UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
CM041
PROFESSOR JOSÉ RENATO RAMOS BARBOSA
RESPOSTAS/SOLUÇÕES/DICAS/SUGESTÕES DO GONICK

1. Estude o **Capítulo 0** (que faz uma revisão sobre as FUNÇÕES ESTUDADAS NO ENSINO MÉDIO) do livro do GONICK. Resolva então os quinze problemas de tal capítulo. **(Página 60.)**
OBSERVAÇÃO: Nas respostas de seis dos nove primeiros problemas, os domínios estão descritos apenas por propriedades que caracterizam seus elementos. Os itens que correspondem a tais respostas podem iniciar com " É o conjunto que consiste de todo ...".
ERRATA: No problema 13, para $1 < x < 2$, a definição correta é $f(x) = (x-1)^2 - 1$!
RESPOSTAS/SUGESTÕES/RESOLUÇÕES:

1. Todo $t \neq \frac{1}{2}$;

2. Todo $b \geq \frac{1}{2}$ exceto $b = 4$;

3. Todo $x \neq \pm 1$;

4. O intervalo $[-2, 2]$;

5. Todo θ exceto $\theta = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ e $\theta = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$;

6. Todo $x \neq 0$;

7. O intervalo $(-\infty, 0)$;

8. Todo número real;

9. O intervalo $(1, \infty)$;

10. **(Cf. Link do Autor (Gonick) na Minha Homepage)**;

11a. Interna: $t(x) = \cos x$; externa: $s(t) = 2^t$; composta: $h(x) = s(t(x))$;

11b. Mais interna: $w(x) = x^2 - 1$; do meio: $v(w) = \ln w$; externa: $u(v) = \sqrt{v}$; composta: $h(x) = u(v((w(x))))$;

11c. Interna: $g(x) = e^x$; externa: $f(y) = 4y^3 + y^2 + 6y - 99$; composta: $h(x) = f(g(x))$;

12. Seja $x = y + c$. Daí

$$P(y+c) = b_0 + b_1(y+c) + b_2(y+c)^2 + \cdots + b_n(y+c)^n.$$

Expandindo os binômios e agrupando termos de potências iguais, obtemos uma expressão da forma

$$P(y+c) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_n y^n,$$

isto é,

$$P(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n$$

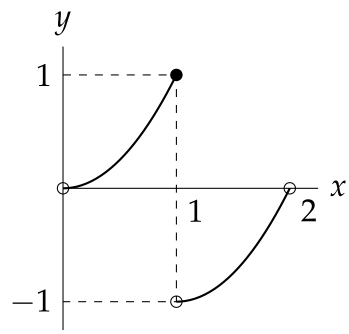
com $P(c) = a_0$. Esta última igualdade e a comparação dos coeficientes de potências iguais da última expressão para $P(x)$ com a inicial,

$$P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n,$$

implicam que

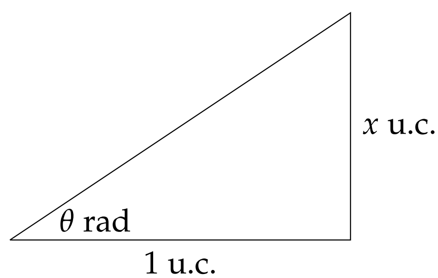
$$a_0 = b_0 + b_1 c + b_2 c^2 + \cdots + b_n c^n,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots,\ a_n = b_n.$$

13. $f(x)$ é injetora mas não crescente em todo seu domínio. (Justifique!)



Este é o gráfico de $f(x)$ definida em $(0, 2)$.

14. Considere o seguinte triângulo:



Daí, como

$$\tan\theta = \frac{x}{1},\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

temos, respectivamente, que

$$\theta = \arctan x,\ \theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ e } \theta = \operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

15. $t = \frac{\ln 2}{r}$ anos.

