desta suposição temos:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}), & \sigma_{33} = 0 \\ \sigma_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}), & \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_{ij}, \quad (i \neq j) \end{cases} \quad (2.3)$$

2.1.1 Modelo de Kirchhoff

Para obter este modelo assumiremos:

(i) Deformação linear, dado pela seguinte relação:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

(ii) Os filamentos iniciais da placa não sofrem contração ni extensao e permanecem perpendiculares à placa intermediaria ante qualquer deformação.

A hipotesis (ii) impone uma relação não-linear entre os desplazamentos $\{U_i\}$ e $\{u_i\}$. Linearizando esta relação, obtemos:

$$\begin{cases} U_1 = u_1 - z \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ U_2 = u_2 - z \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ U_3 = u_3 \end{cases} \quad (2.5)$$

Usando (2.3), (2.4) e (2.5), temos que a energia devido à tensão pode-se expresar em termos de $\{u_i\}$. Se as integrações em z forem realizadas, nós encontramos que não há nenhum acoplamento na energia de tensão entre os componentes u_1, u_2 que representam no plano que se deforma e o componente u_3 relacionado à dobra. Denotemos por \mathcal{P}_b a parte da energia de tensão devido à dobra, o qual é dado por:

$$\mathcal{P}_b = \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (2.6)$$

onde $w = u_3$ e $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ representa o modulo da rigidez flexural. Analogamente substituindo (2.5) em (2.2) temos que a energia cinetica devido à dobra é dado por :

$$\mathcal{K}_b = \frac{\rho h}{2} \int_{\Omega} \left\{ |w'|^2 + \frac{h^2}{12} |\nabla w'|^2 \right\} dx dy \quad (2.7)$$

onde $' = d/dt$.

No caso unidimensional temos:

$$\mathcal{P}_b = \frac{D}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (2.8)$$

$$\mathcal{K}_b = \frac{\rho h}{2} \int_0^L \left\{ |w'|^2 + \frac{h^2}{12} |\nabla w'|^2 \right\} dx, \quad (2.9)$$

para simplificar nosso modelo, assumiremos que o extremo esquerdo esta preso, isto é, $w(0, t) = w_x(0, t) = 0$, logo nossa equação de movimento para w obtem-se fazendo zero a primeira variação de Lagrangiano

$$\int_0^T \left\{ \mathcal{K}_b - \mathcal{P}_b \right\} dt + \int_0^T m_1(t) w_t(L, t) dt$$

onde a primeira integral da direita representa o trabalho num intervalo de tempo $[0, T]$, obtido pela força resultante $m_1(t)$ aplicada no extremo direito da corda. Obtemdo dai a seguinte problema de valor fronteira para w :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho h w_{tt} - \frac{\rho h^3}{12} w_{xxtt} + D w_{xxxx} = 0, \quad \forall (x, t) \in]0, L[\times \mathbb{R}^+, \\ w(0, t) = w_x(0, t) = 0, \quad \forall t > 0, \\ \frac{\rho h^3}{12} w_{xtt} - D w_{xxx}(L, t) = m_1(t) \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Aqui estudaremos o problema de transmissão para o seguinte problema de viga, onde o modelo matemático que descreve esta situação é descrito por

$$\rho_1 u_{tt} + \alpha_1 u_{xxxx} = 0, \quad \text{sobre }]0, L_0[\times]0, \infty[\quad (2.11)$$

$$\rho_2 v_{tt} + \alpha_2 v_{xxxx} = 0, \quad \text{sobre }]L_0, L[\times]0, \infty[\quad (2.12)$$

Com as seguintes condições de fronteira

$$u(0, t) = u_x(0, t) = 0 \quad (2.13)$$

$$\alpha_2 v_{xx}(L, t) = 0 \quad (2.14)$$

$$\alpha_2 v_{xxx}(L, t) = \gamma v_t(L, t) \quad (2.15)$$

para todo $t > 0$. As condições de transmissão entre os materiais é dada por:

$$u(L_0, t) = v(L_0, t) \quad (2.16)$$

$$u_x(L_0, t) = v_x(L_0, t) \quad (2.17)$$

$$\alpha_1 u_{xx}(L_0, t) = \alpha_2 v_{xx}(L_0, t) \quad (2.18)$$

$$\alpha_1 u_{xxx}(L_0, t) = \alpha_2 v_{xxx}(L_0, t) \quad (2.19)$$

para todo $t > 0$. Finalmente, os dados iniciais:

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x) \quad \text{em }]0, L_0[\quad (2.20)$$

$$v(x, 0) = v^0(x), \quad v_t(x, 0) = v^1(x) \quad \text{em }]L_0, L[\quad (2.21)$$

as constantes $\rho_1, \rho_2, \alpha_1, \alpha_2$ e γ são positivas. A seguir introduzimos algumas notações e espaços funcionais que utilizaremos ao longo deste trabalho

$$\mathbb{H}^0 = L^2(0, L_0) \times L^2(L_0, L)$$

$$\mathbb{H}^2 = \{(\varphi, \psi) \in H^2(0, L_0) \times H^2(L_0, L); (\varphi, \psi) \text{ satisfazendo (2.22)}\}$$

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi_x(0) = 0 \\ \varphi(L_0) = \psi(L_0) \\ \varphi_x(L_0) = \psi_x(L_0) \end{cases} \quad (2.22)$$

Lema 2.1.1 *O espaço \mathbb{H}^2 munido do produto interno*

$$\langle (\varphi^1, \psi^1), (\varphi^2, \psi^2) \rangle_{\mathbb{H}^2} = \alpha_1 \int_0^{L_0} \varphi_{xx}^1 \varphi_{xx}^2 dx + \alpha_2 \int_{L_0}^L \psi_{xx}^1 \psi_{xx}^2 dx$$

é um espaço de Hilbert.

Demonstração: Primeiro demonstraremos que dito produto interno define uma norma em \mathbb{H}^2 . A maior dificuldade se apresenta em mostrar que:

$$\text{se } \|(\varphi, \psi)\|_{\mathbb{H}^2} = 0, \quad \text{então } \varphi = \psi = 0$$

com efeito: De $\|(\varphi, \psi)\|_{\mathbb{H}^2} = 0$, temos que φ, ψ é um polinômio de segundo grau, logo usando as condições de fronteira (2.22), temos que $\varphi = \psi = \text{const.}$ Logo pelo fato de $H^1(0, L_0) \hookrightarrow \mathcal{C}[0, L_0]$, e a condição de contorno em x igual a zero temos $\varphi = \psi = 0$.

Finalmente, para mostrar que o espaço \mathbb{H}^2 é completo, é suficiente mostrar que a norma usual do espaço $H^2(0, L_0) \times H^2(L_0, L)$ é equivalente a norma $\|(\cdot, \cdot)\|_{\mathbb{H}^2}$, isto é existem constantes positivas C_1, C_2 tais que:

$$C_1 \|(\varphi, \psi)\|_{\mathbb{H}^2} \leq \|(\varphi, \psi)\|_{H^2(0, L_0) \times H^2(L_0, L)} \leq C_2 \|(\varphi, \psi)\|_{\mathbb{H}^2}, \quad \forall (\varphi, \psi) \in \mathbb{H}^2$$

De fato, da definição das normas dos espaços \mathbb{H}^2 e $H^2(0, L_0) \times H^2(L_0, L)$, temos $C_1 = 1$, pois:

$$\|(\varphi, \psi)\|_{\mathbb{H}^2} \leq \|(\varphi, \psi)\|_{H^2(0, L_0) \times H^2(L_0, L)}, \quad \forall (\varphi, \psi) \in \mathbb{H}^2.$$

Para mostrar a outra desigualdade, nos usamos a desigualdade de Young obtendo daí as seguintes estimativas:

$$\int_0^{L_0} |\varphi|^2 dx + \int_{L_0}^L |\varphi_x|^2 dx \leq (L_0^2 + 1)L_0^2 \int_0^{L_0} |\varphi_{xx}|^2 dx,$$

$$\int_{L_0}^L |\psi|^2 dx + \int_L^{L_0} |\psi_x|^2 dx \leq 4(L - L_0)^2 C_0 \int_{L_0}^L |\psi_{xx}|^2 dx + 4L_0(L - L_0)^3 C_0 \int_0^{L_0} |\varphi_{xx}|^2 dx,$$

onde $C_0 = 1 + (L + L_0)^2$, completando daí a demonstração.

Outros espaços a usar são:

$$\mathbb{H}^4 = \mathbb{H}^2 \cap (H^4(0, L_0) \times H^4(L_0, L))$$

$$\mathbb{H}^{-2} = H^{-2}(0, L_0) \times H^{-2}(L_0, L).$$

A seguir denotemos por $E(t)$ a energia de primeira ordem associada ao sistema (2.11)-(2.21), como sendo

$$E(t) = E(t, u, v) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{L_0} \rho_1 |u_t|^2 + \alpha_1 |u_{xx}|^2 dx + \int_{L_0}^L \rho_2 |v_t|^2 + \alpha_2 |v_{xx}|^2 dx \right\}$$

Multiplicando as equações (2.11) e (2.12) por u_t e v_t respectivamente, integrando por partes em seus domínios, usando as condições de fronteira e de transmissão (2.13)-(2.19), obtém-se:

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\gamma |v_t(L, t)|^2 \tag{2.23}$$

de onde concluímos que existe perda de energia ao longo do processo.

2.2 Existência de Solução

Nesta seção demonstraremos a existência e unicidade das soluções fracas e fortes do sistema (2.11)-(2.21). No Teorema 2.2.1 demonstraremos a existência de soluções fracas e no Teorema 2.2.2, demonstraremos a existência de soluções fortes, utilizando para isto o Teorema 2.2.1.

Definição 2.2.1 Diremos que o par (u, v) é solução fraca do sistema (2.11)-(2.21) quando

$$(u, v) \in L^\infty(0, T; \mathbb{H}^2) \quad (u_t, v_t) \in L^\infty(0, T; \mathbb{H}^0)$$

e satisfaz:

$$\begin{aligned} & -\rho_1 \int_0^{L_0} u^1 \varphi(0) dx - \rho_2 \int_{L_0}^L v^1 \psi(0) dx - \rho_1 \int_0^T \int_0^{L_0} u_t \varphi_t dx dt - \rho_2 \int_0^T \int_{L_0}^L v_t \psi_t dx dt + \\ & + \alpha_1 \int_0^T \int_0^{L_0} u_{xx} \varphi_{xx} dx dt + \alpha_2 \int_0^T \int_{L_0}^L v_{xx} \psi_{xx} dx dt + \gamma \int_0^T v_t(L, t) \psi(L, t) dt = 0. \end{aligned}$$

para todo $(\varphi, \psi) \in L^\infty(0, T; \mathbb{H}^2)$, $(\varphi_t, \psi_t) \in L^\infty(0, T; \mathbb{H}^0)$ tais que $\varphi(x, T) = 0$ e $\psi(x, T) = 0$

Teorema 2.2.1 Se $(u^0, v^0) \in \mathbb{H}^2$ e $(u^1, v^1) \in \mathbb{H}^0$, então existe uma única solução fraca do sistema (2.11)-(2.21).

Demonstração: Utilizaremos o método de Galerkin, que consiste na construção de soluções aproximadas em espaços de dimensão finita, estimaremos as soluções aproximadas e finalmente, tomaremos o limite destas soluções quando a dimensão vai para o infinito.

Problema aproximado: Seja $(\varphi^i, \psi^i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma base de \mathbb{H}^2 e denotemos por

$$\mathbb{H}_m^2 = [(\varphi^1, \psi^1), (\varphi^2, \psi^2), \dots, (\varphi^m, \psi^m)]$$

o subespaço gerado pelos m-primeiros (φ^i, ψ^i) elementos da base de \mathbb{H}^2 . Como \mathbb{H}^2 é denso em \mathbb{H}^0 , então $(\varphi^i, \psi^i)_{i \in \mathbb{N}}$ também é uma base de \mathbb{H}^0 . O problema aproximado consiste em encontrar funções h_{im}

$$(u^m(t), v^m(t)) = \sum_{i=1}^m h_{im}(t) (\varphi^i, \psi^i) \in \mathbb{H}_m^2$$

satisfazendo,

$$\rho_1 \int_0^{L_0} u_{tt}^m \varphi^i dx + \rho_2 \int_{L_0}^L v_{tt}^m \psi^i dx + \alpha_1 \int_0^{L_0} u_{xx}^m \varphi_{xx}^i dx + \alpha_2 \int_{L_0}^L v_{xx}^m \psi_{xx}^i dx + \gamma v_t^m(L, t) \psi^i(L) = 0 \quad (2.24)$$

$$(u^m(0), v^m(0)) = (u^{0m}, v^{0m}) \rightarrow (u^0, v^0) \quad \text{forte em } \mathbb{H}^2 \quad (2.25)$$

$$(u_t^m(0), v_t^m(0)) = (u^{1m}, v^{1m}) \rightarrow (u^1, v^1) \quad \text{forte em } \mathbb{H}^0 \quad (2.26)$$

Denotemos por:

$$X(t) = (h_{im}(t))_{m \times 1}$$

$$A = (a_{ij})_{m \times m} \quad \text{onde} \quad a_{ij} = \rho_1 \int_0^{L_0} \varphi^i \varphi^j dx + \rho_2 \int_{L_0}^L \psi^i \psi^j dx$$

$$B = (b_{ij})_{m \times m} \quad \text{onde} \quad b_{ij} = \gamma \psi^i(L) \psi^j(L)$$

$$C = (c_{ij})_{m \times m} \quad \text{onde} \quad c_{ij} = \alpha_1 \int_0^{L_0} \varphi_{xx}^i \varphi_{xx}^j dx + \alpha_2 \int_{L_0}^L \psi_{xx}^i \psi_{xx}^j dx$$

Logo o sistema aproximado (2.24)-(2.26) pode ser escrito como um sistema de Equações Diferenciais Ordinarias da forma

$$AX''(t) + BX'(t) + CX(t) = 0$$

Como a matriz A é não singular então o sistema admite uma única solução. Portanto o sistema aproximado (2.24)-(2.26), possui uma única solução e pelo fato do sistema ser linear esta solução é global em $[0, T]$, $T > 0$.

Estimativa a priori : Multiplicando a equação (2.24) por $h'_{im}(t)$ e somando com respeito a $i = 1, 2, \dots, m$ obtém-se:

$$\frac{d}{dt} E_m(t) + \gamma |v_t^m(L, t)|^2 = 0$$

onde:

$$E_m(t) = E(t, u^m, v^m) = \frac{\rho_1}{2} \int_0^{L_0} |u_t^m|^2 dx + \frac{\alpha_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{xx}^m|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_{L_0}^L |v_t^m|^2 dx + \frac{\alpha_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{xx}^m|^2 dx.$$

Esto significa que o sistema aproximado se dissipa de forma análoga ao sistema contínuo em $[0, T]$. Integrando de 0 a $t \leq T$, temos

$$E_m(t) + \gamma \int_0^t |v_t^m(L, \tau)|^2 d\tau = E_m(0) \quad (2.27)$$

de (2.25) e (2.26) em (2.27), concluímos

$$E_m(t) + \gamma \int_0^t |v_t^m(L, \tau)|^2 d\tau \leq C \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.28)$$

Dai segue que:

$$E_m(\cdot) \quad \text{é limitado em} \quad L^\infty(0, T)$$

$$v_t^m(L, \cdot) \quad \text{é limitado em} \quad L_{loc}^2(0, T)$$

ou equivalentemente

$$(u^m, v^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; \mathbb{H}^2)$$

$$(u_t^m, v_t^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; \mathbb{H}^0)$$

$$v_t^m(L, \cdot) \text{ é limitado em } L^2_{loc}(0, T)$$

Passagem ao limite das soluções aproximadas: Das limitações acima concluímos que existe uma subsucessão $(u^r, v^r)_{r \in \mathbb{N}}$ de $(u^m, v^m)_{m \in \mathbb{N}}$, tal que:

$$(u^r, v^r) \xrightarrow{*} (u, v) \text{ em } L^\infty(0, T; \mathbb{H}^2) \quad (2.29)$$

$$(u_t^r, v_t^r) \xrightarrow{*} (f, g) \text{ em } L^\infty(0, T; \mathbb{H}^0) \quad (2.30)$$

$$v_t^r(L, \cdot) \rightharpoonup h \text{ em } L^2(0, T) \quad (2.31)$$

de (2.29) e (2.30), temos que $f = u_t$ e $g = v_t$. Mostraremos que $h = v_t(L)$.

com efeito: Das convergências (2.29)-(2.30) e do Lema de Lions-Aubin, temos:

$$v^r \rightarrow v \text{ em } L^2(0, T; H^1(L_0, L))$$

logo, do fato de $H^1(L_0, L) \hookrightarrow C([L_0, L])$, temos:

$$v^r(L, \cdot) \rightarrow v(L, \cdot) \text{ em } L^2(0, T)$$

dai

$$v_t^r(L, \cdot) \rightharpoonup v_t(L, \cdot) \text{ em } H^{-1}(0, T) \quad (2.32)$$

portanto, de (2.31) e (2.32), temos que $h = v_t(L)$.

Finalmente tomando limite ao problema aproximado e levando em consideração as convergências (2.29)-(2.31), temos que (u, v) é uma solução fraca do sistema (2.11)-(2.21).

UNICIDADE: Como o sistema é linear, então é suficiente mostrar que a função nula é a única solução do sistema:

$$\rho_1 u_{tt} + \alpha_1 u_{xxxx} = 0, \text{ sobre }]0, L_0[\times]0, \infty[$$

$$\rho_2 v_{tt} + \alpha_2 v_{xxxx} = 0, \text{ sobre }]L_0, L[\times]0, \infty[$$

satisfazendo as seguintes condições de fronteira

$$u(0, t) = u_x(0, t) = 0$$

$$\alpha_2 v_{xx}(L, t) = 0$$

$$\alpha_2 v_{xxx}(L, t) = \gamma v_t(L, t)$$

para todo $t > 0$ e satisfazendo as seguintes condições de transmissão

$$\begin{aligned} u(L_0, t) &= v(L_0, t) \\ u_x(L_0, t) &= v_x(L_0, t) \\ \alpha_1 u_{xx}(L_0, t) &= \alpha_2 v_{xx}(L_0, t) \\ \alpha_1 u_{xxx}(L_0, t) &= \alpha_2 v_{xxx}(L_0, t) \end{aligned}$$

para todo $t > 0$; e verificando os dados iniciais:

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0$$

Finalmente, a prova da unicidade é baseada na desigualdade da energia. Para obter esta desigualdade regularizamos a solução da seguinte forma $u^\epsilon = \rho_\epsilon * u$, $v^\epsilon = \rho_\epsilon * v$, onde $\{\rho_\epsilon\}$ é a seqüência de funções regularizantes onde $*$ denota a convolução no tempo, definido por:

$$(\rho_\epsilon * u)(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\epsilon(t-s)u(x, s)ds$$

então $(u^\epsilon, v^\epsilon) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{H}^2)$ e satisfaz o sistema:

$$\rho_1 u_{tt}^\epsilon + \alpha_1 u_{xxxx}^\epsilon = 0, \quad \text{sobre }]0, L_0[\times]0, \infty[\quad (2.33)$$

$$\rho_2 v_{tt}^\epsilon + \alpha_2 v_{xxxx}^\epsilon = 0, \quad \text{sobre }]L_0, L[\times]0, \infty[\quad (2.34)$$

com as seguintes condições de fronteira, e de transmissão

$$\begin{aligned} u^\epsilon(0, t) &= u_x^\epsilon(0, t) = 0 \\ \alpha_2 v_{xx}^\epsilon(L, t) &= 0 \\ \alpha_2 v_{xxx}^\epsilon(L, t) &= \gamma v_t^\epsilon(L, t) \\ u^\epsilon(L_0, t) &= v^\epsilon(L_0, t) \\ u_x^\epsilon(L_0, t) &= v_x^\epsilon(L_0, t) \\ \alpha_1 u_{xx}^\epsilon(L_0, t) &= \alpha_2 v_{xx}^\epsilon(L_0, t) \\ \alpha_1 u_{xxx}^\epsilon(L_0, t) &= \alpha_2 v_{xxx}^\epsilon(L_0, t) \end{aligned}$$

multiplicando as equações (2.33)-(2.34) por u_t^ϵ e v_t^ϵ respectivamente, e integrando por partes em seus respectivos domínios, obtemos:

$$E(t, u^\epsilon, v^\epsilon) \leq E(0, u^\epsilon, v^\epsilon)$$

logo, tomando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos:

$$E(t, u, v) \leq E(0, u, v)$$

como $E(0, u, v) = 0$, então $(u, v) = 0$. ■

A existência de soluções fortes é dado pelo seguinte Teorema:

Teorema 2.2.2 *Seja $(u^0, v^0) \in \mathbb{H}^4$ e $(u^1, v^1) \in \mathbb{H}^2$ satisfazendo as condições de compatibilidades:*

$$\begin{aligned}\alpha_1 u_{xx}^0(L_0) &= \alpha_2 v_{xx}^0(L_0) \\ \alpha_1 u_{xxx}^0(L_0) &= \alpha_2 v_{xxx}^0(L_0) \\ \alpha_2 v_{xxx}^0(L) &= \gamma v^1(L).\end{aligned}$$

Então existe uma única solução forte do sistema (2.11)-(2.21) satisfazendo:

$$(u, v) \in C^0([0, +\infty[; \mathbb{H}^4) \cap C^1([0, +\infty[; \mathbb{H}^2) \cap C^2([0, +\infty[; \mathbb{H}^0).$$

Demonstração: Escolhemos $\{(\varphi^i, \psi^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma base de \mathbb{H}^4 tal que

$$(u^0, v^0), (u^1, v^1) \in \{(\varphi^i, \psi^i)\}_{i \in \mathbb{N}}.$$

Como \mathbb{H}^4 é denso em \mathbb{H}^2 , o conjunto $\{(\varphi^i, \psi^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ é também uma base de \mathbb{H}^2 . Denotemos por $\mathbb{H}_m^4 = [(\varphi^1, \psi^1), (\varphi^2, \psi^2), \dots, (\varphi^m, \psi^m)]$. Procuramos $(u^m(t), v^m(t)) \in \mathbb{H}_m^4$ satisfazendo (2.24) e

$$(u^m(0), v^m(0)) = (u^{0m}, v^{0m}) \rightarrow (u^0, v^0) \quad \text{forte em } \mathbb{H}^4 \quad (2.35)$$

$$(u_t^m(0), v_t^m(0)) = (u^{1m}, v^{1m}) \rightarrow (u^1, v^1) \quad \text{forte em } \mathbb{H}^2 \quad (2.36)$$

O problema (2.24), (2.35) e (2.36), tem solução para cada $m \in \mathbb{N}$, e como já foi verificado na demonstração do Teorema 2.2.1, as soluções aproximadas $(u^m(t), v^m(t))$ estão definidas em $[0, T]$ e satisfazem a estimativa (2.28) o que permite obter uma subsucessão $\{(u^r(t), v^r(t))\}$ de $\{(u^m(t), v^m(t))\}$ satisfazendo as convergências (2.29), (2.30) e (2.31), as quais são suficientes para a passagem ao limite e a verificação dos dados iniciais.