2. Estude o **Capítulo 1** (sobre LIMITES DE FUNÇÕES REAIS DE UMA VARIÁVEL REAL) do livro do GONICK. Resolva então os dez primeiros problemas de tal capítulo. **(Página 84.)**

RESPOSTAS/SUGESTÕES/RESOLUÇÕES:

1. O limite é 6.

2. O limite é $6 + C$.

3. O limite é $1/4$.

4. O limite é $-\infty$.

5. O limite é 6.

6. O limite é 0.[1]

7. O limite é 3.[2]

8. O limite é 2.

9. O limite é ∞.[3]

10. O limite é 0.[4]

3. Estude o **Capítulo 2** (sobre DERIVADAS DE FUNÇÕES REAIS DE UMA VARIÁVEL REAL) do livro do GONICK. Resolva então os treze primeiros problemas de tal capítulo. **(Página 108.)**
OBSERVAÇÃO: Como o autor mesmo reconhece numa errata da edição que estamos usando, por descuido, as resoluções de alguns problemas exigem o uso da regra da

---

[1]Segue do Teorema do Sanduíche.
De fato, $\frac{1}{x-1}$ é positivo e, por ter um numerador de grau 0 e um denominador de grau 1, tem limite nulo para $x \to \infty$. Nestas condições, note ainda que

$$-\frac{1}{x-1} \leq \frac{\cos x}{x-1} \leq \frac{1}{x-1}.$$

[2]Sugestões para três soluções distintas:

- Como $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, tal limite iguala

$$\lim_{x \to 1}(x+2) = 3.$$

- A substituição $h = x - 1$ (e alguma simplificação) iguala o limite procurado ao

$$\lim_{h \to 0}(h+3) = 3.$$

- A substituição $y = \frac{1}{x-1}$ (e alguma simplificação) iguala o limite procurado ao

$$\lim_{y \to \infty}\left(3 + \frac{1}{y}\right) = 3.$$

[3]Note que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{x}.$$

[4] RESOLUÇÕES:

- Seja $y = \frac{1}{x}$. Daí $x \to 0$ é equivalente a $y \to \infty$. Então

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{y \to \infty} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \\ &= 0.\end{aligned}$$

- Tal limite é zero. Isto segue do Teorema do Sanduíche.
De fato, por um lado,

$$\begin{aligned}|x \operatorname{sen}(1/x)| \leq |x| &\Rightarrow \pm x \operatorname{sen}(1/x) \leq |x| \\ &\Rightarrow -|x| \leq x \operatorname{sen}(1/x) \leq |x|.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

cadeia, só estudada no **capítulo 3**!

REGRAS DAS DERIVADAS DO PRODUTO E DO QUOCIENTE:

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

onde existirem as derivadas das funções $f(x)$ e $g(x)$. Neste caso, onde $g(x) \neq 0$, segue que

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.\end{aligned}$$

RESPOSTAS/SUGESTÕES/RESOLUÇÕES:

1. $f'(x) = 3x^2 + 5$.

2. $f'(x) = 3x^2 + 5$.

3. $P'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{2}\ln x\right)$.[5]

4. $g'(x) = 0$.

5. $h'(x) = -\operatorname{sen} x + \frac{5}{3}x^{-4/3}$.[6]

6. $R'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$.

7. $u(x) = -\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{e^x}$.

8. $v'(t) = \tan t \sec t$.

9. $F'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$.[7]

10. $B'(\theta) = \tan\theta\sec^2\theta$.[8]

11. $Q'(x) = -529\frac{2x^3-x^2+1}{(x^3-x^2-x-1)^2}$.

12. Diretamente da regra da derivada do quociente, temos

$$F'(p) = \frac{(-\operatorname{sen} p + e^p + pe^p)\left(p^{10} + p^{-2}\right) - (\cos p + pe^p)\left(10p^9 - 2p^{-3}\right)}{\left(p^{10}+p^{-2}\right)^2}.$$

13a. $A'(t) = -9,8t + 30$ é a velocidade no tempo t em m/s. Assim $A'(3) = (-9.8)(3) + 30 = 0,6$ m/s e $A'(5) = (-9.8)(5) + 30 = -19$ m/s são as velocidades nos instantes $t = 3$ s e $t = 5$ s, respectivamente.

13b. Aqui $A'(t) = -9,8t + 45$. A dica sugere que na altura máxima atingida pela bola, sua velocidade é zero. Seja então $A'(t) = 0$. Daí $-9,8t + 45 = 0$. Logo a altura máxima é atingida em torno de $t = 4,6$ s e é aproximadamente $A(4,6) = 103,316$ m. O tempo total para a bola subir e descer é em torno de $9,2$ segundos: $4,6$ segundos subindo e $4,6$ segundos descendo.

[5] O cálculo da derivada de $\sqrt{x}$ depende do material do **Capítulo 3**.