Precisamos de uma outra estimativa para mostrar a existência de solução forte. Para isto derivamos a equação aproximada (2.24) com respeito a t e multiplicamos cada termo por $h_{im}''(t)$. Somando com respeito a i , temos

$$\frac{d}{dt} E_m(t, u_t^m, v_t^m) = -\gamma |v_{tt}^m(L, t)|^2$$

integrando de 0 a $t \leq T$, chegamos a:

$$E_m(t, u_t^m, v_t^m) \leq E_m(0, u_t^m, v_t^m) \quad (2.37)$$

onde

$$E(0, u_t^m, v_t^m) = \frac{\rho_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{tt}^{0m}|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{tt}^{0m}|^2 dx + \frac{\alpha_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{xx}^{1m}|^2 dx + \frac{\alpha_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{xx}^{1m}|^2 dx. \quad (2.38)$$

Devido às convergências dos dados iniciais em (2.36), temos

$$\frac{\alpha_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{xx}^{1m}|^2 dx + \frac{\alpha_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{xx}^{1m}|^2 dx \leq C_1. \quad (2.39)$$

Por outro lado, considerando $t = 0$ no problema aproximado (2.24), integrando por partes, multiplicando por $h_{im}''(0)$ somando em $i = 1$ até $i = m$ e aplicando a desigualdade de Young, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{tt}^{0m}|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{tt}^{0m}|^2 dx &\leq [\alpha_2 v_{xx}^{0m}(L_0) - \alpha_1 u_{xx}^{0m}(L_0)] u_{tt}^m(L_0, 0) + \\ &+ [\alpha_1 u_{xxx}^{0m}(L_0) - \alpha_2 v_{xxx}^{0m}(L_0)] u_{tt}^m(L_0, 0) + \\ &+ [\alpha_2 v_{xxx}^{0m}(L) - \gamma v^{1m}(L)] v_{tt}^m(L, 0) + \\ &+ \frac{\alpha_1^2}{2\rho_1} \int_0^{L_0} |u_{xxxx}^{0m}|^2 dx + \frac{\alpha_2^2}{2\rho_2} \int_{L_0}^L |v_{xxxx}^{0m}|^2 dx. \end{aligned}$$

dai, das condições de compatibilidade e de (2.35), temos:

$$\frac{\rho_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{tt}^{0m}|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{tt}^{0m}|^2 dx \leq C_2. \quad (2.40)$$

de (2.39) e (2.40) em (2.38) obtemos:

$$E_m(0, u_t^m, v_t^m) \leq C_3 \quad \forall m.$$

Logo, na desigualdade (2.37), temos

$$E_m(t, u_t^m, v_t^m) \leq C_3 \quad \forall m, \quad \forall t \in [0, T]$$

Portanto

$$(u_{tt}^m, v_{tt}^m) \quad \text{é limitado em} \quad L^\infty(0, T; \mathbb{H}^0)$$

$$(u_t^m, v_t^m) \quad \text{é limitado em} \quad L^\infty(0, T; \mathbb{H}^2)$$

Finalmente de (1.1)-(1.2), temos

$$\alpha_1 u_{xxxx} = -\rho_1 u_{tt}$$

$$\alpha_2 v_{xxxx} = -\rho_2 v_{tt}$$

de onde concluímos que:

$$(u_{xxxx}, v_{xxxx}) \in C^0([0, +\infty[; \mathbb{H}^0)$$

usando o Teorema de derivadas intermediarias, concluímos:

$$(u, v) \in C^0([0, +\infty[; \mathbb{H}^4).$$

2.3 Decaimento Exponencial

O decaimento das soluções nos problemas de transmissão dependem de uma apropriada relação entre os coeficientes, i.e., $\rho_1 \leq \rho_2$ e $\alpha_1 > \alpha_2$, como mostramos no seguinte Teorema. Caso contrário teremos termos de fronteira que não podem ser limitados pela energia de primeira ordem.

Teorema 2.3.1 *Seja (u, v) a solução forte do sistema (2.11)-(2.21). Suponhamos que*

$$\rho_1 \leq \rho_2 \quad e \quad \alpha_1 > \alpha_2 \quad (2.41)$$

Então existem constantes positivas C e μ , satisfazendo:

$$E(t, u, v) \leq CE(0, u, v)e^{-\mu t}$$

Demonstração: Para mostrar o decaimento exponencial da energia, primeiro introduzimos o seguinte funcional:

$$R(t) = \rho_1 \int_0^{L_0} xu_t u_x dx + \rho_2 \int_{L_0}^L xv_t v_x dx.$$

Multiplicando as equações (2.11)-(2.12) por xu_x e xv_x respectivamente, integrando por partes em seus respectivos dominios, usando as condições de fronteira e de transmissão, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R(t) &= \frac{L_0(\rho_1 - \rho_2)}{2} |u_t(L_0, t)|^2 + \frac{\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1)L_0}{2\alpha_2} |u_{xx}(L_0, t)|^2 + \\ &+ \frac{\rho_2 L}{2} |v_t(L, t)|^2 - \alpha_2 L v_x(L, t) v_{xxx}(L, t) - E(t). \end{aligned} \quad (2.42)$$

logo, de (2.41) e (2.42) segue que,

$$\frac{d}{dt}R(t) \leq \frac{\rho_2 L}{2} |v_t(L, t)|^2 - \gamma L v_x(L, t) v_t(L, t) - E(t).$$

Da desigualdade de Young, obtemos que,

$$\frac{d}{dt}R(t) \leq \frac{(1 + \epsilon_0)\rho_2 L}{2} |v_t(L, t)|^2 + \frac{\gamma^2 L}{2\rho_2 \epsilon_0} |v_x(L, t)|^2 - E(t). \quad (2.43)$$

Observação 2.3.1 *Dados (u, v) solução forte de (1.1)-(1.11), obtém-se a seguinte estimativa:*

$$|v_x(L, t)|^2 \leq 2(L - L_0) \int_{L_0}^L |v_{xx}|^2 dx + 2L_0 \int_0^{L_0} |u_{xx}|^2 dx$$

Com efeito: Usando argumentos de densidade, é suficiente mostrar esta desigualdade para funções $u, v \in \mathcal{C}^2$ verificando as condições (2.22). Por outro lado, usando a desigualdade de Young, temos:

$$|v_x(L, t)|^2 \leq 2(L - L_0) \int_{L_0}^L |v_{xx}|^2 dx + 2|u_x(L_0, t)|^2.$$

Da desigualdade de Poincaré e do fato de $H^1(0, L_0) \hookrightarrow \mathcal{C}[0, L_0]$, temos:

$$|u_x(L_0, t)|^2 \leq L_0 \int_0^{L_0} |u_{xx}|^2 dx$$

destas duas últimas desigualdades concluímos nossa demonstração.

Da observação 2.3.1 e da equação (2.43) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R(t) \leq & \frac{(1 + \epsilon_0)\rho_2 L}{2} |v_t(L, t)|^2 - \frac{\rho_1}{2} \int_0^{L_0} |u_t|^2 dx - \frac{\rho_2}{2} \int_{L_0}^0 |v_t|^2 dx - \\ & - \left(1 - \frac{2LL_0\gamma^2}{\rho_2\alpha_1\epsilon_0}\right) \frac{\alpha_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{xx}|^2 dx - \left(1 - \frac{2L(L-L_0)\gamma^2}{\rho_2\alpha_2\epsilon_0}\right) \frac{\alpha_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{xx}|^2 dx, \end{aligned}$$

escolhemos ϵ_0 de forma que $1 - \frac{2LL_0\gamma^2}{\rho_2\alpha_1\epsilon_0} > 0$ e $1 - \frac{2L(L-L_0)\gamma^2}{\rho_2\alpha_2\epsilon_0} > 0$, isto é,

$$\epsilon_0 > \max\left\{\frac{2LL_0\gamma^2}{\rho_2\alpha_1}, \frac{2L(L-L_0)\gamma^2}{\rho_2\alpha_2}\right\},$$

concluimos portanto que existem constantes c_1 e c_2 , tais que:

$$\frac{d}{dt}R(t) \leq c_1 |v_t(L, t)|^2 - c_2 E(t) \tag{2.44}$$

onde:

$$c_1 = \frac{(1 + \epsilon_0)\rho_2 L}{2}, \quad c_2 = \min\left\{1, 1 - \frac{2LL_0\gamma^2}{\rho_2\alpha_1\epsilon_0}, 1 - \frac{2L(L-L_0)\gamma^2}{\rho_2\alpha_2\epsilon_0}\right\}.$$

Dado $\epsilon > 0$, denotemos por E_ϵ o funcional

$$E_\epsilon(t) = E(t) + \epsilon R(t)$$

calculando a derivada

$$\frac{d}{dt}E_\epsilon(t) \leq -(\gamma - \epsilon c_1) |v_t(L, t)|^2 - \epsilon c_2 E(t)$$

escolhemos $\epsilon > 0$, de forma que $\gamma - \epsilon c_1 > 0$, isto é, $0 < \epsilon < \frac{\gamma}{c_1}$, obtendo assim a seguinte desigualdade:

$$\frac{d}{dt}E_\epsilon(t) \leq -\epsilon c_2 E(t)$$

Usando a desigualdade de Young temos que $R(t)$ satisfaz: $|R(t)| \leq cE(t)$ para alguma constante $c > 0$; isto é

$$c = \max\left\{L, \frac{2L\rho_2(L-L_0)^2}{\alpha_2}, \frac{LL_0(L_0\rho_1 + 2\rho_2(L-L_0))}{\alpha_1}\right\}.$$

Dai conclui-se que:

$$(1 - \epsilon c)E(t) \leq E_\epsilon(t) \leq (1 + \epsilon c)E(t)$$

aqui escolhemos $\epsilon > 0$, tal que $1 - \epsilon c > 0$, isto é, $\epsilon < \frac{1}{c}$. Portanto existem constantes positivas c_3 e c_4 , tais que:

$$c_3 E(t) \leq E_\epsilon(t) \leq c_4 E(t) \tag{2.45}$$

onde $c_3 = 1 - \epsilon c$ e $c_4 = 1 + \epsilon c$. De onde segue que

$$\frac{d}{dt} E_\epsilon(t) \leq -\frac{\epsilon c_2}{1 + c\epsilon} E_\epsilon(t),$$

que implica o decaimento exponencial para $E_\epsilon(t)$. Usando a desigualdade (2.45) concluimos que, o decaimento de $E(t)$ é também valido.

Capítulo 3

Problema de Transmissão para a Equação de Von kármán

Neste capítulo mostraremos a existência e regularidade das soluções do modelo unidimensional das equações de Von Kármán para vigas constituídas de dois tipos de materiais. Suponhamos neste capítulo, que uma parte da fronteira da viga esta em contato com um médio viscoso que produz um efeito dissipativo, enquanto que a outra parte do borde esta pressa. Mostraremos que nesta situação a dissipação atuante numa parte do borde do material composto é suficiente para estabilizar exponencialmente toda a viga.

3.1 Introdução

O modelo das equações de Von Kármán para vigas descrevem as deflexões de uma viga, causadas por uma força axial. Varios autores têm estudado o problema de existência, unicidade e comportamento assintótico (quando são introduzidos mecanismos dissipativos), por exemplo veja Lagnese [13], Puel-Tucsnak [31], Bisognin-Menzala-Zuazua [3] e Rivera-Menzala [28],[29].

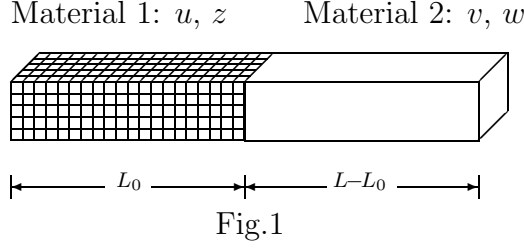
Em um recente trabalho, Lagnese-Leugering [14] considera uma versão unidimensional do sistema de equações de Von kármán. Sistema que descreve o movimento planar de uma viga prismática uniforme de comprimento L . O modelo que estuda as oscilações desta viga é descrito como:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \beta u_{xxtt} + \alpha u_{xxxx} - \gamma[(z_x + \frac{1}{2}|u_x|^2)u_x]_x = 0, & \forall(x, t) \in]0, L[\times \mathbb{R}^+ \\ \delta z_{tt} - \gamma(z_x + \frac{1}{2}|u_x|^2)_x = 0, & \forall(x, t) \in]0, L[\times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $u = u(x, t)$ e $z = z(x, t)$ descrevem os deslocamentos vertical e horizontal da viga, respectivamente. O termo βu_{xxtt} representa a inercia rotacional.

Consideraremos nesta seção uma viga constituídas de dois materiais diferentes um destes

materiais está em contato com um médio que produz um mecanismo dissipativo na fronteira, enquanto que a outra componente não produz dissipação da energia.



O modelo unidimensional das equações de Von Kármán para vigas constituídas por dois tipos de materiais diferentes (veja Fig.1) é dado por:

$$\rho_1 u_{tt} - \beta_1 u_{xxtt} + \alpha_1 u_{xxxx} - \gamma_1 \left[\left(z_x + \frac{1}{2} |u_x|^2 \right) u_x \right]_x = 0, \quad \text{sobre }]0, L_0[\times]0, \infty[\quad (3.2)$$

$$\delta_1 z_{tt} - \gamma_1 \left(z_x + \frac{1}{2} |u_x|^2 \right)_x = 0, \quad \text{sobre }]0, L_0[\times]0, \infty[\quad (3.3)$$

$$\rho_2 v_{tt} - \beta_2 v_{xxtt} + \alpha_2 v_{xxxx} - \gamma_2 \left[\left(w_x + \frac{1}{2} |v_x|^2 \right) v_x \right]_x = 0, \quad \text{sobre }]L_0, L[\times]0, \infty[\quad (3.4)$$

$$\delta_2 w_{tt} - \gamma_2 \left(w_x + \frac{1}{2} |v_x|^2 \right)_x = 0, \quad \text{sobre }]L_0, L[\times]0, \infty[\quad (3.5)$$

Este problema é chamado de problema de transmissão. Para que este problema esté definido unívocamente necesitamos prescrever as condições de contorno e de transmissão entre os materiais. As condições de contorno são:

$$u(0, t) = u_x(0, t) = 0 \quad (3.6)$$

$$\alpha_2 v_{xx}(L, t) = -\theta v_{xt}(L, t) \quad (3.7)$$

$$\alpha_2 v_{xxx}(L, t) - \gamma_2 \left[w_x(L, t) + \frac{1}{2} |v_x(L, t)|^2 \right] v_x(L, t) - \beta_2 v_{xtt}(L, t) = \theta v_t(L, t) \quad (3.8)$$

$$z(0, t) = 0, \quad \gamma_2 \left[w_x(L, t) + \frac{1}{2} |v_x(L, t)|^2 \right] = -\theta w_t(L, t) \quad (3.9)$$

para todo $t > 0$ e as condições de transmissão estão dadas por:

$$u(L_0, t) = v(L_0, t) \quad (3.10)$$

$$u_x(L_0, t) = v_x(L_0, t) \quad (3.11)$$

$$\alpha_1 u_{xx}(L_0, t) = \alpha_2 v_{xx}(L_0, t) \quad (3.12)$$

$$\alpha_1 u_{xxx}(L_0, t) - \beta_1 u_{xtt}(L_0, t) = \alpha_2 v_{xxx}(L_0, t) - \beta_2 v_{xtt}(L_0, t) \quad (3.13)$$

$$z(L_0, t) = w(L_0, t) \quad (3.14)$$

$$\gamma_1(z_x(L_0, t) + \frac{1}{2}|u_x(L_0, t)|^2) = \gamma_2(w_x(L_0, t) + \frac{1}{2}|v_x(L_0, t)|^2) \quad (3.15)$$

para todo $t > 0$; e dados iniciais:

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x) \quad \text{em }]0, L_0[\quad (3.16)$$

$$z(x, 0) = z^0(x), \quad z_t(x, 0) = z^1(x) \quad \text{em }]0, L_0[\quad (3.17)$$

$$v(x, 0) = v^0(x), \quad v_t(x, 0) = v^1(x) \quad \text{em }]L_0, L[\quad (3.18)$$

$$w(x, 0) = w^0(x), \quad w_t(x, 0) = w^1(x) \quad \text{em }]L_0, L[. \quad (3.19)$$

as constantes $\rho_1, \rho_2, \beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2, \gamma_1, \gamma_2$ e θ são positivas.

A seguir introduzimos algumas notações e espaços que serão utilizados nas seções seguintes:

$$\mathbb{H}^0 = L^2(0, L_0) \times L^2(L_0, L)$$

$$\mathbb{H}^1 = H^1(0, L_0) \times H^1(L_0, L)$$

$$\mathbb{U} = \{(\xi, \phi) \in H^1(0, L_0) \times H^1(L_0, L); \quad \text{satisfazendo} \quad (3.20)\}$$

$$\begin{cases} \xi(0) = 0 \\ \xi(L_0) = \phi(L_0) \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\mathbb{V} = \{(\varphi, \psi) \in H^2(0, L_0) \times H^2(L_0, L); \quad \text{satisfazendo} \quad (3.21)\}$$

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi_x(0) = 0 \\ \varphi(L_0) = \psi(L_0) \\ \varphi_x(L_0) = \psi_x(L_0) \end{cases} \quad (3.21)$$

Lema 3.1.1 *O espaço \mathbb{U} munido do produto interno*

$$\langle (\xi^1, \phi^1), (\xi^2, \phi^2) \rangle_{\mathbb{U}} = \int_0^{L_0} [\rho_1 \xi^1 \xi^2 + \beta_1 \xi_x^1 \xi_x^2] dx + \int_{L_0}^L [\rho_2 \phi^1 \phi^2 + \beta_2 \phi_x^1 \phi_x^2] dx$$

é um espaço de Hilbert.

Lema 3.1.2 *\mathbb{V} munido do produto interno*

$$\langle (\varphi^1, \psi^1), (\varphi^2, \psi^2) \rangle_{\mathbb{V}} = \alpha_1 \int_0^{L_0} \varphi_{xx}^1 \varphi_{xx}^2 dx + \alpha_2 \int_{L_0}^L \psi_{xx}^1 \psi_{xx}^2 dx$$

é um espaço de Hilbert.

Denotemos por $E(t)$ a energia associada ao sistema (3.2)-(3.19), como sendo

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{\rho_1}{2} \int_0^{L_0} |u_t|^2 dx + \frac{\beta_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{xt}|^2 dx + \frac{\alpha_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{xx}|^2 dx + \frac{\delta_1}{2} \int_0^{L_0} |z_t|^2 dx + \\ & + \frac{\gamma_1}{2} \int_0^{L_0} (z_x + \frac{1}{2}|u_x|^2)^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_{L_0}^L |v_t|^2 dx + \frac{\beta_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{xt}|^2 dx + \frac{\alpha_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{xx}|^2 dx + \end{aligned}$$

$$+\frac{\delta_2}{2} \int_{L_0}^L |w_t|^2 dx + \frac{\gamma_2}{2} \int_{L_0}^L (w_x + \frac{1}{2}|v_x|^2)^2 dx$$

Multiplicando as equações (3.2),(3.3),(3.4) e (3.5) por u_t, z_t, v_t e w_t respectivamente, integrando por partes em seus domínios, usando as condições de fronteira e de transmissão (3.6)-(3.15), obtém-se:

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\theta \left\{ |v_t(L, t)|^2 + |w_t(L, t)|^2 + |v_{xt}(L, t)|^2 \right\} \quad (3.22)$$

de onde concluímos que a energia $E(t)$ é decrescente.

3.2 Existência de Soluções

Nesta seção demonstraremos a existência de soluções fracas e fortes do sistema (3.2)-(3.19). Nosso primeiro passo é definir o que entenderemos como solução fraca.