[6] O cálculo da derivada de $\sqrt[3]{x}$ depende do material do **Capítulo 3**.

[7] Necessita do material do **Capítulo 3**.

[8] Aplique a regra da derivada do produto em $B(\theta) = \tan\theta\cdot\tan\theta$!

4. Estude o **Capítulo 3** (sobre a REGRA DA CADEIA PARA FUNÇÕES REAIS DE UMA VARIÁVEL REAL) do livro do GONICK. Resolva os cinco primeiros problemas deste capítulo. **(Página 124.)**[9]

REGRA DA CADEIA:

> Se $y = f(x)$ e $z = g(y)$ são as funções interna e externa, respectivamente, de uma função composta, isto é, a composição $z = g(f(x))$ é possível, então
>
> $$\begin{aligned}\big(g(f(x))\big)' &= f'(x) \cdot g'(y) \\ &= f'(x) \cdot g'(f(x)),\end{aligned}$$
>
> isto é, a derivada da composta (em relação a x) é igual ao produto da derivada de sua função interna (em relação a x) pela derivada de sua função externa (em relação a y), onde existam tais derivadas. Outra notação útil para tal regra é a seguinte:
>
> $$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

RESPOSTAS/SUGESTÕES/RESOLUÇÕES:

1. $f(g(u)) = \cos^2 u$, $g(f(x)) = \cos\left(x^2\right)$;
$\big(f(g(u))\big)' = -2\operatorname{sen} u \cos u$, $\big(g(f((x)))\big)' = -2x \operatorname{sen}\left(x^2\right)$.

2. $v(u(x)) = e^{-x^2}$, $u(v(t)) = -e^{2t}$;
$\big(v(u(x))\big)' = -2xe^{-x^2}$, $\big(u(v((t)))\big)' = -2e^{-2t}$.

3a. $f'(t) = \frac{1}{2}(2t+1)\left(1+t+t^2\right)^{-1/2}$.

3b. $g'(x) = -100 \operatorname{sen} x \cos x \left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)^{24}$.

3c. $h'(\theta) = 2\tan\theta\sec^2\theta$.

3d. $P'(r) = 20r\left(r^2+7\right)^9$.

3e. $P'(r) = -20r\left(r^2+7\right)^{-11}$.

3f. $f'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{y}\right)$.

3g. $E'(x) = E(x)$.

3h. $F'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x-a}{2}}$.

3i. $u'(t) = 6t^3\left(t^4+7\right)^{1/2}$.

3j. $-\frac{2z\cos(z)^2}{3}\left(\operatorname{sen}(z)^2+2\right)^{-4/3}$.

[9] No enunciado da questão **3**, leia-se "ENCONTRE A DERIVADA DAS FUNÇÕES ABAIXO:". Nos itens **i,k**, $u(x)$ e $R(x)$ são, na verdade, $u(t)$ e $R(t)$.

3k. $R'(t) = -\frac{10(t+1)^4}{(t-1)^6}$.

4. Como $y = f(x)$ é diferenciável,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\big(\ln f(x)\big) &= \frac{d}{dx}\big(f(x)\big) \cdot \frac{d}{dy}(\ln y) \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{y} \\ &= \frac{f'(x)}{f(x)}. \end{aligned}$$

5a.

$$\ln f(x) = 5\ln x + x - \frac{1}{3}\ln(1+x);$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x} + 1 - \frac{1}{3(1+x)};$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^5 e^x (1+x)^{-1/3} \left(\frac{5}{x} + 1 - \frac{1}{3(1+x)} \right) \\ &= \frac{1}{3} x^4 e^x (1+x)^{-4/3} \left(3x^2 + 17x + 15 \right). \end{aligned}$$

5b.

$$\ln g(x) = \sqrt{x}\ln x;$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x};$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) g(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2}\ln x + 1 \right) x^{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

5c.

$$h(x) = (x+5)(x-8)^{-1/3};$$

$$\ln h(x) = \ln(x+5) - \frac{1}{3}\ln(x-8);$$

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{1}{x+5} - \frac{1}{3(x-8)};$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x+5)(x-8)^{-1/3} \left(\frac{3x - 24 - x - 5}{3(x+5)(x-8)} \right) \\ &= \frac{(x-8)^{-4/3}(2x-29)}{3}. \end{aligned}$$