Definição 3.2.1 Diremos que (u, z, v, w) é uma solução fraca do sistema (3.2)-(3.19) quando

$$\begin{aligned} (u, v) &\in L^\infty(0, T; \mathbb{V}) & (u_t, v_t) &\in L^\infty(0, T; \mathbb{H}^1) \\ (z, w) &\in L^\infty(0, T; \mathbb{U}) & (z_t, w_t) &\in L^\infty(0, T; \mathbb{H}^0) \end{aligned}$$

e satisfaz:

$$\begin{aligned} &-\rho_1 \int_0^{L_0} u^1 \varphi(0) dx - \rho_2 \int_{L_0}^L v^1 \psi(0) dx - \rho_1 \int_0^T \int_0^{L_0} u_t \varphi_t dx dt - \rho_2 \int_0^T \int_{L_0}^L v_t \psi_t dx dt + \\ &-\beta_1 \int_0^{L_0} u_x^1 \varphi_x(0) dx - \beta_2 \int_{L_0}^L v_x^1 \psi_x(0) dx - \beta_1 \int_0^T \int_0^{L_0} u_{xt} \varphi_{xt} dx dt - \beta_2 \int_0^T \int_{L_0}^L v_{xt} \psi_{xt} dx dt + \\ &+\alpha_1 \int_0^T \int_0^{L_0} u_{xx} \varphi_{xx} dx dt + \alpha_2 \int_0^T \int_{L_0}^L v_{xx} \psi_{xx} dx dt + \gamma_1 \int_0^T \int_0^{L_0} (z_x + \frac{1}{2}|u_x|^2) u_x \varphi_x dx dt + \\ &+\gamma_2 \int_0^T \int_{L_0}^L (w_x + \frac{1}{2}|v_x|^2) w_x \psi_x dx dt + \theta \int_0^T v_{xt}(L, t) \psi_x(L, t) dt + \theta \int_0^T v_t(L, t) \psi(L, t) dt = 0. \\ &-\delta_1 \int_0^{L_0} z^1 \rho(0) dx - \delta_2 \int_{L_0}^L w^1 \phi(0) dx - \delta_1 \int_0^T \int_0^{L_0} z_t \rho_t dx dt - \delta_2 \int_0^T \int_{L_0}^L w_t \phi_t dx dt + \\ &+\gamma_1 \int_0^T \int_0^{L_0} (z_x + \frac{1}{2}|u_x|^2) \rho_x + \gamma_2 \int_0^T \int_{L_0}^L (w_x + \frac{1}{2}|v_x|^2) \phi_x dx dt + \\ &+\theta \int_0^T w_t(L, t) \phi(L) dt = 0. \end{aligned}$$

para todo $(\varphi, \psi) \in L^\infty(0, T; \mathbb{V})$, $(\varphi_t, \psi_t) \in L^\infty(0, T; \mathbb{H}^1)$, $(\rho, \phi) \in L^\infty(0, T; \mathbb{U})$ e $(\rho_t, \phi_t) \in L^\infty(0, T; \mathbb{H}^0)$ com $\varphi(T) = \varphi_x(T) = \psi(T) = \psi_x(T) = \rho(T) = \phi(T) = 0$

Teorema 3.2.1 Se $(u^0, v^0) \in \mathbb{V}$, $(u^1, v^1) \in \mathbb{H}^1$ e $(z^0, w^0) \in \mathbb{U}$, $(z^1, w^1) \in \mathbb{H}^0$, então existe uma única solução fraca do sistema (3.2)-(3.19).

Demonstração: Utilizaremos o método de Galerkin, para formular o problema aproximado. **Problema aproximado:** Sejam $(\varphi^i, \psi^i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $(\xi^i, \phi^i)_{i \in \mathbb{N}}$ bases, de \mathbb{V} e \mathbb{U} , respectivamente.

Consideremos para cada $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{V}_m = [(\varphi^1, \psi^1), (\varphi^2, \psi^2), \dots, (\varphi^m, \psi^m)]$$

$$\mathbb{U}_m = [(\xi^1, \phi^1), (\xi^2, \phi^2), \dots, (\xi^m, \phi^m)]$$

subespaços gerados pelos vetores $(\varphi^1, \psi^1), \dots, (\varphi^m, \psi^m)$ e $(\xi^1, \phi^1), \dots, (\xi^m, \phi^m)$ de \mathbb{V} e \mathbb{U} respectivamente. Procuramos funções $a_{im}, b_{im} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, de tal forma que as funções (u^m, v^m) e (z^m, w^m) dadas como

$$(u^m(t), v^m(t)) = \sum_{i=1}^m a_{im}(t)(\varphi^i, \psi^i) \quad (z^m(t), w^m(t)) = \sum_{i=1}^m b_{im}(t)(\xi^i, \phi^i)$$

sejam soluções do sistema (3.2)-(3.19).

As funções $a_{im}(t)$, $b_{im}(t)$ são determinados pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias que denominaremos de problema aproximado:

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_0^{L_0} u_{tt}^m \varphi^i dx + \beta_1 \int_0^{L_0} u_{xtt}^m \varphi_x^i dx + \alpha_1 \int_0^{L_0} u_{xx}^m \varphi_{xx}^i dx + \\ & + \gamma_1 \int_0^{L_0} (z_x^m + \frac{1}{2}|u_x^m|^2) u_x^m \varphi_x^i dx + \rho_2 \int_{L_0}^L v_{tt}^m \psi^i dx + \beta_2 \int_{L_0}^L v_{xtt}^m \psi_x^i dx + \\ & + \alpha_2 \int_{L_0}^L v_{xx}^m \psi_{xx}^i dx + \gamma_2 \int_{L_0}^L (w_x^m + \frac{1}{2}|v_x^m|^2) v_x^m \psi_x^i dx + \theta v_t^m(L, t) \psi^i(L) + \\ & + \theta v_{xt}^m(L, t) \psi_x^i(L) = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} & \delta_1 \int_0^{L_0} z_{tt}^m \xi^i dx + \gamma_1 \int_0^{L_0} (z_x^m + \frac{1}{2}|u_x^m|^2) \xi_x^i dx + \delta_2 \int_{L_0}^L w_{tt}^m \phi^i dx + \\ & + \gamma_2 \int_{L_0}^L (w_x^m + \frac{1}{2}|v_x^m|^2) \phi_x^i dx + \theta w_t^m(L, t) \phi^i(L) = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Com as condições iniciais:

$$\begin{cases} a_{im}(0) = a_i, & b_{im}(0) = b_i \\ \frac{d}{dt} a_{im}(0) = c_i, & \frac{d}{dt} b_{im}(0) = d_i. \end{cases}$$

sendo

$$\begin{cases} (u^0, v^0) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\varphi^i, \psi^i), & (z^0, w^0) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(\xi^i, \phi^i) \\ (u^1, v^1) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\varphi^i, \psi^i), & (z^1, w^1) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(\xi^i, \phi^i) \end{cases}$$

de onde definimos

$$\begin{cases} (u^m(0), v^m(0)) = \sum_{i=1}^m a_i(\varphi^i, \psi^i), & (z^m(0), w^m(0)) = \sum_{i=1}^m b_i(\xi^i, \phi^i) \\ (u_t^m(0), v_t^m(0)) = \sum_{i=1}^m c_i(\varphi^i, \psi^i), & (z_t^m(0), w_t^m(0)) = \sum_{i=1}^m d_i(\xi^i, \phi^i) \end{cases}$$

então

$$(u^m(0), v^m(0)) \rightarrow (u^0, v^0) \quad \text{forte em } \mathbb{V} \quad (3.25)$$

$$(u_t^m(0), v_t^m(0)) \rightarrow (u^1, v^1) \quad \text{forte em } \mathbb{H}^1 \quad (3.26)$$

$$(z^m(0), w^m(0)) \rightarrow (z^0, w^0) \quad \text{forte em } \mathbb{U} \quad (3.27)$$

$$(z_t^m(0), w_t^m(0)) \rightarrow (z^1, w^1) \quad \text{forte em } \mathbb{H}^0 \quad (3.28)$$

Substituindo $(u^m(t), v^m(t))$ e $(z^m(t), w^m(t))$, nas equações (3.23) e (3.24), respectivamente, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} AX''(t) + BX'(t) + CX(t) + D = 0 \\ PY''(t) + QY'(t) + RY(t) + S = 0 \\ X(0) = X_0, \quad Y(0) = Y_0 \\ X'(0) = X_1, \quad Y'(0) = Y_1 \end{cases}$$

onde:

$$X(t) = (a_{im}(t))_{m \times 1}, \quad Y(t) = (b_{im}(t))_{m \times 1},$$

$$A = (a_{ij})_{m \times m} \quad \text{onde} \quad a_{ij} = \langle (\varphi^i, \psi^i), (\varphi^j, \psi^j) \rangle_{\mathbb{U}},$$

$$B = (b_{ij})_{m \times m} \quad \text{onde} \quad b_{ij} = \theta \psi^i(L) \psi^j(L) + \theta \psi_x^i(L) \psi_x^j(L),$$

$$C = (c_{ij})_{m \times m} \quad \text{onde} \quad c_{ij} = \langle (\varphi^1, \psi^1), (\varphi^2, \psi^2) \rangle_{\mathbb{V}},$$

$$D = (d_{ij})_{m \times 1}, \text{ onde } d_{i1} = \gamma_1 \int_0^{L_0} \left[\sum_{k=1}^m b_{km}(t) \xi_x^k + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^m a_{km}(t) \varphi_x^k \right)^2 \right] \sum_{k=1}^m a_{km}(t) \varphi_x^k \varphi_x^i dx + \\ + \gamma_2 \int_{L_0}^L \left[\sum_{k=1}^m b_{km}(t) \phi_x^k + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^m a_{km}(t) \psi_x^k \right)^2 \right] \sum_{k=1}^m a_{km}(t) \psi_x^k \psi_x^i dx,$$

$$P = (p_{ij})_{m \times m} \quad \text{onde} \quad p_{ij} = \rho_1 \int_0^{L_0} \xi^i \xi^j dx + \rho_2 \int_{L_0}^L \phi^i \phi^j dx,$$

$$Q = (q_{ij})_{m \times m} \quad \text{onde} \quad q_{ij} = \theta \phi^i(L) \phi^j(L),$$

$$R = (r_{ij})_{m \times m} \quad \text{onde} \quad r_{ij} = \gamma_1 \int_0^{L_0} \xi_x^i \xi_x^j dx + \gamma_2 \int_{L_0}^L \phi_x^i \phi_x^j dx,$$

$$S = (s_{ij})_{m \times 1}, \text{ onde } s_{i1} = \frac{\gamma_1}{2} \int_0^{L_0} \left(\sum_{k=1}^m a_{km}(t) \varphi_x^k \right)^2 \xi_x^i dx + \frac{\gamma_2}{2} \int_{L_0}^L \left(\sum_{k=1}^m a_{km}(t) \psi_x^k \right)^2 \phi_x^i dx.$$

Como a matriz A e P são não singulares então o sistema pode-se reescrever da seguinte forma:

$$X''(t) + A^{-1}BX'(t) + A^{-1}CX(t) = -A^{-1}D \equiv F(t, X(t), Y(t))$$

$$Y''(t) + P^{-1}QY'(t) + P^{-1}RY(t) = -P^{-1}S \equiv G(t, X(t), Y(t)).$$

Como $F(t, X, Y)$ $G(t, X, Y)$ são funções localmente de Lipchitz, dito sistema admite uma unica solução local no intervalo $[0, t_m[$ com $t_m \leq T$. Portanto o sistema aproximado (3.23)-(3.28), possui solução única no intervalo $[0, t_m[$.

Estimativa a priori A estimativa a seguir nos permitirá prolongar a solução do problema (3.23)-(3.28) a todo o intervalo $[0, T]$. Multiplicando as equações (3.23) e (3.24), por $a'_{im}(t)$ e $b'_{im}(t)$ respectivamente, somando com respeito a $i = 1, 2, \dots, m$, obtemos:

$$\frac{d}{dt} E_m(t) + \theta \left\{ |v_t^m(L, t)|^2 + |v_{xt}(L, t)|^2 + |w_t(L, t)|^2 \right\} = 0$$

onde:

$$E_m(t) = \frac{\rho_1}{2} \int_0^{L_0} |u_t^m|^2 dx + \frac{\beta_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{xt}^m|^2 dx + \frac{\alpha_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{xx}^m|^2 dx + \frac{\delta_1}{2} \int_0^{L_0} |z_t^m|^2 dx + \\ + \frac{\gamma_1}{2} \int_0^{L_0} (z_x^m + \frac{1}{2}|u_x^m|^2)^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_{L_0}^L |v_t^m|^2 dx + \frac{\beta_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{xt}^m|^2 dx + \frac{\alpha_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{xx}^m|^2 dx + \\ + \frac{\delta_2}{2} \int_{L_0}^L |w_t^m|^2 dx + \frac{\gamma_2}{2} \int_{L_0}^L (w_x^m + \frac{1}{2}|v_x^m|^2)^2 dx$$

integrando de 0 a $t < t_m$, temos:

$$E_m(t) + \theta \int_0^t (|v_t^m(L, \tau)|^2 + |v_{xt}^m(L, \tau)|^2 + |w_t^m(L, \tau)|^2) d\tau = E_m(0) \quad (3.29)$$

de (3.25)-(3.28) em (3.29), conclui-se que:

$$E_m(t) + \theta \int_0^t (|v_t^m(L, \tau)|^2 + |v_{xt}^m(L, \tau)|^2 + |w_t^m(L, \tau)|^2) d\tau \leq C \quad \forall t \in [0, t_m[\quad (3.30)$$

onde C é uma constante independente de m e de t , portanto obtém-se assim a extensão da solução $(u^m(t), v^m(t))$ e $(z^m(t), w^m(t))$ ao intervalo $[0, T]$.

Podemos assim falar na solução aproximada $(u^m(t), v^m(t))$ e $(z^m(t), w^m(t))$ em todo o intervalo $[0, T]$, e tal solução ainda satisfaz (3.30), em $[0, T]$. Concluimos daí, que:

$$E_m(\cdot) \quad \text{é limitado em} \quad L^\infty(0, T)$$

$$v_t^m(L, \cdot) \quad \text{é limitado em} \quad L^2(0, T)$$

$$v_{xt}^m(L, \cdot) \quad \text{é limitado em} \quad L^2(0, T)$$

$$w_t^m(L, \cdot) \quad \text{é limitado em} \quad L^2(0, T)$$

ou equivalentemente:

$$(u^m, v^m) \quad \text{é limitado em} \quad L^\infty(0, T; \mathbb{V})$$

$$(u_t^m, v_t^m) \quad \text{é limitado em} \quad L^\infty(0, T; \mathbb{H}^1)$$

$$(z^m, w^m) \quad \text{é limitado em} \quad L^\infty(0, T; \mathbb{U})$$

$$(z_t^m, w_t^m) \quad \text{é limitado em} \quad L^\infty(0, T; \mathbb{H}^0)$$

$$(z_x^m + \frac{1}{2}|u_x^m|^2) \quad \text{é limitado em} \quad L^\infty(0, T; L^2(0, L_0))$$

$$(w_x^m + \frac{1}{2}|v_x^m|^2) \quad \text{é limitado em} \quad L^\infty(0, T; L^2(L_0, L))$$

$$v_t^m(L, \cdot) \quad \text{é limitado em} \quad L^2(0, T)$$

$$v_{xt}^m(L, \cdot) \quad \text{é limitado em} \quad L^2(0, T)$$

$$w_t^m(L, \cdot) \quad \text{é limitado em} \quad L^2(0, T).$$

Das limitações acima deduz-se que existe uma subsucessão $(u^r, z^r, v^r, w^r)_{r \in \mathbb{N}}$ de $(u^m, z^m, v^m, w^m)_{m \in \mathbb{N}}$, tal que:

$$(u^r, v^r) \xrightarrow{*} (u, v) \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; \mathbb{V}) \quad (3.31)$$

$$(u_t^r, v_t^r) \xrightarrow{*} (u_t, v_t) \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; \mathbb{H}^1) \quad (3.32)$$

$$(z^r, w^r) \xrightarrow{*} (z, w) \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; \mathbb{U}) \quad (3.33)$$

$$(z_t^r, w_t^r) \xrightarrow{*} (z_t, w_t) \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; \mathbb{H}^0) \quad (3.34)$$

$$(z_x^r + \frac{1}{2}|u_x^r|^2) \xrightarrow{*} (z_x + \frac{1}{2}|u_x|^2) \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; L^2(0, L_0)) \quad (3.35)$$

$$(w_x^r + \frac{1}{2}|v_x^r|^2) \xrightarrow{*} (w_x + \frac{1}{2}|v_x|^2) \quad \text{em } L^\infty(0, T; L^2(L_0, L)) \quad (3.36)$$

$$v_t^r(L, \cdot) \rightharpoonup v_t(L, \cdot) \quad \text{em } L^2(0, T) \quad (3.37)$$

$$v_{xt}^r(L, \cdot) \rightharpoonup v_t(L, \cdot) \quad \text{em } L^2(0, T) \quad (3.38)$$

$$w_t^r(L, \cdot) \rightharpoonup w_t(L, \cdot) \quad \text{em } L^2(0, T). \quad (3.39)$$

Nestas condições temos que as funções (u, v) e (z, w) definidas como o limite das sequências (u^m, v^m) e (z^m, w^m) são soluções fracas do sistema (3.2) – (3.19). ■

Para estudar a existência da solução forte, introduzimos os seguintes espaços

$$\mathbb{U}^2 = \mathbb{U} \cap H^2(0, L_0) \times H^2(L_0, L)$$

$$\mathbb{V}^4 = \mathbb{V} \cap H^4(0, L_0) \times H^4(L_0, L)$$

os quais satisfazem as seguintes relações:

$$\mathbb{U}^2 \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{H}^0$$

$$\mathbb{V}^4 \subset \mathbb{V} \subset \mathbb{H}^1$$

Teorema 3.2.2 *Tomemos os dados iniciais $(u^0, v^0) \in \mathbb{V}^4$, $(u^1, v^1) \in \mathbb{V}$ e $(z^0, w^0) \in \mathbb{U}^2$, $(z^1, w^1) \in \mathbb{U}$ satisfazendo as seguintes condições de compatibilidade :*

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_{xx}^0(L_0) &= \alpha_2 v_{xx}^0(L_0) \\ \alpha_1 u_{xxx}^0(L_0) &= \alpha_2 v_{xxx}^0(L_0) \\ \gamma_1(z_x^0(L_0) + \frac{1}{2}|u_x^0(L_0)|^2) &= \gamma_2(w_x^0(L_0) + \frac{1}{2}|v_x^0(L_0)|^2) \\ \alpha_2 v_{xx}^0(L) &= -\theta v_x^1(L) \\ \alpha_2 v_{xxx}^0(L) &= \theta v^1(L) \\ \gamma_2(w_x^0(L) + \frac{1}{2}|v_x^0(L)|^2) &= -\theta w^1(L). \end{aligned}$$

Então a solução do problema (3.2)-(3.19), satisfaz

$$(u, v) \in C([0, \infty[, \mathbb{V}^4) \cap C^1([0, \infty[, \mathbb{V}) \cap C^2([0, \infty[, \mathbb{H}^1)$$

$$(z, w) \in C([0, \infty[, \mathbb{U}^2) \cap C^1([0, \infty[, \mathbb{U}) \cap C^2([0, \infty[, \mathbb{H}^0)$$

Demonstração: Consideremos $\{(\varphi^i, \psi^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{(\xi^i, \phi^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ duas bases correspondentes aos espaços \mathbb{V}^4 e \mathbb{U}^2 , respectivamente, tal que

$$(u^0, v^0), (u^1, v^1) \in \{(\varphi^i, \psi^i)\}_{i \in \mathbb{N}}, \quad (z^0, w^0), (z^1, w^1) \in \{(\xi^i, \phi^i)\}_{i \in \mathbb{N}}.$$

Como \mathbb{V}^4 é denso em \mathbb{V} e \mathbb{U}^2 é denso em \mathbb{U} então $\{(\varphi^i, \psi^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{(\xi^i, \phi^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ são também duas bases de Galerkin correspondentes aos espaços \mathbb{V} e \mathbb{U} , respectivamente. Definimos

$$\mathbb{V}_m^4 = [(\varphi^1, \psi^1), (\varphi^2, \psi^2), \dots, (\varphi^m, \psi^m)],$$

$$\mathbb{U}_m^2 = [(\xi^1, \phi^1), (\xi^2, \phi^2), \dots, (\xi^m, \phi^m)],$$

isto é, os espaços gerados pelos m-primeros vetores entre corchetes. Estes são subespaços de \mathbb{V}^4 e \mathbb{U}^2 , respectivamente.

Agora, procuramos $(u^m(t), v^m(t)) \in \mathbb{V}_m^4$ e $(z^m(t), w^m(t)) \in \mathbb{U}_m^2$ satisfazendo (3.23)-(3.24) e a seguintes convergencias

$$(u^m(0), v^m(0)) = (u^{0m}, v^{0m}) \rightarrow (u^0, v^0) \quad \text{forte em } \mathbb{V}^4 \quad (3.40)$$

$$(u_t^m(0), v_t^m(0)) = (u^{1m}, v^{1m}) \rightarrow (u^1, v^1) \quad \text{forte em } \mathbb{V} \quad (3.41)$$

$$(z^m(0), w^m(0)) = (z^{0m}, w^{0m}) \rightarrow (z^0, w^0) \quad \text{forte em } \mathbb{U}^2 \quad (3.42)$$

$$(z_t^m(0), w_t^m(0)) = (z^{1m}, w^{1m}) \rightarrow (z^1, w^1) \quad \text{forte em } \mathbb{U} \quad (3.43)$$

O problema (3.23),(3.24) com os dados (3.40)-(3.43), tem solução para cada $m \in \mathbb{N}$, e como já foi verificado na demonstração do Teorema 3.2.1, as soluções aproximadas $(u^m(t), v^m(t))$ e $(z^m(t), w^m(t))$ estão definidas em $[0, T]$ e satisfazem a estimativa (3.30) a qual permite que se obtenha uma subsucessão $\{(u^r(t), v^r(t))\}$ de $\{(u^m(t), v^m(t))\}$ e $\{(z^r(t), w^r(t))\}$ de $\{(z^m(t), w^m(t))\}$ satisfazendo as convergências (3.31)-(3.39), as quais são suficientes para a passagem ao limite e a verificação dos dados iniciais.