5. Estude o **Capítulo 4** (sobre APLICAÇÕES DE DERIVADAS IMPLÍCITAS) do livro do GONICK. Resolva os cinco problemas deste capítulo. **(Página 132.)**

RESPOSTAS/SUGESTÕES/RESOLUÇÕES:

1. Primeiramente, temos a seguinte errata:

- O problema pede para obtermos $h'(t)$ em termos de V' e y. Na verdade deveria ser em termos de V' e h.
- Ignore a fórmula para o volume da água apresentada e use (no lugar) a seguinte:

$$V = \pi\left(Rh^2 - \frac{h^3}{3}\right).$$

Então, derivando em relação a variável t, temos

$$\begin{aligned} V' &= \pi\left(2Rhh' - h^2h'\right) \\ &= \pi h\left(2R - h\right)h', \end{aligned}$$

isto é,

$$h' = \frac{V'}{\pi h(2R-h)}.$$

2. Por um lado, derivando a equação da elipse em relação a x, temos

$$\begin{aligned} \frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 &\Longrightarrow \frac{yy'}{b^2} = -\frac{x}{a^2} \\ &\Longrightarrow y' = -\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Esta é a inclinação da elipse no ponto (x, y). Por outro lado, derivando a equação da elipse em relação a t, temos

$$\begin{aligned} \frac{2x(t)x'(t)}{a^2} + \frac{2y(t)y'(t)}{b^2} = 0 &\Longrightarrow \frac{y(t)y'(t)}{b^2} = -\frac{x(t)x(t)'}{a^2} \\ &\Longrightarrow \frac{y(t)'}{x(t)'} = -\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{x(t)}{y(t)}. \end{aligned}$$

Assim, $y'(t)/x'(t)$ é a inclinação da elipse no instante t.

3. Se C e A são funções de t, podemos derivá-las em relação a tal variável. Daí, eliminando r, temos:

$$\begin{aligned} C = 2\pi r \text{ e } A = \pi r^2 &\Longrightarrow C^2 = 4\pi A \\ &\Longrightarrow 2CC' = 4\pi A' \\ &\Longrightarrow A' = \frac{CC'}{2\pi}. \end{aligned}$$

4. Quando $y = 12$, $y' = -3/4$ metros por segundo.[10]

De fato, por um lado, como $x'(t) = 1$ m/s durante todo o deslocamento do 'pé'

[10]Negativa pois a distância vertical está diminuindo!

da escada para a esquerda,[11]

$$
\begin{aligned}
x(t)^2 + y(t)^2 = 15^2 &\Longrightarrow 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0 \\
&\Longrightarrow y'(t) = -\frac{x(t)x'(t)}{y(t)} \\
&\Longrightarrow y'(t) = -\frac{x(t)}{y(t)} \text{ m/s.}
\end{aligned}
$$

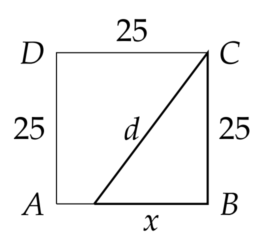
Por outro lado, quando $y(t_0) = 12$ m,

$$
\begin{aligned}
x(t_0) &= \sqrt{225 - y(t_0)^2} \\
&= \sqrt{81} \\
&= 9 \text{ m.}
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
y'(t_0) &= -\frac{x(t_0)}{y(t_0)} \\
&= -\frac{9}{12} \text{ m/s.}
\end{aligned}
$$

5. Seja x a distância do caracol ao vértice B.



O problema estabelece que $x' = -1$ cm/s. (Negativa pois a distância está ficando menor.) Temos ainda que

$$d^2 = x^2 + 25^2.$$

Daí

$$dd' = xx'$$

e, quando

$$
\begin{aligned}
x &= 25 - 10 \\
&= 15 \text{ cm,}
\end{aligned}
$$

isto é, quando

$$
\begin{aligned}
d &= \sqrt{225 + 625} \\
&= \sqrt{850} \text{ cm,}
\end{aligned}
$$

[11] A velocidade horizontal é positiva pois a distância horizontal está aumentando!

temos que

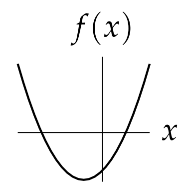
$$\begin{aligned} d' &= -\frac{15}{\sqrt{850}} \\ &\approx -0,514 \text{ cm/s}. \end{aligned}$$

(Agora, se x é a distância do caracol ao vértice A, a resolução é análoga a anterior, só que neste caso $x' = 1$ cm/s (pois a distância está ficando maior) e temos de obter d' quando $x = 10$ cm.)

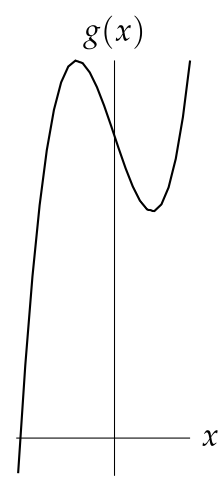
6. Estude o **Capítulo 5** (sobre OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES REAIS DE UMA VARIÁVEL REAL) do livro do GONICK. Resolva os quatro primeiros problemas deste capítulo. **(Página 152.)**

RESPOSTAS/SUGESTÕES/RESOLUÇÕES:

1a. $x = -\frac{1}{2}$ é ponto de mínimo (global); $f(-0,5) = -1,25$; o gráfico tem concavidade para cima (pois a medida que x cresce, a inclinação $f'(x)$ cresce com x);[12] $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$.



1b. $g'(x) = 3x^2 - 3$ e $g''(x) = 6x$. Daí $x = -1$ é máximo local, $x = 1$ é mínimo local e $x = 0$ é ponto de inflexão. Note ainda que: $g(-1) = 10$, $g(0) = 8$ e $g(1) = 6$; a concavidade muda de 'para baixo' para 'para cima' em $x = 0$ pois, a medida que x cresce, a inclinação $g'(x)$ decresce para $x \in (-\infty, 0)$ e cresce para $x \in (0, \infty)$;[13] $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$.



[12] A taxa de variação de $f'(x)$ em relação a x, isto é, $(f')'(x) = f''(x)$, é sempre positiva.

[13] A taxa de variação de $g'(x)$ em relação a x, isto é, $(g')'(x) = g''(x)$, é negativa para $x < 0$ e positiva para $x > 0$.

1c.

$$h'(t) = 6t^2 - 6t - 36$$
$$= 6(t+2)(t-3)$$

e $h''(t) = 12t - 6$. Daí $t = -2$ é máximo local, $t = 3$ é mínimo local e $t = \frac{1}{2}$ é ponto de inflexão. Note ainda que: $h(-2) = 43$, $h(0,5) = -19,5$ e $h(3) = -82$; a concavidade muda de 'para cima' para 'para baixo' em $t = 0,5$ pois, a medida que t cresce, a inclinação $h'(t)$ decresce para $t \in (-\infty, 1/2)$ e cresce para $t \in (1/2, \infty)$;[14] $\lim\limits_{t\to-\infty} h(t) = -\infty$ e $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = \infty$.[15]

1d. $S'(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$ e $S''(x) = 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$. Daí os extremos locais têm lugar onde o seno ou o cosseno se anulam, mínimos onde o seno se anula, isto é, em

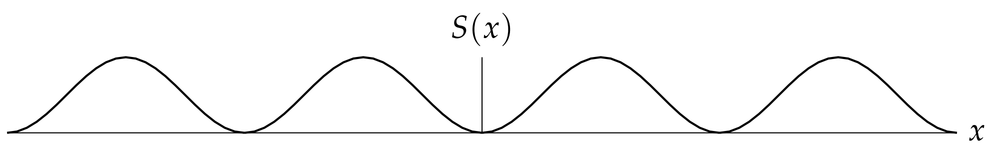
$$0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots,$$

e máximos onde o cosseno se anula, isto é, em

$$\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots,$$[16]

e pontos de inflexão onde cosseno e seno se igualam em módulo, isto é, em

$$\pm\pi/4, \pm 3\pi/4, \ldots.$$



Para a concavidade, devemos buscar intervalos entre os pontos de inflexão onde a taxa de variação da inclinação $S'(x)$ é ou positiva ou negativa, isto é, ou $S''(x) > 0$ ou $S''(x) < 0$. No primeiro caso, $S'(x)$ cresce e a concavidade do gráfico de $S(x)$ é para cima. No segundo, ocorre exatamente o oposto. Assim, por exemplo, entre -$\pi/4$ e $\pi/4$, $S''(x) > 0$ pois o cosseno é maior em módulo que o seno nesse intervalo. Daí a concavidade é para cima em $(-\pi/4, \pi/4)$. Como $\pm\pi/4$ são pontos de inflexão, em $(-3\pi/4, -\pi/4)$ e $(\pi/4, 3\pi/4)$ a concavidade é para baixo. Como $\pm 3\pi/4$ são pontos de inflexão, em $(-5\pi/4, -3\pi/4)$ e $(3\pi/4, 5\pi/4)$ a concavidade é para cima. Etc.