Precissamos de uma outra estimativa para obter a regularidade adicional da solução, para isto derivamos as equações aproximadas (3.23) e (3.24) com respeito a t e multiplicamos cada equação por $a''_{im}(t)$ e b''_{im} respectivamente, logo somamos com respeito a i , obtendo assim:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_m^2(t) &= \gamma_1 \int_0^{L_0} (z_{xt}^m + u_x^m u_{xt}^m) |u_{xt}^m|^2 dx + \gamma_2 \int_{L_0}^L (w_{xt}^m + v_x^m v_{xt}^m) |v_{xt}^m|^2 dx - \\ &- \frac{\gamma_1}{2} \int_0^{L_0} (z_x^m + \frac{1}{2} |u_x^m|^2) \frac{d}{dt} |u_{xt}^m|^2 dx - \frac{\gamma_2}{2} \int_{L_0}^L (w_x^m + \frac{1}{2} |v_x^m|^2) \frac{d}{dt} |v_{xt}^m|^2 dx \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde:

$$E_m^2(t) \equiv E_m^2(t, u_t^m, v_t^m, z_t^m, w_t^m) = \frac{\rho_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{tt}^m|^2 dx + \frac{\beta_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{xtt}^m|^2 dx + \frac{\alpha_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{xxt}^m|^2 dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma_1}{2} \int_0^{L_0} |z_{xt}^m + u_x^m u_{xt}^m|^2 dx + \frac{\delta_1}{2} \int_0^{L_0} |z_{tt}^m|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{tt}^m|^2 dx + \frac{\beta_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{xtt}^m|^2 dx + \\
& + \frac{\alpha_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{xxt}^m|^2 dx + \frac{\gamma_2}{2} \int_{L_0}^L |w_{xt}^m + v_x^m v_{xt}^m|^2 dx + \frac{\delta_2}{2} \int_{L_0}^L |w_{tt}^m|^2 dx
\end{aligned}$$

Integrando (3.44) de 0 a $t \leq T$, obtemos:

$$\begin{aligned}
E_m^2(t) &= E_m^2(0) + \frac{3}{2}\gamma_1 \int_0^t \int_0^{L_0} (z_{xt}^m + u_x^m u_{xt}^m) |u_{xt}^m|^2 dx dt - \frac{\gamma_1}{2} \int_0^{L_0} (z_x^m + \frac{1}{2}|u_x^m|^2) |u_{xt}^m|^2 dx + \\
& + \frac{\gamma_1}{2} \int_0^{L_0} (z_x^{0m} + \frac{1}{2}|u_x^{0m}|^2) |u_x^{1m}|^2 dx + \frac{3}{2}\gamma_2 \int_0^t \int_{L_0}^L (w_{xt}^m + v_x^m v_{xt}^m) |v_{xt}^m|^2 dx dt - \\
& - \frac{\gamma_2}{2} \int_{L_0}^L (w_x^m + \frac{1}{2}|v_x^m|^2) |v_{xt}^m|^2 dx + \frac{\gamma_2}{2} \int_{L_0}^L (w_x^{0m} + \frac{1}{2}|v_x^{0m}|^2) |v_x^{1m}|^2 dx. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Primeiramente vamos a mostrar que $E_m^2(0)$ é limitada para todo $m \in \mathbb{N}$.

Multiplicamos as equações (3.23) e (3.24) por $a_{im}''(0)$ e $b_{im}''(0)$, respectivamente, fazendo $t \rightarrow 0^+$ e somando sobre $i = 1, 2, 3, \dots, m$ obtemos:

$$\begin{aligned}
E_m^2(0) &\leq c_1 E_m(0) - [\alpha_1 u_{xx}^{0m}(L_0) - \alpha_2 v_{xx}^{0m}(L_0)] u_{xtt}^m(L_0, 0) + [\alpha_1 u_{xxx}^{0m}(L_0) - \alpha_2 v_{xxx}^{0m}(L_0)] u_{tt}^m(L_0, 0) - \\
& - [\alpha_2 v_{xx}^{0m}(L) + \theta v_x^{1m}(L)] v_{xtt}^m(L, 0) + [\alpha_2 v_{xxx}^{0m}(L) - \theta v^{1m}(L)] v_{tt}^m(L, 0) - \\
& - [\gamma_1 (z_x^{0m}(L_0) + \frac{1}{2}|u_x^{0m}(L_0)|^2) - \gamma_2 (w_x^{0m}(L_0) + \frac{1}{2}|v_x^{0m}(L_0)|^2)] z_{tt}^m(L_0, 0) - \\
& - [\gamma_2 (w_x^{0m}(L) + \frac{1}{2}|v_x^{0m}(L)|^2) + \theta w^{1m}(L)] w_{tt}^m(L, 0)
\end{aligned}$$

logo, das condições de compatibilidade e do fato de $E_m(0)$ estar limitado, obtemos

$$E_m^2(0) \leq c_1, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.46}$$

Finalmente, para estimar os demais termos da parte direita da desigualdade (3.45), usamos as desigualdades de Young, Hölder e o fato de $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I) \forall I \subset \mathbb{R}$, aberto, limitado. Disto segue que dado $\epsilon > 0$, existem constantes $c_2 \equiv c_2(\epsilon)$, c_3 e c_4 , tais que:

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2}\gamma_1 \int_0^t \int_0^{L_0} (z_{xt}^m + u_x^m u_{xt}^m) |u_{xt}^m|^2 dx dt - \frac{\gamma_1}{2} \int_0^{L_0} (z_x^m + \frac{1}{2}|u_x^m|^2) |u_{xt}^m|^2 dx + \\
& + \frac{\gamma_1}{2} \int_0^{L_0} (z_x^{0m} + \frac{1}{2}|u_x^{0m}|^2) |u_x^{1m}|^2 dx + \frac{3}{2}\gamma_2 \int_0^t \int_{L_0}^L (w_{xt}^m + v_x^m v_{xt}^m) |v_{xt}^m|^2 dx dt - \\
& - \frac{\gamma_2}{2} \int_{L_0}^L (w_x^m + \frac{1}{2}|v_x^m|^2) |v_{xt}^m|^2 dx + \frac{\gamma_2}{2} \int_{L_0}^L (w_x^{0m} + \frac{1}{2}|v_x^{0m}|^2) |v_x^{1m}|^2 dx \leq c_2 + \\
& + \epsilon c_3 E_m^2(t) + c_4 \int_0^t E_m^2(\tau) d\tau. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Com efeito: Mostraremos uma estima para o primeiro termo da esquerda, pois os demais seguem esa rotina. usando a desigualdade de Young , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\gamma_1 \int_0^t \int_0^{L_0} (z_{xt}^m + u_x^m u_{xt}^m) |u_{xt}^m|^2 dx dt &\leq \int_0^t c_1 \left\{ \int_0^{L_0} |z_{xt}^m + u_x^m u_{xt}^m|^2 dx + \int_0^{L_0} |u_{xt}^m|^4 dx \right\} d\tau \\ &\leq c_2 \int_0^t E_m^2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Portanto, de (3.46),(3.47) em (3.45), temos

$$(1 - \epsilon c_3) E_m^2(t) \leq c_5 + c_4 \int_0^t E_m^2(\tau) d\tau$$

Desta maneira, para ϵ suficientemente pequeno, aplicando a desigualdade de Gronwall, tem-se

$$E_m^2(t) \leq k(\epsilon) e^{\mu T}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T]$$

e daí

$$E_m^2(t, u_t^m, v_t^m, z_t^m, w_t^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T)$$

assim

$$(u_{tt}^m, v_{tt}^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; \mathbb{H}^1)$$

$$(z_{tt}^m, w_{tt}^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; \mathbb{H}^0)$$

O restante da prova é um processo rotinero

3.3 Decaimento Exponencial

Como vimos no capítulo anterior o decaimento nos problemas de transmissão dependem de uma relação entre os coeficientes elásticos das componentes do material. Resumindo esto no seguinte Teorema.

Teorema 3.3.1 *Seja (u, v) e (z, w) solução forte do sistema (3.2)-(3.19). Suponhamos que*

$$\rho_1 \leq \rho_2, \quad \beta_1 \leq \beta_2, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \quad \gamma_1 > \gamma_2 \quad e \quad \delta_1 \leq \delta_2 \quad (3.48)$$

Então existem constantes positivas C e μ , tais que

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\mu t}$$

Demonstração: Para mostrar o decaimento exponencial da energia, primero introduzimos os seguintes funcionales:

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= \rho_1 \int_0^{L_0} x u_t u_x dx + \beta_1 \int_0^{L_0} u_{xt} (x u_x)_x dx + \rho_2 \int_{L_0}^L x v_t v_x dx + \beta_2 \int_{L_0}^L v_{xt} (x v_x)_x dx \\
I_2(t) &= \delta_1 \int_0^{L_0} x z_t z_x dx + \delta_2 \int_{L_0}^L x w_t w_x dx \\
I_3(t) &= \delta_1 \int_0^{L_0} z_t z dx + \delta_2 \int_{L_0}^L w_t w dx \\
I_4(t) &= \rho_1 \int_0^{L_0} u_t u dx + \beta_1 \int_0^{L_0} u_{xt} u_x dx + \rho_2 \int_{L_0}^L v_t v dx + \beta_2 \int_{L_0}^L v_{xt} v_x dx
\end{aligned}$$

Definimos $R(t) = I_1 + I_2 + (1 - 2r)I_3 - rI_4$ sendo r uma constante positiva por determinar, então derivando o funcional $R(t)$ e tendo em conta as condições de fronteira, as condições de transmissão (3.6)-(3.15) obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R(t) &= \frac{L_0}{2}(\rho_1 - \rho_2)|u_t(L_0, t)|^2 + \frac{L_0}{2}(\beta_1 - \beta_2)|u_{xt}(L_0, t)|^2 + \frac{\alpha_1 L_0}{2\alpha_2}(\alpha_2 - \alpha_1)|u_{xx}(L_0, t)|^2 + \\
&+ \frac{L_0}{2}(\delta_1 - \delta_2)|z_t(L_0, t)|^2 + \frac{L_0}{2\gamma_1\gamma_2}(\gamma_2 - \gamma_1)[\gamma_1(z_x(L_0, t) + \frac{1}{2}|u_x(L_0, t)|^2)]^2 + \\
&+ \frac{\rho_2 L}{2}|v_t(L, t)|^2 + (\frac{\beta_2 L}{2} + \frac{L\theta^2}{2\alpha_2})|v_{xt}(L, t)|^2 - L\theta v_x(L, t)v_t(L, t) - \theta v_x(L, t)v_{xt}(L, t) + \\
&+ \frac{L\delta_2}{2}|w_t(L, t)|^2 - \theta L w_x(L, t)w_t(L, t) - (1 - 2r)\theta w(L, t)w_t(L, t) - r\theta v(L, t)v_t(L, t) - \\
&- (1 + 2r)\frac{\rho_1}{2} \int_0^{L_0} |u_t|^2 dx - (2r - 1)\frac{\beta_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{xt}|^2 dx - (3 - 2r)\frac{\alpha_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{xx}|^2 dx \\
&- (4r - 1)\frac{\delta_1}{2} \int_0^{L_0} |z_t|^2 dx - (3 - 4r)\frac{\gamma_1}{2} \int_0^{L_0} (z_x + \frac{1}{2}|u_x|^2)^2 dx - (1 + 2r)\frac{\rho_2}{2} \int_{L_0}^L |v_t|^2 dx - \\
&- (2r - 1)\frac{\beta_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{xt}|^2 dx - (3 - 2r)\frac{\alpha_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{xx}|^2 dx - (4r - 1)\frac{\delta_2}{2} \int_{L_0}^L |w_t|^2 dx - \\
&- (3 - 4r)\frac{\gamma_2}{2} \int_{L_0}^L (w_x + \frac{1}{2}|v_x|^2)^2 dx. \tag{3.49}
\end{aligned}$$

logo, de (3.48) em (3.49) obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R(t) &\leq \frac{\rho_2 L}{2}|v_t(L, t)|^2 + \left(\frac{\beta_2 L}{2} + \frac{L\theta^2}{2\alpha_2}\right)|v_{xt}(L, t)|^2 - L\theta v_x(L, t)v_t(L, t) - \theta v_x(L, t)v_{xt}(L, t) + \\
&+ \frac{L\delta_2}{2}|w_t(L, t)|^2 - \theta L w_x(L, t)w_t(L, t) - (1 - 2r)\theta w(L, t)w_t(L, t) - r\theta v(L, t)v_t(L, t) - \\
&- (1 + 2r)\frac{\rho_1}{2} \int_0^{L_0} |u_t|^2 dx - (2r - 1)\frac{\beta_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{xt}|^2 dx - (3 - 2r)\frac{\alpha_1}{2} \int_0^{L_0} |u_{xx}|^2 dx \\
&- (4r - 1)\frac{\delta_1}{2} \int_0^{L_0} |z_t|^2 dx - (3 - 4r)\frac{\gamma_1}{2} \int_0^{L_0} \left(z_x + \frac{1}{2}|u_x|^2\right)^2 dx - (1 + 2r)\frac{\rho_2}{2} \int_{L_0}^L |v_t|^2 dx - \\
&- (2r - 1)\frac{\beta_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{xt}|^2 dx - (3 - 2r)\frac{\alpha_2}{2} \int_{L_0}^L |v_{xx}|^2 dx - (4r - 1)\frac{\delta_2}{2} \int_{L_0}^L |w_t|^2 dx - \\
&- (3 - 4r)\frac{\gamma_2}{2} \int_{L_0}^L \left(w_x + \frac{1}{2}|v_x|^2\right)^2 dx. \tag{3.50}
\end{aligned}$$

tomando $\frac{1}{2} < r < \frac{3}{4}$, conclui-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R(t) &\leq \frac{\rho_2 L}{2}|v_t(L, t)|^2 + \left(\frac{\beta_2 L}{2} + \frac{L\theta^2}{2\alpha_2}\right)|v_{xt}(L, t)|^2 - L\theta v_x(L, t)v_t(L, t) - \\
&- \theta v_x(L, t)v_{xt}(L, t) + \frac{L\delta_2}{2}|w_t(L, t)|^2 - \theta L w_x(L, t)w_t(L, t) - \\
&- (1 - 2r)\theta w(L, t)w_t(L, t) - r\theta v(L, t)v_t(L, t) - cE(t), \tag{3.51}
\end{aligned}$$

onde $c = \min\{1 + 2r, 3 - 2r, 2r - 1, 4r - 1, 3 - 4r\}$.

Da desigualdade de Young, obtemos: dado $\epsilon_0 > 0$, existe uma constante $c_1 \equiv c_1(\epsilon_0)$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R(t) &\leq c_1 \left\{ |v_t(L, t)|^2 + |v_{xt}(L, t)|^2 + |w_t(L, t)|^2 \right\} + \epsilon_0 |v(L, t)|^2 + \epsilon_0 |v_x(L, t)|^2 + \\
&+ \epsilon_0 |v_x(L, t)|^4 + \epsilon_0 |w(L, t)|^2 - cE(t). \tag{3.52}
\end{aligned}$$

Observação 3.3.1 Dado $(u, v), (z, w)$ solução forte de (2.1)-(2.18), obtemos uma constante positiva c_2 satisfazendo a seguinte estimativa:

$$|v(L, t)|^2 + |v_x(L, t)|^2 + |v_x(L, t)|^4 + |w(L, t)|^2 \leq c_2 E(t).$$

Portanto da observação acima, na equação (2.51) obtemos:

$$\frac{d}{dt}R(t) \leq c_1 \left\{ |v_t(L, t)|^2 + |v_{xt}(L, t)|^2 + |w_t(L, t)|^2 \right\} - (c - \epsilon_0 c_2)E(t).$$

A seguir escolhemos $\epsilon_0 > 0$ de forma que $c - \epsilon_0 c_2 > 0$, isto é, $0 < \epsilon_0 < \frac{c}{c_2}$, por tanto existe uma constante $c_3 = c - \epsilon_0 c_2$, satisfazendo

$$\frac{d}{dt}R(t) \leq c_1 \left\{ |v_t(L, t)|^2 + |v_{xt}(L, t)|^2 + |w_t(L, t)|^2 \right\} - c_3 E(t). \quad (3.53)$$

Seja $\epsilon > 0$, definimos a energia perturbada

$$E_\epsilon(t) = E(t) + \epsilon R(t).$$

Calculamos a derivada de E_ϵ e obtemos

$$\frac{d}{dt}E_\epsilon(t) \leq -(\theta - \epsilon c_1) \left\{ |v_t(L, t)|^2 + |v_{xt}(L, t)|^2 + |w_t(L, t)|^2 \right\} - \epsilon c_2 E(t).$$

Escolhemos $\epsilon > 0$, de forma que $\theta - \epsilon c_1 > 0$, isto é, $0 < \epsilon < \frac{\theta}{c_1}$, obtendo assim a seguinte desigualdade:

$$\frac{d}{dt}E_\epsilon(t) \leq -\epsilon c_2 E(t). \quad (3.54)$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Young temos que $R(t)$ satisfaz: $|R(t)| \leq cE(t)$ para alguma constante $c > 0$, daí conclui-se que:

$$(1 - \epsilon c)E(t) \leq E_\epsilon(t) \leq (1 + \epsilon c)E(t)$$

aqui escolhemos $\epsilon > 0$, tal que $1 - \epsilon c > 0$. Por tanto existem constantes positivas c_3 e c_4 , tais que:

$$c_3 E(t) \leq E_\epsilon(t) \leq c_4 E(t) \quad (3.55)$$

onde $c_3 = 1 - \epsilon c$ e $c_4 = 1 + \epsilon c$. Logo de (3.54) e (3.55) concluímos o decaimento exponencial da energia, o que completa a demonstração. ■

Capítulo 4

Problema de Transmissão para uma Equação de Placas Termoelástica do tipo Hiperbólico

Neste capítulo estudaremos a existência e decaimento exponencial da solução do problema de transmissão para uma equação de placas que são "bons" conductores de calor. Estudaremos aqui uma nova modelagem da condução termica, proposta por Gurtin e pickin [11].

4.1 Introdução

O modelo matemático que descreve a condução do calor numa placa elástica seguindo a lei do calor de Fourier é dada por:

$$\begin{cases} u_{tt} - \beta \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \alpha \theta = 0, & \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \rho \theta_t - c \Delta \theta - \alpha \Delta u_t = 0, & \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (4.1)$$

onde Ω é aberto limitado de \mathbb{R}^2 com fronteira Γ regular, $\beta \geq 0$ e as outras constantes α, ρ e c são estritamente positivas. Vários autores têm estudado o problema da existência, unicidade e comportamento assintótico da solução para a equação de placas termoelástica (4.1) com condições de fronteira do tipo Dirichlet ou Neumann. veja, por exemplo veja Kim [12], Liu-Renardy [16], Rivera-Shibata [26] e Shibata[33]. Para condições e fronteira do tipo $u = \Delta u = \theta = 0$ veja Rivera-Racke [30].

A lei Fourier usada para descrever a condução de calor de um corpo em movimento (4.1), tem duas principais deficiencias:

- (i) Incapaz de descrever os efeitos de memória, os quais podem prevalecer em certos materiais, particularmente a baixas temperaturas.

- (ii) A parte parabólica do sistema prediz um resultado no realístico, isto é, o distúrbio térmico de um ponto no corpo é sentido instantaneamente em todo o corpo (fenômeno que é conhecido como velocidade infinita de propagação e que é típico nas equações de tipo Parabólico).

O modelo estudado aqui esta relacionado com as seguintes equações constitutivas:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= a\nabla(\Delta u(x, t)) + \mu\nabla\theta(x, t), \\ \rho_0 h(x, t) &= \Theta_0\beta\Delta u_t(x, t) + \rho_0 c\theta_t(x, t), \\ q(x, t) &= - \int_0^\infty k(s)\nabla\theta(x, t - s)ds, \end{aligned}$$

onde u é deslocamento vertical, θ é a diferença de temperatura para uma seção transversal, T é a tensão, h a taxa na qual o calor se absorve para uma unidade de volume, q o fluxo de calor, ρ_0 é a densidade de massa e Θ_0 é temperatura absoluta, veja Fabrizio-Lazzari-Rivera[8]. O núcleo de memória k é tomado como uma função regular que decai para zero quando o tempo tende para o infinito. por outro lado a, γ, μ e β são constantes positivas. A principal diferença deste modelo com o modelo clássico termoelástico é que o fluxo de calor não depende mas de valores atuais do gradiente de temperatura, este fato faz com que o modelo seja de tipo completamente Hiperbólico e não Hiperbólico Parabólico como em termoelasticidade clássica.

As equações aproximadas de movimento e de balanço de energia que assumiremos a partir destas leis constitutivas são:

$$\begin{cases} u_{tt} - \gamma\Delta u_{tt} + \Delta^2 u + \mu\Delta\theta = f(x, t), & \text{sobre } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \theta_t - (k * \Delta\theta) - \mu\Delta u_t = g(x, t) & \text{sobre } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (4.2)$$

sistema que descreve as pequenas vibrações de uma placa fina termoelástica, homogênea e isotrópica no cilindro $Q = \Omega \times \mathbb{R}^+$, modelo estudado por Fabrizio-Lazzari-Rivera[8] com as seguintes condições de fronteira e dados iniciais:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_t(x, 0) = \theta(x, 0) &= 0, \quad \forall x \in \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \theta &= 0 \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

onde $*$ denota o produto de convolução no tempo, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ é a normal unitária exterior a Γ , f e g as fontes externas do problema. Finalmente k, α, γ e ρ constantes físicas.