1e. $F'(\theta) = \cos\theta - \operatorname{sen}\theta = 0$ quando $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, isto é, quando

$$\theta \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \pm 2\pi, \frac{\pi}{4} \pm 4\pi, \ldots\right\} \bigcup \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \pm 2\pi, \frac{5\pi}{4} \pm 4\pi, \ldots\right\}.$$

Por outro lado, $F'' = -F$. Daí

$$F''(\pi/4) = -\sqrt{2}; \quad F''(5\pi/4) = \sqrt{2}.$$

[14] A taxa de variação de $h'(t)$ em relação a t, isto é, $(h')'(t) = h''(t)$, é negativa para $t < \frac{1}{2}$ e positiva para $t > \frac{1}{2}$.

[15] Devido aos valores máximo e mínimo locais da função (43 e -82) serem muito maiores em comparação aos dos seus pontos de máximo e mínimo locais (-2 e 3), é aconselhável uma mudança de escala nos eixos coordenados para um melhor esboço do gráfico!

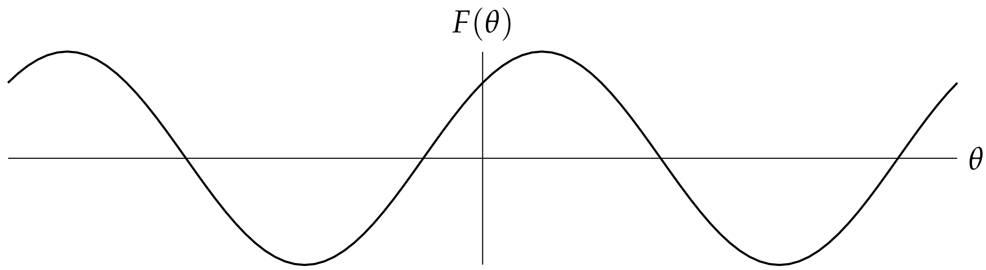
[16] De fato, como um número ao quadrado no mínimo é zero, $S(x) = \operatorname{sen}^2 x$ é máximo quando $\operatorname{sen} x = \pm 1$ e mínimo quando $\operatorname{sen} x = 0$.

Assim os máximos locais são os pontos

$$\theta = (\pi/4) \pm 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

e os mínimos locais são os pontos

$$\theta = (5\pi/4) \pm 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$



A concavidade é obtida de forma análoga ao que foi feito para o problema anterior. Assim, vamos obter primeiro os pontos de inflexão: $F''(\theta) = -F(\theta) = 0$ nos diz que tais pontos ocorrem quando $\cos\theta = -\operatorname{sen}\theta$, isto é, quando

$$\theta \in \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \pm 2\pi, \frac{3\pi}{4} \pm 4\pi, \ldots \right\} \bigcup \left\{ \frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \pm 2\pi, \frac{7\pi}{4} \pm 4\pi, \ldots \right\}.$$

Vamos estudar agora a concavidade no intervalo (a, b) cujos extremos sejam dois pontos de inflexão consecutivos. Considere, por exemplo,

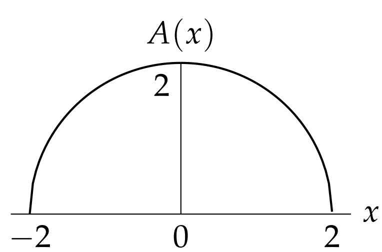
$$a = -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} - 2\pi \ \text{ e } \ b = \frac{3\pi}{4}.$$

Depois basta notar que a concavidade se alterna entre dois tais intervalos consecutivos, tomando (a, b) como base. Logo, para $\theta \in (a, b)$, note que $F(\theta) = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$ é positivo, o que acarreta $F'' = -F < 0$. Daí, em tal intervalo, a concavidade é 'para baixo'. Então é 'para cima' a concavidade nos intervalos anterior e posterior a (a, b). Agora é só ir alternando a concavidade!

1f. Por um lado, note que o domínio de $A(x)$ é o intervalo fechado $[-2, 2]$ (onde é positiva em $(-2, 2)$ e $A(\pm 2) = 0$). Mais, seu gráfico é a semi-circunferência superior de centro na origem e raio 2. De fato, como a raiz quadrada de um número não-negativo é um número não-negativo e

$$\begin{aligned} y = \sqrt{4 - x^2} &\Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2^2, \end{aligned}$$

segue que o gráfico é da forma



com ponto de máximo global em $x = 0$.
Por outro lado, para outra resolução, note que

$$\begin{aligned} A(x)^2 = 4 - x^2 &\Rightarrow 2A(x)A'(x) = -2x \\ &\Rightarrow A'(x) = -\frac{x}{A(x)} \end{aligned}$$

é zero apenas para $x = 0$. (Note também que $(-2, 2)$ é o domínio de $A'(x)$.) Este é ponto de máximo (global) e o gráfico tem concavidade para baixo. (De fato, note ainda que

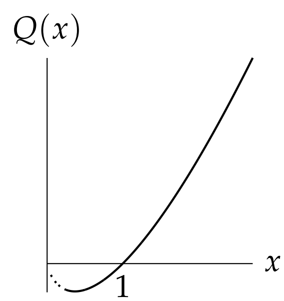
$$\begin{aligned} A(x)A'(x) = -x &\Rightarrow A'(x)^2 + A(x)A''(x) = -1 \\ &\Rightarrow A''(x) = -\frac{1 + A'(x)^2}{A(x)} \end{aligned}$$

tem $(-2, 2)$ como domínio e é negativa no mesmo; em particular, é negativa para $x = 0$.)

1g. Como $y = \ln x$ não está definida para $x \leq 0$, $Q(x) = x \ln x$ e suas derivadas só estão definidas para $x > 0$. Em tal intervalo, $Q(x)$ é positiva para $x > 1$ e negativa para $0 < x < 1$ (pois $\ln x$ também o é em tais intervalos).
Note ainda que $(1, 0)$ pertence ao gráfico de Q pois

$$\begin{aligned} Q(1) &= 1 \cdot \ln 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $x = \frac{1}{e}$ é o único ponto crítico (pois $Q'(x) = \ln x + 1$ se anula apenas em $x = \frac{1}{e}$) e $Q''(x) = \frac{1}{x}$ é positiva em $(0, +\infty)$, tal ponto crítico é ponto de mínimo, não existem pontos de inflexão e a concavidade é para cima.[17]



Vamos agora usar L'Hôpital, assunto do próximo (6o.) capítulo, para analisar $Q(x)$ para x suficientemente pequeno:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} Q(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1/x} \quad (\text{“} = \infty/\infty\text{”}) \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} \\ &= \lim_{x \to 0} -\frac{1/x}{1/x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} -x \\ &= 0. \end{aligned}$$

[17]Justifique!

Assim, $Q(x)$ se aproxima arbtrariamente de 0 quando x faz o mesmo.

1h. Aqui os extremos locais ocorrem nos mesmos pontos em que os extremos locais do problema **1e.** têm lugar. De fato,

$$\begin{aligned} s'(t) &= -e^{-t}\cos t + e^{-t}(-\operatorname{sen} t) \\ &= -e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

Contudo os pontos de inflexão ocorrem onde o seno se anula. De fato,

$$\begin{aligned} s''(t) &= e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t) - e^{-t}(-\operatorname{sen} t + \cos t) \\ &= 2e^{-t}\operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

Note ainda que um extremo local t_0 é minimizador (respectivamente, maximizador) local quando $\operatorname{sen} t_0 > 0$ (respectivamente, $\operatorname{sen} t_0 < 0$).

2. As quatro primeiras derivadas do seno são:

1a. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$;

2a. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$;

3a. $\frac{d}{dx}(-\operatorname{sen} x) = -\cos x$;

4a. $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \operatorname{sen} x$.