Neste capítulo estudaremos as vibrações de placas compostas de dois tipos de materiais diferentes, um deles material termoelástico cujas leis constitutivas seguem a lei de Gurtin e Pickin, e o outro um material apenas elástico (tipo conservativo). Isto é temos um problema

de transmissão onde o material que fornece a dissipação da energia ocupa apenas uma parte do corpo e a outra parte do corpo é do tipo conservativo. Desde o ponto de vista matemático podemos descrever este problema como um sistema de equações hiperbólicas com dissipação localizada.

Note que a dissipação produzida por esta lei é mais fraca que a produzida pela lei de Fourier. Desde este ponto de vista resulta interessante saber se para materiais mistos a dissipação continua produzindo estabilidade exponencial.

O principal resultado deste trabalho é mostrar que quando existe uma relação apropriada entre as constantes do sistema e se o núcleo da equação do calor é uma função definida fortemente positiva que decai exponencialmente, então a solução do sistema Termoelástico decai exponencialmente.

Outro ponto importante é que a dissipação produzida pela lei de Gurtin e Pickin é indefinida, isto é, a derivada da energia pode mudar de sinal o que cria dificuldades matemáticas na prova do decaimento exponencial.

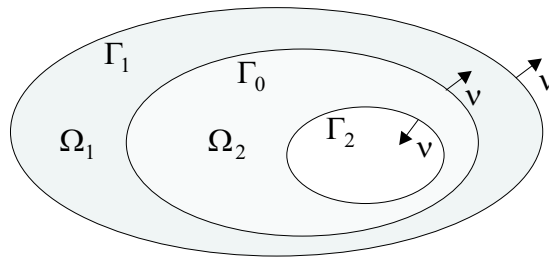


Figura 4.1: O conjunto típico Ω

Na figura acima o efeito dissipativo está atuando apenas na região Ω_1 , isto é o material configurado sobre Ω_1 é um bom condutor de calor. Enquanto que na região Ω_2 o material é simplesmente elástico, isto é não é sensível as variações de temperatura. O modelo se escreve da seguinte forma:

$$\rho_1 u_{tt} - \gamma_1 \Delta u_{tt} + \beta_1 \Delta^2 u + \mu \Delta \theta = 0, \quad \text{sobre } \Omega_1 \times \mathbb{R}^+ \quad (4.3)$$

$$\rho_0 \theta_t - \beta_0 (k * \Delta \theta) - \mu \Delta u_t = 0 \quad \text{sobre } \Omega_1 \times \mathbb{R}^+ \quad (4.4)$$

$$\rho_2 v_{tt} - \gamma_2 \Delta v_{tt} + \beta_2 \Delta^2 v = 0, \quad \text{sobre } \Omega_2 \times \mathbb{R}^+ \quad (4.5)$$

satisfazendo as seguintes condições de fronteira

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \quad (4.6)$$

$$v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+ \quad (4.7)$$

$$\theta = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \quad \text{e} \quad \theta = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \quad (4.8)$$

para todo $t > 0$; as condições de transmissão entre os materiais é dada por:

$$u = v, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \quad (4.9)$$

$$\beta_1 \Delta u = \beta_2 \Delta v \quad (4.10)$$

$$\gamma_1 \frac{\partial u_{tt}}{\partial \nu} - \beta_1 \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} - \mu \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = \gamma_2 \frac{\partial v_{tt}}{\partial \nu} - \beta_2 \frac{\partial \Delta v}{\partial \nu} \quad (4.11)$$

em $\Gamma_0 \times \mathbb{R}^+$; e dados iniciais:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega_1 \quad (4.12)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega_2 \quad (4.13)$$

as constantes $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ e μ são positivas. A seguir introduzimos algumas notações e espaços que serão utilizados nas seções seguintes:

$$\mathbb{H}^1 = \{(\varphi, \psi) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2); \quad \text{satisfazendo} \quad (4.14)\}$$

$$\begin{cases} \varphi = 0 & \text{em} \quad \Gamma_1 \\ \psi = 0 & \text{em} \quad \Gamma_2 \\ \varphi = \psi & \text{em} \quad \Gamma_0 \end{cases} \quad (4.14)$$

O espaço \mathbb{H}^1 munido do produto interno

$$\langle (\varphi^1, \psi^1), (\varphi^2, \psi^2) \rangle_{\mathbb{H}^1} = \int_{\Omega_1} (\rho_1 \varphi^1 \varphi^2 + \gamma_1 \nabla \varphi^1 \cdot \nabla \varphi^2) dx + \int_{\Omega_2} (\rho_2 \psi^1 \psi^2 + \gamma_2 \nabla \psi^1 \cdot \nabla \psi^2) dx$$

é um espaço de Hilbert. Denotemos por \mathbb{H}^2 o espaço dado por:

$$\mathbb{H}^2 = \{(\varphi, \psi) \in [H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)] \cap \mathbb{H}^1; \quad \text{satisfazendo} \quad (4.15)\}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 & \text{em} \quad \Gamma_1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 & \text{em} \quad \Gamma_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial \psi}{\partial \nu} & \text{em} \quad \Gamma_0 \end{cases} \quad (4.15)$$

note que \mathbb{H}^2 munido do produto interno

$$\langle (\varphi^1, \psi^1), (\varphi^2, \psi^2) \rangle_{\mathbb{V}} = \beta_1 \int_{\Omega_1} \Delta \varphi^1 \Delta \varphi^2 dx + \beta_2 \int_{\Omega_2} \Delta \psi^1 \Delta \psi^2 dx$$

é um espaço de Hilbert. Denotemos por $E(t)$ a energia associada ao sistema (4.3)-(4.13), como sendo

$$E(t) = E(t, u, \theta, v) = \frac{1}{2} \left\{ \rho_1 \int_{\Omega_1} |u_t|^2 dx + \gamma_1 \int_{\Omega_1} |\nabla u_t|^2 dx + \beta_1 \int_{\Omega_1} |\Delta u|^2 dx + \rho_0 \int_{\Omega_1} |\theta|^2 dx + \right.$$

$$+ \rho_2 \int_{\Omega_2} |v_t|^2 dx + \gamma_2 \int_{\Omega_2} |\nabla v_t|^2 dx + \beta_2 \int_{\Omega_2} |\Delta v|^2 dx \}. \quad (4.16)$$

Multiplicando as equações (4.3), (4.4), (4.5) por u_t , θ e v_t respectivamente, integrando por partes em seus domínios, usando as condições de fronteira e de transmissão (4.5)-(4.10), obtém-se:

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\beta_0 \int_{\Omega_1} (k * \nabla \theta) \cdot \nabla \theta dx \quad (4.17)$$

Note que não podemos afirmar que o lado direito de (4.17) seja positivo ou negativo. Por esta razão diremos que a dissipação é indefinida (veja a observação 4.1.1).

Integrando (4.17) sobre $[0, t]$, temos

$$E(t) = E(0) - \beta_0 \int_0^t \int_{\Omega_1} (k * \nabla \theta) \cdot \nabla \theta dx \quad (4.18)$$

usando o fato de que k é definido fortemente positivo concluímos que $E(t, u, \theta, v)$ é limitada por $E(0, u, \theta, v)$.

Observação 4.1.1 *O fato de k ser fortemente positivo não é suficiente para que o lado direito da equação (4.17) seja negativo, verifiquemos isto com o seguinte exemplo: Consideremos as funções*

$$k(t) = e^{-t} \cos t, \quad y(t) = e^{-2t}$$

Usando o **Lema 1.7.2** é simple verificar que $k(t)$ é definida fortemente positiva, pois

$$k \in L^1(0, \infty), \quad e \quad \operatorname{Re} \hat{k}(i\xi) \geq \frac{1}{2(1 + \xi^2)}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

e $\mathcal{Y}(t) \equiv (k * y)(t) \cdot y(t) = \frac{e^{-4t}}{2} [e^t(\cos t + \sin t) - 1]$, muda de sinal. Com efeito, para $t = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$, com m inteiro, temos que $\mathcal{Y}(t) > 0$, e, quando $t = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi$, temos que $\mathcal{Y}(t) < 0$. Assim $\mathcal{Y}(t)$ não é positivo $\forall t$. Porém $\int_0^T \mathcal{Y}(t) dt > 0$.

4.2 Existência de Solução

Nesta seção mostraremos a existência de soluções fracas e fortes do sistema (4.3)-(4.13). Para isto assumiremos que k é um núcleo definido fortemente positivo, satisfazendo:

$$k \geq 0, \quad k' < 0 \quad e \quad k'' > 0$$

Definição 4.2.1 *Diremos que (u, v, θ) são soluções fracas do sistema (4.3)-(4.13) quando*

$$(u, v) \in L^\infty(0, T; \mathbb{H}^2) \quad (u_t, v_t) \in L^\infty(0, T; \mathbb{H}^1)$$

$$\theta \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)), \quad (k * \theta) \in L^2(0, T; H^1(\Omega_1))$$

e satisfazem as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} & -\rho_1 \int_{\Omega_1} u_1(x) \varphi(x, 0) dx - \gamma_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla \varphi(x, 0) dx + \rho_1 \int_{\Omega_1} u_0(x) \varphi_t(x, 0) dx - \\ & -\gamma_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi_t(x, 0) dx - \rho_2 \int_{\Omega_2} v_1(x) \psi(x, 0) dx - \gamma_2 \int_{\Omega_2} \nabla v_1 \cdot \nabla \psi(x, 0) dx + \\ & + \rho_2 \int_{\Omega_2} v_0(x) \psi_t(x, 0) dx - \gamma_2 \int_{\Omega_2} \nabla v_0 \cdot \nabla \psi_t(x, 0) dx + \int_0^T \int_{\Omega_1} [\rho_1 u \varphi_{tt} + \gamma_1 \nabla u \cdot \nabla \varphi_{tt}] dx dt + \\ & + \beta_1 \int_0^T \int_{\Omega_1} \Delta u \Delta \varphi dx dt + \mu \int_0^T \int_{\Omega_1} \theta \Delta \varphi dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_2} [\rho_2 v \psi_{tt} + \gamma_2 \nabla v \cdot \nabla \psi_{tt}] dx dt + \\ & + \beta_2 \int_0^T \int_{\Omega_2} \Delta v \Delta \psi dx dt = 0 \\ & \rho_0 \int_{\Omega_1} \theta_0(x) \phi(x, 0) dx - \rho_0 \int_0^T \int_{\Omega_1} \theta \phi_t dx dt + \beta_0 \int_0^T \int_{\Omega_1} (k * \nabla \theta) \cdot \nabla \phi dx dt + \\ & + \mu \int_0^T \int_{\Omega_1} \nabla u_t \cdot \nabla \phi dx dt = 0 \end{aligned}$$

$\forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{C}^2([0, T]; \mathbb{H}^2)$ com

$$\varphi(\cdot, T) = \varphi_t(\cdot, T) = \nabla \varphi(\cdot, T) = \nabla \varphi_t(\cdot, T) = 0$$

$$\psi(\cdot, T) = \psi_t(\cdot, T) = \nabla \psi(\cdot, T) = \nabla \psi_t(\cdot, T) = 0$$

$\forall \phi \in \mathcal{C}^1([0, T]; H_0^1(\Omega_1))$

Teorema 4.2.1 Tomaremos os dados iniciais tais que $(u^0, v^0) \in \mathbb{H}^2$, $(u^1, v^1) \in \mathbb{H}^1$ e $\theta^0 \in L^2(\Omega_1)$, então existe uma solução fraca do sistema (4.3)-(4.13).

Demonstração: Utilizaremos mais uma vez o método de Galerkin, **Problema aproximado:** Sejam $(\varphi^i, \psi^i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $(\phi^i)_{i \in \mathbb{N}}$ duas bases, correspondentes aos espaços \mathbb{H}^2 e $L^2(\Omega_1)$, respectivamente. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos:

$$\mathbb{H}_m^2 = [(\varphi^1, \psi^1), (\varphi^2, \psi^2), \dots, (\varphi^m, \psi^m)]$$

$$H_m^0(\Omega_1) = [\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^m]$$

subespaços gerados pelos m-primeiros termos de (φ^i, ψ^i) e ϕ^i respectivamente.

Denotemos (u^m, v^m) e θ^m as funções dadas por

$$(u^m(t), v^m(t)) = \sum_{i=1}^m a_{im}(t) (\varphi^i, \psi^i) \quad \theta^m(t) = \sum_{i=1}^m b_{im}(t) \phi^i$$

onde os $a_{im}(t)$, $b_{im}(t)$ são determinados pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinarias que denominaremos de problema aproximado,

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_{\Omega_1} u_{tt}^m \varphi^j dx + \gamma_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_{tt}^m \cdot \nabla \varphi^j dx + \beta_1 \int_{\Omega_1} \Delta u^m \Delta \varphi^j dx - \mu \int_{\Omega_1} \nabla \theta^m \cdot \nabla \varphi^j dx + \\ + \rho_2 \int_{\Omega_2} v_{tt}^m \psi^j dx + \gamma_2 \int_{\Omega_2} \nabla v_{tt}^m \cdot \nabla \psi^j dx + \beta_2 \int_{\Omega_2} \Delta v^m \Delta \psi^j dx = 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\rho_0 \int_{\Omega_1} \theta_t^m \phi^j dx + \beta_0 \int_{\Omega_1} (k * \nabla \theta^m) \cdot \nabla \phi^j dx + \mu \int_{\Omega_1} \nabla u_t^m \cdot \nabla \phi^j dx = 0, \quad (4.20)$$

com as condições iniciais

$$(u^m(0), v^m(0)) = (u^{0m}, v^{0m}) \rightarrow (u^0, v^0) \quad \text{em } \mathbb{H}^2$$

$$(u_t^m(0), v_t^m(0)) = (u^{1m}, v^{1m}) \rightarrow (u^1, v^1) \quad \text{em } \mathbb{H}^1$$

$$\theta^m(0) = \theta^{0m} \rightarrow \theta^0 \quad \text{em } L^2(\Omega_1).$$

O problema aproximado (4.19) – (4.20), é equivalente ao seguinte sistema:

$$AX''(t) + BX(t) - CY(t) = 0$$

$$DY''(t) + E(k * Y(t)) + CX'(t) = 0$$

onde

$$X(t) = (a_{im}(t))_{m \times 1} \quad Y(t) = (b_{im}(t))_{m \times 1}$$

$$A = (a_{ij})_{m \times m} \quad \text{onde } a_{ij} = \langle (\varphi^i, \psi^i), (\varphi^j, \psi^j) \rangle_{\mathbb{H}^1}$$

$$B = (b_{ij})_{m \times m} \quad \text{onde } b_{ij} = \langle (\varphi^i, \psi^i), (\varphi^j, \psi^j) \rangle_{\mathbb{H}^2}$$

$$C = (c_{ij})_{m \times m} \quad \text{onde } c_{ij} = \mu \int_{\Omega_1} \nabla \phi^i \cdot \nabla \phi^j dx$$

$$D = (d_{ij})_{m \times m} \quad \text{onde } d_{ij} = \rho_0 \int_{\Omega_1} \phi^i \phi^j dx$$

$$E = (e_{ij})_{m \times m} \quad \text{onde } e_{ij} = \beta_0 \int_{\Omega_1} \nabla \phi^i \cdot \nabla \phi^j dx$$

$$k * Y(t) = (f_i)_{m \times 1} \quad \text{onde } f_i = k * b_{im}$$

Como a matriz A e D são não singulares então o sistema pode se reescrever da seguinte forma:

$$\mathcal{U}'(t) = \mathcal{M}\mathcal{U}(t) + \mathcal{K} * \mathcal{U}(t) \quad (4.21)$$

onde

$$\mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ X'(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -A^{-1}B & 0 & A^{-1}C \\ 0 & -D^{-1}C & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{K} * \mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -D^{-1}E(k * Y(t)) \end{pmatrix}$$

Note que o sistema (4.21) é um sistema integrodiferencial satisfazendo as hipóteses do **Teorema 1.6.3**, portanto existe uma única solução do problema aproximado continuamente diferenciável e pelo fato do sistema ser linear esta solução é global em $[0, T]$, $T > 0$. Nosso seguinte passo é estimar as soluções aproximadas para passar do caso de dimensão finita aos espaços de dimensão infinita.

Estimativa a priori: Multiplicando as equações (4.19) e (4.20), por $a'_{im}(t)$ e $b'_{im}(t)$ respectivamente, somando com respeito a $i = 1, 2, \dots, m$, Obtemos:

$$\frac{d}{dt}E(t, u^m, \theta^m, v^m) + \beta_0 \int_{\Omega_1} (k * \nabla \theta) \cdot \nabla \theta dx = 0.$$

Integrando de 0 até $t \leq T$, obtemos

$$E(t, u^m, \theta^m, v^m) + \beta_0 \int_0^t \int_{\Omega_1} (k * \nabla \theta) \cdot \nabla \theta dx dt = E(0, u^m, \theta^m, v^m)$$

como k é um núcleo definido positivo, temos

$$E(t, u^m, \theta^m, v^m) + \beta_0 \int_0^t \int_{\Omega_1} |k * \nabla \theta|^2 dx dt \leq E(0, u^m, \theta^m, v^m) \leq c$$

de onde concluímos que

$$(u^m, v^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; \mathbb{H}^2).$$

$$(u_t^m, v_t^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; \mathbb{H}^1).$$

$$\theta^m \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)).$$

$$(k * \nabla \theta^m) \text{ é limitado em } L^2(0, T; L^2(\Omega_1)).$$

Das limitações acima concluímos que existem subsequências de $(u^m, v^m)_{m \in \mathbb{N}}$ e $(\theta^m)_{m \in \mathbb{N}}$ que denotaremos da mesma forma e funções (u, v) e θ satisfazendo as seguinte convergencias:

$$(u^m, v^m) \xrightarrow{*} (u, v) \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; \mathbb{H}^2) \quad (4.22)$$

$$(u_t^m, v_t^m) \xrightarrow{*} (u_t, v_t) \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; \mathbb{H}^1) \quad (4.23)$$

$$\theta^m \xrightarrow{*} \theta \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)) \quad (4.24)$$

$$k * \nabla \theta^m \rightharpoonup k * \nabla \theta \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)). \quad (4.25)$$

Nestas condições temos que (u, v) e θ são soluções fracas do sistema (4.3) – (4.13). ■

Denotemos por:

$$\mathbb{V}^2 = H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2) \cap \mathbb{H}^1$$

$$\mathbb{V}^4 = H^4(\Omega_1) \times H^4(\Omega_2) \cap \mathbb{H}^2$$

Nosso seguinte paso é mostrar que existem soluções regulares quando os dados iniciais são tomados regulares. Mais precisamente temos:

Teorema 4.2.2 *Tomemos dados iniciais $(u^0, v^0) \in \mathbb{V}^4$, $(u^1, v^1) \in \mathbb{V}^2$ e $\theta^0 \in H^2(\Omega_1) \cap H_0^1(\Omega_1)$ satisfazendo as seguintes condições de compatibilidade:*

$$\begin{aligned} \beta_1 \Delta u^0 &= \beta_2 \Delta v^0 \\ \beta_1 \frac{\partial \Delta u^0}{\partial \nu} &= \beta_2 \frac{\partial \Delta v^0}{\partial \nu} \end{aligned}$$

Então existe uma unica solução do problema (4.3)-(4.13), satisfazendo

$$(u, v) \in C([0, \infty[; \mathbb{V}^4) \cap C^1([0, \infty[; \mathbb{V}^2) \cap C^2([0, \infty[; \mathbb{H}^1)$$

$$\theta \in C([0, \infty[; H_0^1(\Omega_1)) \cap C^1([0, \infty[; L^2(\Omega_1))$$

$$(k * \theta) \in L^2(0, T; H^2(\Omega_1))$$

Demonstração: Consideremos $\{(\varphi^i, \psi^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{(\phi^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ bases dos espaços \mathbb{V}^4 e $H_0^1(\Omega_1)$, respectivamente tais que:

$$(u^0, v^0), (u^1, v^1) \in \{(\varphi^i, \psi^i)\}_{i \in \mathbb{N}}, \quad \theta^0 \in \{(\phi^i)\}_{i \in \mathbb{N}} \quad (4.26)$$

Como \mathbb{V}^4 é denso em \mathbb{H}^2 e $H_0^1(\Omega_1)$ é denso em $L^2(\Omega_1)$ então $\{(\varphi^i, \psi^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{(\phi^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ são também bases correspondentes aos espaços \mathbb{H}^2 e $L^2(\Omega_1)$, respectivamente. Definimos

$$\mathbb{V}_m^4 = [(\varphi^1, \psi^1), (\varphi^2, \psi^2), \dots, (\varphi^m, \psi^m)]$$

$$\mathbb{H}_{0m}^1 = [(\xi^1, \phi^1), (\xi^2, \phi^2), \dots, (\xi^m, \phi^m)]$$

Agora, procuramos $(u^m(t), v^m(t)) \in \mathbb{V}_m^4$ e $(\theta^m(t)) \in \mathbb{H}_{0m}^1$ satisfazendo (4.19) – (4.20) e as seguintes convergencias

$$(u^m(0), v^m(0)) = (u^{0m}, v^{0m}) \rightarrow (u^0, v^0) \quad \text{forte em } \mathbb{V}^4 \quad (4.27)$$

$$(u_t^m(0), v_t^m(0)) = (u^{1m}, v^{1m}) \rightarrow (u^1, v^1) \quad \text{forte em } \mathbb{V}^2 \quad (4.28)$$

$$\theta^m(0) = \theta^{0m} \rightarrow \theta^0 \quad \text{forte em } H^2(\Omega_1) \cap H_0^1(\Omega_1) \quad (4.29)$$

Repetindo o feito na demonstração do Teorema 4.2.1, obtemos as seguintes estimativas:

$$(u^m, v^m) \quad \text{é limitado em } L^\infty(0, T; \mathbb{H}^2)$$

$$(u_t^m, v_t^m) \quad \text{é limitado em } L^\infty(0, T; \mathbb{H}^1)$$

$$\theta^m \quad \text{é limitado em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$$

$$(k * \nabla \theta^m) \quad \text{é limitado em } L^2(0, T; L^2(\Omega_1))$$

Precisamos de estimativas de segunda ordem, para isto derivamos o problema aproximado (4.19) – (4.20) com respeito a t , obtém-se:

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_{\Omega_1} u_{ttt}^m \varphi^j dx + \gamma_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_{ttt}^m \cdot \nabla \varphi^j dx + \beta_1 \int_{\Omega_1} \Delta u_t^m \Delta \varphi^j dx + \mu \int_{\Omega_1} \theta_t^m \cdot \Delta \varphi^j dx + \\ + \rho_2 \int_{\Omega_2} v_{ttt}^m \psi^j dx + \gamma_2 \int_{\Omega_2} \nabla v_{ttt}^m \cdot \nabla \psi^j dx + \beta_2 \int_{\Omega_2} \Delta v_t^m \Delta \psi^j dx = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \int_{\Omega_1} \theta_{tt}^m \phi^j dx + \beta_0 \int_{\Omega_1} (k_t * \nabla \theta^m) \cdot \nabla \phi^j dx + \beta_0 k(0) \int_{\Omega_1} \nabla \theta^m \cdot \nabla \phi^j dx + \\ + \mu \int_{\Omega_1} \nabla u_{tt}^m \cdot \nabla \phi^j dx = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

multiplicando por $a''_{im}(t)$ e $b'_{im}(t)$ respectivamente, somando com respeito a $j = 1$ até $j = m$, temos:

$$\frac{d}{dt} F(t, u^m, \theta^m, v^m) + \beta_0 \int_{\Omega_1} (k_t * \nabla \theta^m) \cdot \nabla \theta_t^m dx = 0 \quad (4.32)$$

onde

$$\begin{aligned} F(t, u^m, \theta^m, v^m) &= \frac{\rho_1}{2} \int_{\Omega_1} |u_{tt}^m|^2 dx + \frac{\gamma_1}{2} \int_{\Omega_1} |\nabla u_{tt}^m|^2 dx + \frac{\beta_1}{2} \int_{\Omega_1} |\Delta u_t^m|^2 dx + \\ &+ \frac{\rho_0}{2} \int_{\Omega_1} |\theta_t^m|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_{\Omega_2} |v_{tt}^m|^2 dx + \frac{\gamma_2}{2} \int_{\Omega_2} |\nabla v_{tt}^m|^2 dx + \\ &+ \frac{\beta_2}{2} \int_{\Omega_1} |\Delta u_t^m|^2 dx + \frac{k(0)\beta_0}{2} \int_{\Omega_1} |\nabla \theta^m|^2 dx. \end{aligned}$$

De (4.32) e do **Lema 1.7.1**, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t, u^m, \theta^m, v^m) = \frac{k'(t)\beta_0}{2} \int_{\Omega_1} |\nabla\theta^m|^2 dx - \frac{\beta_0}{2}(k'' \diamond \nabla\theta^m)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, u^m, \theta^m, v^m) &= \frac{\rho_1}{2} \int_{\Omega_1} |u_{tt}^m|^2 dx + \frac{\gamma_1}{2} \int_{\Omega_1} |\nabla u_{tt}^m|^2 dx + \frac{\beta_1}{2} \int_{\Omega_1} |\Delta u_t^m|^2 dx + \\ &+ \frac{\rho_0}{2} \int_{\Omega_1} |\theta_t^m|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_{\Omega_2} |v_{tt}^m|^2 dx + \frac{\gamma_2}{2} \int_{\Omega_2} |\nabla v_{tt}^m|^2 dx + \\ &+ \frac{\beta_2}{2} \int_{\Omega_1} |\Delta u_t^m|^2 dx + \frac{k(t)\beta_0}{2} \int_{\Omega_1} |\nabla\theta^m|^2 dx - \frac{1}{2}(k' \diamond \nabla\theta^m), \end{aligned}$$

dai e do fato $k' < 0, k'' > 0$ e usando as condições de compatibilidade, concluí-se

$$\mathcal{E}(t, u^m, \theta^m, v^m) \leq \mathcal{E}(0, u^m, \theta^m, v^m) \leq C$$

obtemdo assim as seguintes estimativas:

$$(u_t^m, v_t^m) \quad \text{é limitado em } L^\infty(0, T; \mathbb{H}^2)$$

$$(u_{tt}^m, v_{tt}^m) \quad \text{é limitado em } L^\infty(0, T; \mathbb{H}^1)$$

$$\theta_t^m \quad \text{é limitado em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$$

$$\nabla\theta^m \quad \text{é limitado em } L^2(0, T; L^2(\Omega_1)).$$

Precisamos de mais estimativas para obter a regularidade requerida, para isto derivamos uma vez mais com respeito a t as equações (4.30) e (4.31), logo, multiplicamos por $a_{im}'''(t)$ e $b_{im}''(t)$ respectivamente, somando com respeito a $j = 1$ até $j = m$, temos:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) = \beta_0 k'(t) \int_{\Omega_1} \theta_{tt} \Delta \theta^{0m} dx \tag{4.33}$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) &= \frac{\rho_1}{2} \int_{\Omega_1} |u_{ttt}^m|^2 dx + \frac{\gamma_1}{2} \int_{\Omega_1} |\nabla u_{ttt}^m|^2 dx + \frac{\beta_1}{2} \int_{\Omega_1} |\Delta u_{tt}^m|^2 dx + \\ &+ \frac{\rho_0}{2} \int_{\Omega_1} |\theta_{tt}^m|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_{\Omega_2} |v_{ttt}^m|^2 dx + \frac{\gamma_2}{2} \int_{\Omega_2} |\nabla v_{ttt}^m|^2 dx + \\ &+ \frac{\beta_2}{2} \int_{\Omega_1} |\Delta u_{tt}^m|^2 dx + \frac{k(t)\beta_0}{2} \int_{\Omega_1} |\nabla\theta_t^m|^2 dx - \frac{1}{2}(k' \diamond \nabla\theta_t^m). \end{aligned}$$

Integrando (4.33) de 0 a T , obtemos:

$$\mathcal{F}(t) \leq \mathcal{F}(0) + c \int_0^t \int_{\Omega_1} |\theta_{tt}|^2 dx$$

finalmente usando a desigualdade e Gronwall, a relação (4.26), as condições de compatibilidade e os mesmos argumentos do capítulo 2, temos que $\mathcal{F}(0)$ é limitado, portanto existe $C > 0$ verificando

$$\mathcal{F}(t) \leq C,$$

obtendo assim as seguintes estimativas:

$$(u_{tt}^m, v_{tt}^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; \mathbb{H}^2)$$

$$(u_{ttt}^m, v_{ttt}^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; \mathbb{H}^1)$$

$$\theta_{tt}^m \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$$

$$\nabla \theta_{tt}^m \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)).$$

Portanto a solução (u, v) e θ satisfaz a regularidade requerida.

4.3 Decaimento Exponencial

Para estudar o comportamento assintótico da solução quando o tempo vai para infinito, introduzimos as seguintes transformaciones:

$$U(x, t) = u(x, t)e^{\eta t}, \quad \Theta(x, t) = \theta(x, t)e^{\eta t}, \quad V(x, t) = v(x, t)e^{\eta t}$$

É simples verificar que U, V e Θ satisfazem:

$$U_t = \eta U + e^{\eta t} u_t, \quad V_t = \eta V + e^{\eta t} v_t$$

$$U_{tt} = 2\eta U_t + e^{\eta t} u_{tt} - \eta^2 U, \quad V_{tt} = 2\eta V_t + e^{\eta t} v_{tt} - \eta^2 V$$

$$\Theta_t = \eta \Theta + e^{\eta t} \theta_t, \quad \tilde{k} * \Delta \Theta = e^{\eta t} (k * \Delta \theta).$$

Assim as funções (U, Θ, V) satisfazem o seguinte sistema:

$$\rho_1 U_{tt} - \gamma_1 \Delta U_{tt} + \beta_1 \Delta^2 U + \mu \Delta \Theta = \mathcal{P}, \quad \text{sobre } \Omega_1 \times \mathbb{R}^+ \quad (4.34)$$

$$\rho_0 \Theta_t - \beta_0 (\tilde{k} * \Delta \Theta) - \mu \Delta U_t = \mathcal{Q} \quad \text{sobre } \Omega_1 \times \mathbb{R}^+ \quad (4.35)$$

$$\rho_2 V_{tt} - \gamma_2 \Delta V_{tt} + \beta_2 \Delta^2 V = \mathcal{R}, \quad \text{sobre } \Omega_2 \times \mathbb{R}^+ \quad (4.36)$$

satisfazendo as seguintes condições de fronteira

$$U = \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \quad (4.37)$$

$$V = \frac{\partial V}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+ \quad (4.38)$$

$$\Theta = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \quad \text{e} \quad \Theta = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \quad (4.39)$$

para todo $t > 0$; as condições de transmissão entre os materiais é dada por:

$$U = V \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial V}{\partial \nu} \quad (4.41)$$

$$\beta_1 \Delta U = \beta_2 \Delta V \quad (4.42)$$

$$\gamma_1 \left\{ \frac{\partial U_{tt}}{\partial \nu} - 2\eta \frac{\partial U_t}{\partial \nu} + \eta^2 \frac{\partial U}{\partial \nu} \right\} - \beta_1 \frac{\partial \Delta U}{\partial \nu} - \mu \frac{\partial \Theta}{\partial \nu} = \gamma_2 \left\{ \frac{\partial V_{tt}}{\partial \nu} - 2\eta \frac{\partial V_t}{\partial \nu} + \eta^2 \frac{\partial V}{\partial \nu} \right\} - \beta_2 \frac{\partial \Delta V}{\partial \nu} \quad (4.43)$$

em $\Gamma_0 \times \mathbb{R}^+$; e dados iniciais:

$$U(x, 0) = u_0(x), \quad U_t(x, 0) = u_1(x) + \eta u_0(x) \quad \text{em} \Omega_1 \quad (4.44)$$

$$\Theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega_1 \quad (4.45)$$

$$V(x, 0) = v_0(x), \quad V_t(x, 0) = v_1(x) + \eta v_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega_2 \quad (4.46)$$

onde

$$\mathcal{P} = 2\eta\rho_1 U_t - \rho_1 \eta^2 U + \gamma_1 \eta^2 \Delta U - 2\gamma_1 \eta \Delta U_t$$

$$\mathcal{Q} = \rho_0 \eta \Theta - \mu \eta \Delta U$$

$$\mathcal{R} = 2\eta\rho_2 V_t - \rho_2 \eta^2 V + \gamma_2 \eta^2 \Delta V - 2\gamma_2 \eta \Delta V_t$$

Para provar que a energia associada a (u, v, θ) decai exponencialmente para zero será suficiente mostrar que a energia associada a (U, V, Θ) é limitada. Para isto, denotemos por $\mathcal{E}(t)$ a energia associada ao sistema (4.34) – (4.46), como sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t, U, \Theta, V) &= \frac{1}{2} \left\{ \rho_1 \int_{\Omega_1} |U_t|^2 dx + \gamma_1 \int_{\Omega_1} |\nabla U_t|^2 dx + \beta_1 \int_{\Omega_1} |\Delta U|^2 dx + \rho_0 \int_{\Omega_1} |\Theta|^2 dx + \right. \\ &+ \rho_1 \eta^2 \int_{\Omega_1} |U|^2 dx + \gamma_1 \eta^2 \int_{\Omega_1} |\nabla U|^2 dx + \rho_2 \int_{\Omega_2} |V_t|^2 dx + \gamma_2 \int_{\Omega_2} |\nabla V_t|^2 dx + \\ &\left. + \beta_2 \int_{\Omega_2} |\Delta V|^2 dx + \rho_2 \eta^2 \int_{\Omega_2} |V|^2 dx + \gamma_2 \eta^2 \int_{\Omega_2} |\nabla V|^2 dx \right\}. \end{aligned}$$

Com estas notações temos o seguinte Lema:

Lema 4.3.1 *Suponhamos que os dados iniciais satisfazem $(u_0, v_0) \in \mathbb{V}^4$, $(u_1, v_1) \in \mathbb{V}^2$ e $\theta_0 \in \mathbb{W}^2$. Nestas condições a energia de primeira ordem satisfaz:*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t, U, \Theta, V) \leq -\beta_0 \int_{\Omega_1} (\tilde{k} * \nabla \Theta) \cdot \nabla \Theta dx + c\eta E(t, U, \Theta, V)$$

onde $E(t, U, V, \Theta)$ é definida em (4.16).

Demonstração: Multiplicando as equações (4.34), (4.35) e (4.36) por U_t , Θ e V_t respectivamente, integrando, usando as condições de fronteira, somando as equações, usando as condições de transmissão, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t, U, \Theta, V) &= -\beta_0 \int_{\Omega_1} (\tilde{k} * \nabla \Theta) \cdot \nabla \Theta dx + 2\rho_1 \eta \int_{\Omega_1} |U_t|^2 dx + 2\gamma_1 \eta \int_{\Omega_1} |\nabla U_t|^2 dx + \\ &+ \rho_0 \eta \int_{\Omega_1} |\Theta|^2 dx - \mu \eta \int_{\Omega_1} \Delta U \Theta dx + 2\rho_2 \eta \int_{\Omega_2} |V_t|^2 dx \\ &+ 2\gamma_2 \eta \int_{\Omega_2} |\nabla V_t|^2 dx, \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Young, segue nosso resultado. \square

Como vimos nos capítulos anteriores, o decaimento dos problemas de transmissão dependem de uma boa relação entre os coeficientes. Este caso não é uma exceção, assim temos:

Teorema 4.3.1 *Consideremos os dados iniciais $(u_0, v_0) \in \mathbb{V}^4$, $(u_1, v_1) \in \mathbb{V}^2$ e $\theta_0 \in \mathbb{H}^2(\Omega_1) \cap \mathbb{H}^1(\Omega_1)$. Seja*

$$\rho_1 \geq \rho_2, \quad \gamma_1 \geq \gamma_2 \quad e \quad \beta_1 \leq \beta_2 \quad (4.47)$$

Então a solução fraca do sistema (4.3) – (4.13) decai exponencialmente para zero quando $t \rightarrow \infty$. Isto quer dizer, existem constantes positivas C e λ , tais que:

$$E(t, u, \theta, v) \leq CE(0, u, \theta, v)e^{-\lambda t}.$$

Assumiremos a existência de um $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que a função $m(x) = x - x_0$ satisfaz:

$$\begin{aligned} m \cdot \nu &\geq \delta_0 > 0 && \text{em } \Gamma_0 \\ m \cdot \nu &\leq 0 && \text{em } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Denotemos por $\mathcal{K}U = m \cdot \nabla U - \frac{1}{2}U$ e consideremos o seguinte funcional:

$$\begin{aligned} I(t) &= \rho_1 \int_{\Omega_1} U_t \mathcal{K}U + \gamma_1 \int_{\Omega_1} \nabla U_t \cdot \nabla \mathcal{K}U dx - \frac{\eta \rho_1}{2} \int_{\Omega_1} |U|^2 dx - \frac{\eta \gamma_1}{2} \int_{\Omega_1} |\nabla U|^2 dx + \\ &+ \rho_2 \int_{\Omega_2} V_t \mathcal{K}V + \gamma_2 \int_{\Omega_2} \nabla V_t \cdot \nabla \mathcal{K}V dx - \frac{\eta \rho_2}{2} \int_{\Omega_2} |V|^2 dx - \frac{\eta \gamma_2}{2} \int_{\Omega_2} |\nabla V|^2 dx. \end{aligned}$$

A demonstração deste teorema é uma consequência dos seguintes Lemas.

Lema 4.3.2 *Usando as condições (4.47) – (4.48) e $\eta < 1$, obtemos a existência de uma*

constante positiva c_0 , tal que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(t) &\leq \frac{\beta_1}{2} \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |\Delta U|^2 dx + \frac{\rho_1 \eta^2}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |U|^2 dx + \frac{\gamma_1 \eta^2}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |\nabla U|^2 dx - \\
&- \frac{3\rho_1}{2} \int_{\Omega_1} |U_t|^2 dx - \frac{\gamma_1}{2} \int_{\Omega_1} |\nabla U_t|^2 dx - \frac{\beta_1}{2} \int_{\Omega_1} |\Delta U|^2 dx - \frac{3\rho_2}{2} \int_{\Omega_2} |V_t|^2 dx - \\
&- \frac{\gamma_2}{2} \int_{\Omega_2} |\nabla V_t|^2 dx - \frac{3\beta_2}{2} \int_{\Omega_2} |\Delta V|^2 dx + \mu \int_{\Omega_1} \nabla \Theta \cdot \nabla (m \cdot \nabla U) dx + \\
&+ \frac{\mu}{2} \int_{\Omega_1} \Theta \Delta U dx + \eta c_0 E(t, U, \Theta, V)
\end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando as equações (4.34), (4.36) por $m \cdot \nabla U$ e $m \cdot \nabla V$, respectivamente, integrando em seus respectivos domínios, obtemos que os seguintes funcionais:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1(t) &= \int_{\Omega_1} [\rho_1 U_t (m \cdot \nabla U) + \gamma_1 \nabla U_t \cdot \nabla (m \cdot \nabla U)] dx \\
\mathcal{R}_2(t) &= \int_{\Omega_2} [\rho_2 V_t (m \cdot \nabla U) + \gamma_2 \nabla V_t \cdot \nabla (m \cdot \nabla V)] dx
\end{aligned}$$

satisfazem

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{R}_1(t) &= -\frac{\rho_1}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |U_t|^2 dx - \frac{\gamma_1}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |\nabla U_t|^2 dx - \frac{\beta_1}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |\Delta U|^2 dx - \\
&- \int_{\Gamma_0} [\gamma_1 (\frac{dU_{tt}}{d\nu} - 2\eta \frac{dU_t}{d\nu} + \eta^2 \frac{dU}{d\nu}) - \mu \frac{\partial \Theta}{\partial \nu} - \beta_1 \frac{d\Delta U}{d\nu}] (m \cdot \nabla U) dx - \beta_1 \int_{\Gamma_0} \Delta U \frac{dU}{d\nu} dx + \\
&+ \frac{\beta_1}{2} \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |\Delta U|^2 dx + \frac{\rho_1 \eta^2}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |U|^2 dx + \frac{\gamma_1 \eta^2}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |\nabla U|^2 dx + \\
&+ \mu \int_{\Omega_1} \nabla \Theta \cdot \nabla (m \cdot \nabla U) dx - \rho_1 \int_{\Omega_1} |U_t|^2 dx - \beta_1 \int_{\Omega_1} |\Delta U|^2 dx + \\
&+ 2\eta \rho_1 \int_{\Omega_1} U_t (m \cdot \nabla U) dx + \rho_1 \eta^2 \int_{\Omega_1} |U|^2 dx + 2\gamma_1 \eta \int_{\Omega_1} \nabla U_t \cdot \nabla (m \cdot \nabla U) dx \quad (4.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{R}_2(t) &= \frac{\rho_2}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |V_t|^2 dx + \frac{\gamma_2}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |\nabla V_t|^2 dx + \frac{\beta_2}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |\Delta V|^2 dx + \\
&+ \int_{\Gamma_0} [\gamma_2 (\frac{dV_{tt}}{d\nu} - 2\eta \frac{dV_t}{d\nu} + \eta^2 \frac{dV}{d\nu}) - \beta_2 \frac{d\Delta V}{d\nu}] (m \cdot \nabla V) dx + \beta_2 \int_{\Gamma_0} \Delta V \frac{dV}{d\nu} dx + \\
&+ \frac{\beta_2}{2} \int_{\Gamma_2} (m \cdot \nu) |\Delta V|^2 dx - \frac{\rho_2 \eta^2}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |V|^2 dx - \frac{\gamma_2 \eta^2}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |\nabla V|^2 dx - \\
&- \rho_2 \int_{\Omega_2} |V_t|^2 dx - \beta_2 \int_{\Omega_2} |\Delta V|^2 dx + 2\eta \rho_2 \int_{\Omega_2} V_t (m \cdot \nabla V) dx + \\
&+ \rho_2 \eta^2 \int_{\Omega_2} |V|^2 dx + 2\gamma_2 \eta \int_{\Omega_2} \nabla V_t \cdot \nabla (m \cdot \nabla V) dx, \tag{4.50}
\end{aligned}$$

onde temos usado a definição de \mathcal{P} , \mathcal{Q} e \mathcal{R} . Somando as equações (4.49) e (4.50), usando as condições de transmissão, condições de fronteira, as desigualdades (4.47) – (4.48) e denotando $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{R}(t) &\leq \frac{\beta_1}{2} \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |\Delta U|^2 dx + \frac{\rho_1 \eta^2}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |U|^2 dx + \frac{\gamma_1 \eta^2}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |\nabla U|^2 dx - \\
&- \rho_1 \int_{\Omega_1} |U_t|^2 dx - \beta_1 \int_{\Omega_1} |\Delta U|^2 dx - \rho_2 \int_{\Omega_2} |V_t|^2 dx - \beta_2 \int_{\Omega_2} |\Delta V|^2 dx + \\
&+ \mu \int_{\Omega_1} \nabla \Theta \cdot \nabla (m \cdot \nabla U) dx + 2\eta \rho_1 \int_{\Omega_1} U_t (m \cdot \nabla U) dx + \rho_1 \eta^2 \int_{\Omega_1} |U|^2 dx + \\
&+ 2\gamma_1 \eta \int_{\Omega_1} \nabla U_t \cdot \nabla (m \cdot \nabla U) dx + 2\eta \rho_2 \int_{\Omega_2} V_t (m \cdot \nabla V) dx + \rho_2 \eta^2 \int_{\Omega_2} |V|^2 dx + \\
&+ 2\gamma_2 \eta \int_{\Omega_2} \nabla V_t \cdot \nabla (m \cdot \nabla V) dx
\end{aligned}$$

Analogamente, multiplicando as equações (4.34), (4.36) por U e V respectivamente, obtemos os seguintes funcionais:

$$\mathcal{S}_1(t) = \int_{\Omega_1} [\rho_1 U U_t + \gamma_1 \nabla U_t \cdot \nabla U] dx$$

$$\mathcal{S}_2(t) = \int_{\Omega_2} [\rho_2 V V_t + \gamma_2 \nabla V_t \cdot \nabla V] dx$$

satisfazem

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{S}_1(t) &= - \int_{\Gamma_0} [\gamma_1(\frac{dU_{tt}}{d\nu} - 2\eta\frac{dU_t}{d\nu} + \eta^2\frac{dU}{d\nu}) - \mu\frac{\partial\Theta}{\partial\nu} - \beta_1\frac{d\Delta U}{d\nu}]U dx - \beta_1 \int_{\Gamma_0} \Delta U \frac{dU}{d\nu} dx + \\
&+ \rho_1 \int_{\Omega_1} |U_t|^2 dx + \gamma_1 \int_{\Omega_1} |\nabla U_t|^2 dx - \beta_1 \int_{\Omega_1} |\Delta U|^2 dx - \mu \int_{\Omega_1} \Theta \Delta U dx - \\
&- \rho_1 \eta^2 \int_{\Omega_1} |U|^2 dx - \gamma_1 \int_{\Omega_1} |\nabla U|^2 dx + 2\eta\rho_1 \int_{\Omega_1} U U_t dx + \\
&+ 2\eta\gamma_1 \int_{\Omega_1} \nabla U \cdot \nabla U_t dx \\
\frac{d}{dt}\mathcal{S}_2(t) &= \int_{\Gamma_0} [\gamma_2(\frac{dV_{tt}}{d\nu} - 2\eta\frac{dV_t}{d\nu} + \eta^2\frac{dV}{d\nu}) - \beta_2\frac{d\Delta V}{d\nu}]V dx + \beta_2 \int_{\Gamma_0} \Delta V \frac{dV}{d\nu} dx + \\
&+ \rho_2 \int_{\Omega_2} |V_t|^2 dx + \gamma_2 \int_{\Omega_2} |\nabla V_t|^2 dx - \beta_2 \int_{\Omega_2} |\Delta V|^2 dx - \\
&- \rho_2 \eta^2 \int_{\Omega_2} |V|^2 dx - \gamma_2 \int_{\Omega_2} |\nabla V|^2 dx + 2\eta\rho_2 \int_{\Omega_2} V V_t dx + \\
&+ 2\eta\gamma_2 \int_{\Omega_2} \nabla V \cdot \nabla V_t dx
\end{aligned}$$

somando estas equações, usando as condições de transmissão e denotando $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{S}(t) &= \rho_1 \int_{\Omega_1} |U_t|^2 dx + \gamma_1 \int_{\Omega_1} |\nabla U_t|^2 dx - \beta_1 \int_{\Omega_1} |\Delta U|^2 dx - \mu \int_{\Omega_1} \Theta \Delta U dx + \\
&+ \rho_2 \int_{\Omega_2} |V_t|^2 dx + \gamma_2 \int_{\Omega_2} |\nabla V_t|^2 dx - \beta_2 \int_{\Omega_2} |\Delta V|^2 dx - \rho_1 \eta^2 \int_{\Omega_1} |U|^2 dx - \\
&- \gamma_1 \int_{\Omega_1} |\nabla U|^2 dx - \rho_2 \eta^2 \int_{\Omega_2} |V|^2 dx - \gamma_2 \int_{\Omega_2} |\nabla V|^2 dx + \\
&+ 2\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\eta\rho_1}{2} \int_{\Omega_1} |U|^2 dx + \frac{\eta\gamma_1}{2} \int_{\Omega_1} |\nabla U|^2 dx + \frac{\eta\rho_2}{2} \int_{\Omega_2} |V|^2 dx + \frac{\eta\gamma_2}{2} \int_{\Omega_2} |\nabla V|^2 dx \right\}
\end{aligned}$$

denotando por:

$$I(t) = \mathcal{R}(t) - \frac{1}{2}\mathcal{S}(t)$$

usando as desigualdade Young, Schwartz e Poincaré, segue nosso resultado. \square

A seguir, nosso objetivo agora é eliminar o termo $\mu \int_{\Omega_1} \nabla\Theta \cdot \nabla(m \cdot \nabla U) dx$ da desigualdade apresentada no **Lema 3.2.2**, para isso introduzimos o seguinte funcional:

$$\mathcal{M}(t) = \rho_0 \int_{\Omega_1} \Theta m_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k} * \Theta) dx - \mu \int_{\Omega_1} \Delta U m_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k} * \Theta) dx.$$

Nestas condições temos.

Lema 4.3.3 *Seja $\tilde{c}_1 = \max\{|m(x)|^2, \text{ quando } x \in \Omega_1\}$ e $\tilde{c}_2 = \max\{\frac{\rho_0}{2}, \frac{\rho_0\tilde{c}_1}{2}, \frac{\mu}{2}, \frac{\mu\tilde{c}_1}{2}\}$. Então para $0 < \eta < \frac{\rho_0\tilde{k}(0)}{2\tilde{c}_2}$, existem constantes positivas c_1, c_2, c_3 tais que:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{M}(t) &\leq -\frac{\beta_0\delta_0}{2} \int_{\Gamma_0} |\tilde{k} * \frac{\partial\Theta}{\partial\nu}|^2 dx + \frac{\beta_0}{2} \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |\tilde{k} * \frac{\partial\Theta}{\partial\nu}|^2 dx \\ &\quad - \mu\tilde{k}(0) \int_{\Omega_1} \nabla\Theta \cdot \nabla(m \cdot \nabla U) dx \\ &\quad - c_1 \int_{\Omega_1} |\Theta|^2 dx + c_2 \int_{\Omega_1} |\tilde{k} * \nabla\Theta|^2 + \eta c_3 E(t, U, \Theta, V). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Demonstração: Multiplicando a equação (4.35) por $m_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{k} * \Theta)$, integrando em seu dominio, obtemos :

$$\begin{aligned} &\underbrace{\rho_0 \int_{\Omega_1} \Theta m_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{k} * \Theta) dx}_{=I_1} - \underbrace{\beta_0 \int_{\Omega_1} (\tilde{k} * \Delta U) m_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{k} * \Theta) dx}_{=I_2} \\ &\quad - \underbrace{\mu \int_{\Omega_1} \Delta U m_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{k} * \Theta) dx}_{=I_3} = \\ &\quad = \underbrace{\int_{\Omega_1} \mathcal{Q} m_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{k} * \Theta) dx}_{=I_4}. \end{aligned}$$

Estimativa de (I_1) : Usando integração por partes e levando em conta que $\Theta = 0$ em Γ_0 , obtemos a seguinte identidade

$$I_1 = \frac{d}{dt} \left\{ \rho_0 \int_{\Omega_1} \Theta m_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{k} * \Theta) dx \right\} + \rho_0 \tilde{k}(0) \int_{\Omega_1} |\Theta|^2 dx - \rho_0 \int_{\Omega_1} \Theta m_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{k} * \Theta) dx. \quad (4.52)$$

Estimativa de (I_2) : Usando a identidade de Green e o fato de $\Theta = 0$ em $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$, implica $\nabla\Theta = \nu \frac{\partial\Theta}{\partial\nu}$ em $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$, obtemos a seguinte identidade

$$I_2 = -\beta_0 \int_{\partial\Omega_1} (m \cdot \nu) \left| \tilde{k} * \frac{\partial\Theta}{\partial\nu} \right|^2 dx + \beta_0 \int_{\Omega_1} \frac{d}{dx_j}(\tilde{k} * \Theta) \frac{d}{dx_j} (m_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{k} * \Theta)) dx$$

que é equivalente a :

$$I_2 = -\frac{\beta_0}{2} \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) \left| \tilde{k} * \frac{\partial\Theta}{\partial\nu} \right|^2 dx + \frac{\beta_0}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) \left| \tilde{k} * \frac{\partial\Theta}{\partial\nu} \right|^2 dx + \frac{\beta_0}{2} \int_{\Omega_1} |\tilde{k} * \nabla\Theta|^2 dx. \quad (4.53)$$

Estimativa de (I_3) : Usando a identidade de Green e as condições de fronteira para Θ , temos

$$\begin{aligned} I_3 = & -\frac{d}{dt} \left\{ \mu \int_{\Omega_1} \Delta U m_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k} * \Theta) dx \right\} + \mu \tilde{k}(0) \int_{\Omega_1} \nabla \Theta \cdot \nabla (m \cdot \nabla U) dx + \\ & + \mu \int_{\Omega_1} \Delta U m_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k}' * \Theta) dx \end{aligned} \quad (4.54)$$

Estimativa de (I_4) : Da desigualde de Young concluímos que existe uma constante positiva c_2 tal que:

$$I_4 \leq \eta c_2 \int_{\Omega_1} (|\Theta|^2 + |\Delta U|^2 + |\tilde{k} * \nabla \Theta|^2) dx \quad (4.55)$$

Somando as desigualdades (4.50) – (4.53) obtemos nosso resultado. \square

Denotemos por

$$G(t) = I(t) + \frac{1}{\tilde{k}(0)} \mathcal{M}(t).$$

Então para η suficientemente pequeno existem constantes positivas as quais denotamos por c_1, c_2 tais que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(t) \leq & \frac{\beta_1 c_0}{2} \int_{\Gamma_1} |\Delta U|^2 dx + \frac{\beta_0 c_0}{2\tilde{k}(0)} \int_{\Gamma_1} \left| \tilde{k} * \frac{\partial \Theta}{\partial \nu} \right|^2 dx - \frac{\beta_0 \delta_0}{2\tilde{k}(0)} \int_{\Gamma_0} \left| \tilde{k} * \frac{\partial \Theta}{\partial \nu} \right|^2 dx - \\ & - c_1 E(t, U, \Theta, V) + c_2 \int_{\Omega_1} |\tilde{k} * \nabla \Theta|^2 dx + \frac{\mu^2}{4\beta_1} \int_{\Omega_1} |\Theta|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde $c_0 = \sup_{x \in \Gamma_1} |m(x)|$. A continuação temos agora como novo objetivo eliminar o termo

$$\frac{\beta_1 c_0}{2} \int_{\Gamma_1} |\Delta U|^2 dx + \frac{\beta_0 c_0}{2\tilde{k}(0)} \int_{\Gamma_1} \left| \tilde{k} * \frac{\partial \Theta}{\partial \nu} \right|^2 dx$$

da desigualdade acima, pois eles não podem ser limitados pela Energia de primeira ordem. Para obter isto, consideremos o seguinte funcional

$$\begin{aligned} H(t) = & \rho_1 \int_{\Omega_1} U_t (h \cdot \nabla U) dx + \gamma_1 \int_{\Omega_1} \nabla U_t \cdot \nabla (h \cdot \nabla U) dx + \frac{1}{\tilde{k}(0)} \left\{ \rho_0 \int_{\Omega_1} \Theta h_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k} * \Theta) dx - \right. \\ & \left. - \mu \int_{\Omega_1} \Delta U h_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k} * \Theta) dx \right\} \end{aligned}$$

onde o campo vetorial $h = (h_1, h_2) \in [C^2(\Omega)]^n$ é definido por:

$$h(x) = \begin{cases} -\nu(x) & \text{se } x \in \Gamma_1 \\ 0 & \text{se } x \in B_\delta(\Omega_2). \end{cases}$$

Lema 4.3.4 Para η suficientemente pequeno existem constantes positivas C_i com $i = 1, 2, \dots, 5$ tais que a solução do sistema (4.34)-(4.46), verifica:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(t) &\leq -\frac{\beta_1}{2} \int_{\Gamma_1} |\Delta U|^2 dx - \frac{\beta_0}{2\tilde{k}(0)} \int_{\Gamma_1} |\tilde{k} * \frac{\partial \Theta}{\partial \nu}|^2 dx - C_1 \int_{\Omega_1} |U_t|^2 dx + \eta C_2 \int_{\Omega_1} |\nabla U_t|^2 dx - \\ &- C_3 \int_{\Omega_1} |\Delta U|^2 dx - C_4 \int_{\Omega_1} |\Theta|^2 dx + C_5 \int_{\Omega_1} |\tilde{k} * \nabla \Theta|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Demonstração: Multiplicando as equações (4.32) e (4.33) por $(h \cdot \nabla U)$ e $h_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k} * \Theta)$ respectivamente, integrando em seus respectivos domínios, obtemos que os seguintes funcionais:

$$\begin{aligned} H_1(t) &= \rho_1 \int_{\Omega_1} U_t (h \cdot \nabla U) dx + \gamma_1 \int_{\Omega_1} \nabla U_t \cdot \nabla (h \cdot \nabla U) dx \\ H_2(t) &= \rho_0 \int_{\Omega_1} \Theta h_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k} * \Theta) dx - \mu \int_{\Omega_1} \Delta U h_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k} * \Theta) dx \end{aligned}$$

satisfazem:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H_1(t) &= -\frac{\beta_1}{2} \int_{\Gamma_1} |\Delta U|^2 dx - \mu \int_{\Omega_1} \Delta \Theta (h \cdot \nabla U) dx - \frac{\rho_1}{2} \int_{\Omega_1} |U_t|^2 dx - \beta_1 \int_{\Omega_1} |\Delta U|^2 dx + \\ &+ 2\eta \rho_1 \int_{\Omega_1} U_t (h \cdot \nabla U) dx + \rho_1 \eta^2 \int_{\Omega_1} |U|^2 dx + 2\gamma_1 \eta \int_{\Omega_1} \nabla U_t \cdot \nabla (h \cdot \nabla U) dx. \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H_2(t) &= -\rho_0 \tilde{k}(0) \int_{\Omega_1} |\Theta|^2 dx + \rho_0 \int_{\Omega_1} \Theta h_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k}' * \Theta) dx - \frac{\beta_0}{2} \int_{\Gamma_1} |\tilde{k} * \frac{\partial \Theta}{\partial \nu}|^2 dx - \\ &- \beta_0 \int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{k} * \Theta) \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k} * \Theta) dx + \frac{\beta_0}{2} \int_{\Omega_1} |\tilde{k} * \nabla \Theta|^2 dx + \\ &+ \mu \tilde{k}(0) \int_{\Omega_1} \Delta \Theta (h \cdot \nabla U) dx - \mu \int_{\Omega_1} \Delta U h_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k}' * \Theta) dx + \\ &+ \int_{\Omega_1} \mathcal{Q} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k} * \Theta) dx. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Denotando por:

$$H(t) = H_1(t) + \frac{1}{\tilde{k}(0)} H_2(t)$$

então de (4.56) e (4.57), segue:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H(t) &= -\frac{\beta_1}{2} \int_{\Gamma_1} |\Delta U|^2 dx - \frac{\beta_0}{2\tilde{k}(0)} \int_{\Gamma_1} |\tilde{k} * \frac{\Theta}{\partial\nu}|^2 dx - \rho_1 \int_{\Omega_1} |U_t|^2 dx - \beta_1 \int_{\Omega_1} |\Delta U|^2 dx + \\
&+ 2\eta\rho_1 \int_{\Omega_1} U_t(h \cdot \nabla U) dx + \rho_1\eta^2 \int_{\Omega_1} |U|^2 dx + 2\gamma_1\eta \int_{\Omega_1} \nabla U_t \cdot \nabla(h \cdot \nabla U) dx - \\
&- \rho_0 \int_{\Omega_1} |\Theta|^2 dx + \frac{\rho_0}{\tilde{k}(0)} \int_{\Omega_1} \Theta h_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k}' * \Theta) dx - \frac{\beta_0}{\tilde{k}(0)} \int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{k} * \Theta) \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k} * \Theta) dx + \\
&+ \frac{\beta_0}{2\tilde{k}(0)} \int_{\Omega_1} |\tilde{k} * \nabla \Theta|^2 dx - \frac{\mu}{\tilde{k}(0)} \int_{\Omega_1} \Delta U h_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k}' * \Theta) dx + \\
&+ \frac{1}{\tilde{k}(0)} \int_{\Omega_1} \mathcal{Q} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k} * \Theta) dx. \tag{4.60}
\end{aligned}$$

tomando η suficientemente pequeno segue nosso resultado. \square

Agora, denotemos por:

$$F(t) = G(t) + \epsilon_0 H(t)$$

então de (4.56) e (4.57), conclui-se que para: $\epsilon_0 \geq \max\{c_0, \frac{\mu^2}{4\beta_1 C_4}\}$ e $0 < \eta < \frac{c_1 \gamma_1}{2\epsilon_0 C_2}$ existem constantes positivas que denotaremos como c_i , onde $i = 1, 2, \dots, 5$, satisfazendo a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &\leq -c_1 \int_{\Gamma_1} |\Delta U|^2 dx - c_2 \int_{\Gamma_1} |\tilde{k} * \frac{\partial \Theta}{\partial \nu}|^2 dx - c_3 \int_{\Gamma_0} |\tilde{k} * \frac{\partial \Theta}{\partial \nu}|^2 dx - \\
&- c_4 E(t, U, \Theta, V) + c_5 \int_{\Omega_1} |\tilde{k} * \nabla \Theta|^2 dx. \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Para finalizar, denotemos por

$$\mathcal{L}(t) = N\mathcal{E}(t) + F(t).$$

Então, do Lema 3.2.1 e da desigualdade (4.61) temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -\beta_0 N \int_{\Omega_1} (\tilde{k} * \nabla \Theta) \cdot \nabla \Theta dx + c_5 \int_{\Omega_1} |\tilde{k} * \nabla \Theta|^2 dx - (c_4 - \eta c N) E(t, U, \Theta, V) - \\
&- c_1 \int_{\Gamma_1} |\Delta U|^2 dx - c_2 \int_{\Gamma_1} |\tilde{k} * \frac{\partial \Theta}{\partial \nu}|^2 dx - c_3 \int_{\Gamma_0} |\tilde{k} * \frac{\partial \Theta}{\partial \nu}|^2 dx. \tag{4.62}
\end{aligned}$$

Note que para, N suficientemente grande, existem constantes positivas C_1, C_2 tal que:

$$e^{2nt} E(t, u, \theta, v) \leq 2\mathcal{E}(t, U, \Theta, V) \leq C_1 \mathcal{L}(t) + C_2 \int_{\Omega_1} |\tilde{k} * \nabla \Theta|^2 dx \tag{4.63}$$

Integrando (4.62) de 0 a t , obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &\leq \mathcal{L}(0) - \beta_0 N \int_0^t \int_{\Omega_1} (\tilde{k} * \nabla \Theta) \cdot \nabla \Theta dx d\tau + c_5 \int_0^t \int_{\Omega_1} |\tilde{k} * \nabla \Theta|^2 dx d\tau - \\
&- (c_4 - \eta c N) \int_0^t E(\tau, U, \Theta, V) d\tau - c_1 \int_0^t \int_{\Gamma_1} |\Delta U|^2 dx d\tau - \\
&- c_2 \int_0^t \int_{\Gamma_1} |\tilde{k} * \frac{\partial \Theta}{\partial \nu}|^2 dx d\tau - c_3 \int_0^t \int_{\Gamma_0} |\tilde{k} * \frac{\partial \Theta}{\partial \nu}|^2 dx d\tau. \tag{4.64}
\end{aligned}$$

Portanto de (4.62) e (4.63), conclui-se

$$\begin{aligned}
e^{2\eta t} E(t, u, \theta, v) &\leq C_1 \mathcal{L}(0) - C_1 \beta_0 N \int_0^t \int_{\Omega_1} (\tilde{k} * \nabla \Theta) \cdot \nabla \Theta dx d\tau + \\
&+ c_5 C_1 \int_0^t \int_{\Omega_1} |\tilde{k} * \nabla \Theta|^2 dx d\tau + C_2 \int_{\Omega_1} |\tilde{k} * \nabla \Theta|^2 dx - \\
&- C_1 (c_4 - \eta c N) \int_0^t E(\tau, U, \Theta, V) d\tau - c_1 \int_0^t \int_{\Gamma_1} |\Delta U|^2 dx d\tau - \\
&- c_2 \int_0^t \int_{\Gamma_1} |\tilde{k} * \frac{\partial \Theta}{\partial \nu}|^2 dx d\tau - c_3 \int_0^t \int_{\Gamma_0} |\tilde{k} * \frac{\partial \Theta}{\partial \nu}|^2 dx d\tau. \tag{4.65}
\end{aligned}$$

dai usando os **Lemas 1.7.3** e **1.7.4** obtemos:

$$\begin{aligned}
e^{2\eta t} E(t, u, \theta, v) &\leq C_1 \mathcal{L}(0) - (C_1 \beta_0 N - c_5 C_1 \beta^{-1} C_k - 2k(0) C_2) \int_0^t \int_{\Omega_1} (\tilde{k} * \nabla \Theta) \cdot \nabla \Theta dx d\tau - \\
&- C_1 (c_4 - \eta c N) \int_0^t E(\tau, U, \Theta, V) d\tau - c_1 \int_0^t \int_{\Gamma_1} |\Delta U|^2 dx d\tau - \\
&- c_2 \int_0^t \int_{\Gamma_1} |\tilde{k} * \frac{\partial \Theta}{\partial \nu}|^2 dx d\tau - c_3 \int_0^t \int_{\Gamma_0} |\tilde{k} * \frac{\partial \Theta}{\partial \nu}|^2 dx d\tau. \tag{4.66}
\end{aligned}$$

Tomando $N > \frac{c_5 C_1 \beta^{-1} C_k + 2k(0) C_2}{C_1 \beta_0}$ e $0 < \eta < \frac{c_4}{cN}$ obtemos

$$E(t, u, \theta, v) \leq C_1 \mathcal{L}(0) e^{-2\eta t} \leq C E(0, u, \theta, v) e^{-2\eta t}.$$

De onde segue o decaimento exponencial da energia.

Observação 4.3.1 De (4.66) obtemos as seguintes regularidades:

$$\frac{d(k * \theta)}{d\nu} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_0)), \quad \frac{d(k * \theta)}{d\nu} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \quad \Delta u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)).$$

Capítulo 5

Instabilidade Exponencial e Decaimento Polinomial para Placas Elásticas

Neste capítulo estudamos a existência, unicidade e comportamento assintótico do problema abstrato $u_{tt} + Au_{tt} + A^2u + A^\alpha u_t = 0$. Mostraremos que $\forall \alpha \in [0, 1[$ a energia associada a este problema decai polinomialmente mais não exponencialmente.

5.1 Introdução

O estudo das vibrações transversais de uma viga elástica, causadas por uma força axial pode ser feito através da análise da seguinte equação

$$u_{tt} - u_{xxtt} + u_{xxxx} - \frac{1}{2L} \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right) u_{xx} + \gamma u_t - u_{xxt} = 0 \quad (5.1)$$

equação proposta por Woinowsky-Krieger em [36], onde o termo não linear representa a variação da tensão na viga devido a sua elasticidade. Vários autores têm estudado o problema da existência, unicidade e comportamento assintótico da solução para a equação (4.1), por exemplo veja Easley [7] e Ball [1], [2].

Uma formulação abstrata para o problema linear associado a (1.1), é dada pelo seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{tt} + Au_{tt} + A^2u + u_t + Au_t = 0 \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1. \end{cases} \quad (5.2)$$

onde A é um operador autoadjunto, positivo definido com domínio $D(A)$ denso num espaço de Hilbert H , com produto interno (\cdot, \cdot) e norma $|\cdot|$.

Neste capítulo estudaremos o seguinte problema abstrato

$$\begin{cases} u_{tt} + Au_{tt} + A^2u + A^\alpha u_t = 0 \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1. \end{cases} \quad (5.3)$$

para $0 \leq \alpha < 1$ e sendo A um operador autoadjunto, positivo definido com domínio $D(A)$ denso num espaço de Hilbert H , com produto interno (\cdot, \cdot) e norma $|\cdot|$. Além destas condições assumiremos que a família de espaços $\{D(A^s)\}_{s \in \mathbb{R}}$ seja decrescentes, isto é:

$$D(A^{s_1}) \hookrightarrow D(A^{s_2}), \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad s_1 > s_2,$$

e cada espaço é denso com imersão contínua e compacta.

O que resta do presente capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção 1 estudamos a existência das soluções fraca e forte, no contexto da teoria de semigrupo. Na seção 2 mostraremos que para $0 \leq \alpha < 1$ a energia associada ao problema (5.3) não decai exponencialmente, para tais resultados usaremos as técnicas dadas por S.Chen [6], L.Gearhart [10], J. Prüs [32]. Na seção 3, mostraremos que a energia associada ao problema (5.3) decai polinomialmente com taxa de ordem $\frac{1}{t}$, para obter este resultado precisamos de maior regularidade nos dados iniciais. Na seção 4, mostraremos uma aplicação do sistema abstrato.

Denotemos por $E(t)$ a energia associada ao sistema (5.3), como sendo

$$E(t) \equiv E(t, u) = \frac{1}{2} \left\{ |Au|^2 + |u_t|^2 + |A^{\frac{1}{2}}u_t|^2 \right\}.$$

Multiplicando a primeira equação de (5.3) por u_t em H , obtém-se:

$$\frac{d}{dt} E(t) = -|A^{\frac{\alpha}{2}}u_t|^2 \quad (5.4)$$

de onde concluímos que a energia $E(t)$ é decrescente. Para estudar o sistema (5.3) no contexto de semigrupos, introduzimos a seguinte variável:

$$v = u_t$$

assim, o problema (5.3) pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U = \mathcal{B}U \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (5.5)$$

onde:

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}U = \begin{pmatrix} v \\ -(I + A)^{-1}(A^2u + A^\alpha v) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Denotemos por \mathcal{H} o espaço

$$\mathcal{H} = D(A) \times D(A^{\frac{1}{2}})$$

é simple verificar que \mathcal{H} é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno:

$$\left\langle (u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \right\rangle_{\mathcal{H}} = (Au, A\tilde{u}) + (v, \tilde{v}) + (A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}\tilde{v})$$

e a norma dada por:

$$\|U\|^2 = |Au|^2 + |v|^2 + |A^{\frac{1}{2}}v|^2.$$

Definimos o operador \mathcal{B} do seguinte modo:

$$\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$$

onde

$$D(\mathcal{B}) = D(A^2) \times D(A).$$

5.2 Existência de Solução

Para mostrar a existência de soluções fortes formularemos o problema no contexto de semi-grupo.

Lema 5.2.1 *Seja \mathcal{B} o operador definido por (3.4), então \mathcal{B} é gerador infinitesimal de um semigrupo \mathcal{C}_0 de contrações $S(t) = e^{t\mathcal{B}}$ em \mathcal{H} .*

Demonstração: Basta provar que:

- (i) \mathcal{B} é um operador linear, com domínio denso em \mathcal{H}
- (ii) \mathcal{B} é dissipativo, isto é, $Re \left\langle \mathcal{B}U, U \right\rangle_{\mathcal{H}} \leq 0$. Finalmente
- (iii) $0 \in \rho(\mathcal{B})$

Com efeito:

(i) Da definição de \mathcal{B} e de $D(\mathcal{B})$ e lembrando que $\mathcal{H} = D(A) \times D(A^{\frac{1}{2}})$ concluímos que $D(\mathcal{B})$ é denso em \mathcal{H} .

(ii) Da definição de \mathcal{B} e do produto interno em \mathcal{H} , temos

$$\left\langle \mathcal{B}U, U \right\rangle_{\mathcal{H}} = (Av, Au) - ((I + A)^{-1}(A^2u + A^\alpha v), v) - (A^{\frac{1}{2}}(I + A)^{-1}(A^2u + A^\alpha v), A^{\frac{1}{2}}v)$$

$$= (Av, Au) - ((I + A)^{-1}(A^2u + A^\alpha v), v) - ((I + A)^{-1}(A^2u + A^\alpha v), Av)$$

$$= (Av, Au) - ((I + A)^{-1}(A^2u + A^\alpha v), (I + A)v)$$

$$\begin{aligned}
&= (Av, Au) - (A^2u + A^\alpha v, v) \\
&= -(A^\alpha v, v)
\end{aligned}$$

de onde concluímos que:

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{B}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -|A^{\frac{\alpha}{2}}v|^2 \leq 0$$

(iii) Da definição de \mathcal{B} nos podemos mostrar sim dificuldade que \mathcal{B} é injetivo. Além disso, verifica-se também que \mathcal{B} é sobrejetivo, pois dado $F=(f, g) \in \mathcal{H}$, temos a existência de $U=(u, v) \in D(\mathcal{B})$, onde $u = -A^{-1}[A^{-1}(I + A)g + A^{\alpha-1}v]$ e $v = f$, tais que:

$$\mathcal{B}U = F$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} v = f \\ -(I + A)^{-1}(A^2u + A^\alpha v) = g. \end{cases} \quad (5.7)$$

Agora, como $D(A)$ está imerso continuamente em $D(A^{\frac{1}{2}})$, usando as desigualdades de Schwartz e Young, obtém-se a seguinte estimativa:

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq c\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, $\mathcal{B}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, e $0 \in \rho(\mathcal{B})$.

Teorema 5.2.1 (i) Se $U_0 \in \mathcal{H}$, então $U(t) = S(t)U_0 = (u, u_t)$ é solução de (5.3), no seguinte sentido

$$u \in \mathcal{C}([0, \infty[; D(A)) \cap \mathcal{C}^1([0, \infty[; D(A^{\frac{1}{2}}))$$

(ii) Se $U_0 \in D(\mathcal{B})$, então $U(t) = S(t)U_0 = (u, u_t)$ é solução forte de (5.3), no seguinte sentido:

$$u \in \mathcal{C}([0, \infty[; D(A^2)) \cap \mathcal{C}^1([0, \infty[; D(A)) \cap \mathcal{C}^2([0, \infty[; D(A^{\frac{1}{2}}))$$

5.3 Instabilidade Exponencial

Nesta seção usaremos o Teorema 1.5.4 para mostrar que a solução do sistema (5.3) não decai exponencialmente. Portanto, para obter a instabilidade exponencial, é suficiente mostrar a

existência de seqüências $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\beta_n| = +\infty$, tais que:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|(i\beta_n I - \mathcal{B})^{-1}\| = \infty \quad (5.8)$$

Para isto consideremos o problemas de autovetores para o operador A ,

$$\begin{cases} Aw_n = \lambda_n w_n \\ \lambda_n \rightarrow +\infty \quad \text{tal que} \quad \|w_n\| = 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

Consideremos $\beta_n = \sqrt{\lambda_n}$, $F \equiv F_n = (0, w_n) \in \mathcal{H} = D(A) \times D(A^{\frac{1}{2}})$, e seja $U = (u, v) \in D(\mathcal{B})$ solução do seguinte sistema:

$$(i\sqrt{\lambda_n} I - \mathcal{B})U = F \quad (5.10)$$

isto é :

$$\begin{cases} i\sqrt{\lambda_n}u - v = 0 \\ i\sqrt{\lambda_n}v + (I + A)^{-1}A^2u + (I + A)^{-1}A^\alpha v = w_n \end{cases} \quad (5.11)$$

de (5.11)₁, temos:

$$u = c_1 w_n \quad v = i\sqrt{\lambda_n} c_1 w_n$$

logo substituindo em (5.11)₂, obtém-se

$$c_1 = -\frac{(1 + \lambda_n)(\lambda_n + i\lambda_n^\alpha \sqrt{\lambda_n})}{\lambda_n^2 + \lambda_n^{2\alpha+1}}.$$

Finalmente de (5.10), temos:

$$\|(i\sqrt{\lambda_n} I - \mathcal{B})^{-1}F\|_{\mathcal{H}}^2 = \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \geq |A^{\frac{1}{2}}v|^2 = \frac{\lambda_n^3 + \lambda_n^2}{\lambda_n^2 + \lambda_n^{2\alpha+1}} |F|_{\mathcal{H}}^2$$

de onde

$$\|(i\sqrt{\lambda_n} I - \mathcal{B})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} > \sqrt{\frac{\lambda_n^3 + \lambda_n^2}{\lambda_n^2 + \lambda_n^{2\alpha+1}}} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty$$

verificando-se assim (5.8) $\forall \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, portanto o semigrupo é instavel exponencialmente.

5.4 Decaimento Polinomial

Nesta seção tomaremos os dados iniciais $U_0 = (u_0, u_1)$ mais regulares, os quais nos permitem definir a energia de primer ordem.

Teorema 5.4.1 *Seja $U_0 = (u_0, u_1) \in D(A^3) \times D(A^2)$. Então existe uma constante C tal que:*

$$E(t) \leq \frac{C}{t} \{(E(0) - E_1(0))\}$$

Demonstração: Da equação (5.3) e do Teorema 4.1.1 temos que $u_t, u_{tt} \in D(A^{\frac{\alpha}{2}})$ q.s. em $[0, T]$. Denotemos por:

$$E_1(t) \equiv E(t, u_t)$$

derivando a equação (5.3)₁ com respeito a t , multiplicando por u_t em H obtemos:

$$\frac{d}{dt} E_1(t) = -|A^{\frac{\alpha}{2}} u_{tt}|^2$$

Por outro lado, multiplicando a equação (5.3)₁ por u em H , obtemos:

$$\frac{d}{dt} \left\{ (u_t, u) + (A^{\frac{1}{2}} u_t, A^{\frac{1}{2}} u) + |A^{\frac{\alpha}{2}} u|^2 \right\} = |u_t|^2 + |A^{\frac{1}{2}} u_t|^2 - |Au|^2$$

usando a desigualdade e Young, conclui-se:

$$\frac{d}{dt} \left\{ (u_t, u) + |A^{\frac{\alpha}{2}} u|^2 \right\} \leq |u_t|^2 - \frac{1}{2} |Au|^2 + \frac{1}{2} |u_{tt}|^2$$

Note que $|u|_H \leq \lambda_1^{-\frac{\alpha}{4}} |u|_{D(A^{\frac{\alpha}{2}})}$. Denotemos por R o funcional

$$\mathcal{R}(t) = 2N\gamma^2(E(t) + E_1(t)) + N\varphi(t) + \psi(t)$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma &= \lambda_1^{-\frac{\alpha}{4}}, & \varphi(t) &= (u_t, u) + |A^{\frac{\alpha}{2}} u|^2 \\ \psi(t) &= -(u_t, u) - (A^{\frac{1}{2}} u_t, A^{\frac{1}{2}} u) - |A^{\frac{\alpha}{2}} u|^2 \end{aligned}$$

ao derivar o funcional $\mathcal{R}(t)$ com respeito a t , obtemos:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{R}(t) \leq -(N+1)|u_t|^2 - |A^{\frac{1}{2}} u_t|^2 - \left(\frac{N}{2} - 1\right) |Au|^2 - \frac{3N}{2} |u_{tt}|^2,$$

agora, tomando $N > 2$, concluímos que existe uma constante $c_1 = \min\{N+1, 1, \frac{N}{2} - 1\}$, satisfazendo

$$\frac{d}{dt} \mathcal{R}(t) \leq -c_1 E(t)$$

logo, integrando de 0 a t obtemos.

$$\int_0^t E(\tau) d\tau \leq \frac{1}{c_1} (\mathcal{R}(0) - \mathcal{R}(t)) \leq c_2 (E(0) + E_1(0)).$$

Finalmente de

$$\frac{d}{dt} \left\{ tE(t) \right\} = E(t) + t \frac{d}{dt} E(t) \leq E(t)$$

temos que

$$E(t) \leq \frac{c_2}{t} (E(0) + E_1(0))$$

de onde concluímos o decaimento polinomial da energia. ■

5.5 Aplicação

Uma aplicação deste problema abstrato está dada pela seguinte sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xxtt} + u_{xxxx} + u_t = 0 & \text{em }]0, L[\times]0, \infty[\\ u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(L, t) = u_{xx}(L, t) = 0, & \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \forall x \in]0, L[. \end{cases} \quad (5.12)$$

neste caso estamos considerando no problema abstrato que $\alpha = 0$ e $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, munido as condições de Dirichlet. De acordo com os resultados das seções anteriores, o sistema (5.12) não decai exponencialmente. Porém a dissipação friccional introduzida em (5.12)₁ é capaz de produzir decaimento polinomial em normas "diferentes" da solução u de (5.12). Como é mostrado na seção 5.4.

Referências bibliográficas

- [1] Ball, J. M., **Initial-boundary value problems for an extensible beam**, J. Math. Appl. 42(1973), 61-90.
- [2] Ball, J. M., **Stability theory for an extensible beam**, J. Differential Equations, 14(1973),399-418.
- [3] Bisognin, E., Bisognin, V., Perla Menzala, G., Zuazua, E. **On exponential stability for von Kármán equations in the presence of thermal effects**. Math. Methods in the Applied Sciences, Vol. 21, pp 393-416, 1998.
- [4] Brezis, H. **Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications**. Masson, Paris, 1983.
- [5] Carroll, R. W. **Abstract Methods in Partial Differential Equations**. Harper and Row, New York, 1969.
- [6] Chen, S., Liu, K., and Liu, Z. **Spectrum and Stability for Elastic Systems with Global or Local Kelvin-Voigt Damping**. Siam J. Appl. Math, 59(2)(1998),651-668.
- [7] Eisley, J. G., **Nonlinear vibrations of beams and rectangular plates**, Z. Angew,Math. Phys 15(1964), 167-175.
- [8] Fabrizio, M.,Lazzari, B. and Rivera, J. **Asymptotic behaviour of thermoelastic plate of weakly hyperbolic type**, Differential and Integral Equations, 13(2000), 1347-1370.
- [9] Fabrizio, M. and Morro, A. **Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity.**, SIAM Studies, Philadelphia, 1992.
- [10] Gearhart, L. **Spectral Theory for Contractions Semigroups on Hilbert Space**. Trans. Amer. Math. Soc.,236,pp 385-394, 1978.
- [11] Gurtin, M.E. and Pipkin, A.C. **A general theory of heat conduction with finite wave speeds**. Arch. Rational Mech. Anal 31,113-126 (1968).

- [12] Kim, J. U. **On the energy decay of a linear thermoelastic plates.** SIAM J. Math. Anal., Vol. 23, (1992) 889-899.
- [13] Lagnese, J. **Boundary stabilization to thin plates.** SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol. 10, 1989.
- [14] Lagnese, J. E. and Leugering, G. **Uniform stabilization of a nonlinear beam by nonlinear boundary feedback.** J. Diff. Eqns 91 (1991),355-388.
- [15] Leugering,G. **On boundary feedback stabilisability of a viscoelastic beam.** Proc. Roy. soc. Edinburgh Sect. Vol. 114(1-2) 57-69(1990).
- [16] Liu, Z.Y. and Renardy, M. **A note on the equations of a thermoelastic plate.** Appl. Math. Lett. 8(3)(1995),1-6.
- [17] Lions, J. L. **Quelques Méthodes de Resolution des Problèmes aux Limites non Lineaires.** Dunod Gauthiers Villars, Paris, 1969.
- [18] Lions, J. L., **Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués.** Tome 1 (Masson, Paris 1988).
- [19] Lions, J. L. and Magenes, E. **Non-homogeneous boundary value problems and applications** Springer-Verlag, 1972.
- [20] Liu, Z. and Zheng, S. **Semigroups Associated with Dissipative Systems,** Chapman & Hall/CRC Research notes in Mathematics 398(1999).
- [21] Linz, P. **Analytical and numerical methods for volterra equations.** SIAM. Philadelphia, 1985.
- [22] Pazy, A.**Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Diferential Equations.** Springer-Verlag, New York. 1983.
- [23] Renardy, M. ,Hrusa, W. J. and Nohel J. A. **Mathematical Problems in Viscoelasticity.** Pitman Monographs and Survey i Pure an Applied Mathematics 35,1987.
- [24] Muñoz Rivera, J. E. **Tópicos em Termoelasticidade e Viscoelasticidade.** Rio de Janeiro, LNCC, 1997.
- [25] Muñoz Rivera, J. E. **Teoria das distribuições e Equações Diferenciais Parciais.** Textos Avançados, LNCC, 1999.

- [26] Muñoz Rivera, J. E. and Shibata, Y. **A linear thermoelastic plate equations with Dirichlet boundary condition.** Math. Met. Appl. Sc. ,20(11) (1997), 915-932.
- [27] Muñoz Rivera, J. E. and Portillo, O. H. **The transmission problem of viscoelastic waves.** Acta Applicae Mathematica, Vol. 60, N°. I, pp 1-21, 2000.
- [28] Muñoz Rivera, J. E. and Perla Menzala, G. **Decay rates of solutions to a von Kármán system for viscoelastic plates with memory.** Quarterly of Applied Mathematics, Vol. LVIII, N°. I, pp 181-200, 1999.
- [29] Muñoz Rivera, J. E. and Perla Menzala, G. **Uniform rates of decay for full von Kármán system of dynamic viscoelasticity with memory.** Asymptotic Analysis (to appear)
- [30] Muñoz Rivera, J. E. and Racke, R. **Smoothing properties , decay and global existence of solutions to nonlinear coupled systems of thermoelastic type.** Siam J. Math. Anal. 26(6) (1995), 1547-1563.
- [31] Puel, J. and Tucsnack, M. **Boundary stabilization for the von Kármán equations.** SIAM J. Control and Optimization, 33(1), pp 255-273, 1995.
- [32] Pruss, J., **An the spectrum of C_0 -semigroups.** Trans. AMS,28(1984),847-857.
- [33] Shibata, Y. **On the exponential decay of thermoelastic plate.** Comp. Appl. Math. , Vol. 13, pp 81-102, 1994.
- [34] Staffans, O.J. **Positive definite Measures with Applications to Volterra Equation** Transactions of the American Mathematical Society. vol. 218, 1976.
- [35] Teman, R. **Navier- Stokes Equation, Theory and Numerical Analysis.** 3rd rev. ed., North Holland, Amsterdam 1979.
- [36] Woinowsky-Krieger, S. **The effect of axial force on the vibration of hinged bars,**J. Appl. Mech. ,17(1950),35-36.