A partir daí as derivadas se repetem a cada quatro derivações. Vamos agora obter as **10a.** e **110a.** derivadas do seno de modo indireto. Note primeiramente que

$$10 = 4 \cdot 2 + 2 \quad \text{e} \quad 110 = 4 \cdot 27 + 2.$$[18]

Então após repetir as quatro primeiras derivadas do seno duas vezes (para o cálculo da **10a.**) e vinte e sete vezes (para o cálculo da **110a.**), basta calcular as duas primeiras derivadas do seno, obtendo $-\operatorname{sen} x$ como resposta para as duas perguntas do problema.

3. Se um lado do retângulo é x u.c. e o perímetro é P u.c., então o lado adjacente mede $\frac{P}{2} - x$ u.c. e a sua área

$$\begin{aligned} A(x) &= x\left(\frac{P}{2} - x\right) \\ &= -x^2 + \frac{P}{2}x \quad \text{u.a.} \end{aligned}$$

tem um máximo quando $x = P/4$ u.c..

(De fato, $A'(x) = -2x + (P/2)$ e $A''(x) = -2$.)

4a. $T = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{9{,}8}$.

4b. $D'(\theta) = \frac{v_0^2}{4.9}\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) = 0$ quando $\cos\theta = \pm\operatorname{sen}\theta$, isto é, quando $\theta = \pi/4$, $3\pi/4$, etc., isto é, quando a catapulta está apontada diretamente para cima num ângulo que correspone a metade de um ângulo reto. (Note que isto não depende de v_0!)

[18] Lembras? Dividendo iguala Divisor vezes Quociente mais Resto!

7. Estude o **Capítulo 6** (sobre APROXIMAÇÃO LINEAR E REGRA DE L'HÔSPITAL) do livro do GONICK. Resolva os problemas **1–12** de tal capítulo. **(Página 162.)**

RESPOSTAS/SUGESTÕES/RESOLUÇÕES:

Em **1–4**, use a aproximação linear

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

desde que x esteja suficientemente próximo de a.

1,2. Como $f(x) = \sqrt{x}$ e $f'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$, se $x = 5$ e $a = 4$, então

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &\approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(5-4)\\ &\approx 2 + \frac{1}{4}\\ &\approx \frac{9}{4} = 2{,}25.\end{aligned}$$

Agora, se $x = 67$ e $a = 64$, então

$$\begin{aligned}\sqrt{67} &\approx \sqrt{64} + \frac{1}{2\sqrt{64}}(67-64)\\ &\approx 8 + \frac{3}{16}\\ &\approx \frac{131}{16}\\ &\approx 8{,}1875.\end{aligned}$$

(Numa calculadora, $\sqrt{5} \approx 2{,}24$ e $\sqrt{67} \approx 8{,}1854$.)

3. Como $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f'(x) = \cos x$, se $x = 3$ e $a = \pi$, então a aproximação linear de $\operatorname{sen} 3$ é dada (em radianos) por

$$\operatorname{sen} \pi + (\cos \pi)(3-\pi) \approx 0{,}1416.$$

(Numa calculadora, $\operatorname{sen} 3 \approx 0{,}1411$.)

4. Como $f(x) = \arctan x$ e $f'(x) = 1/\left(1+x^2\right)$, se $x = 1{,}1$ e $a = 1$, então

$$\begin{aligned}\arctan 1{,}1 &\approx \arctan 1 + \frac{1}{1+1^2}(1{,}1-1)\\ &\approx \frac{\pi}{4} + \frac{0{,}1}{2}\\ &\approx 0{,}8354.\end{aligned}$$

(Numa calculadora, $\arctan 1{,}1 \approx 0{,}8330$.)

5. Aplicando L'Hôpital duas vezes, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{\cos x - 1} &= \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos\left(x^2\right)}{-\operatorname{sen} x} \quad \left(\Longleftarrow \frac{\operatorname{sen}\left(0^2\right)}{\cos 0 - 1} = \frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos\left(x^2\right) - 4x^2\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{-\cos x} \quad \left(\Longleftarrow \frac{2(0)\cos\left(0^2\right)}{-\operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0}\right)\\
&= \frac{2\cos\left(0^2\right) - 4(0)^2\operatorname{sen}\left(0^2\right)}{-\cos 0}\\
&= -2.
\end{aligned}$$

6. 1/2.

7. Aplicando L'Hôpital duas vezes, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{-8x^2} - 1}{\cos 2x - 1} &= \lim_{x\to 0}\frac{-16xe^{-8x^2}}{-2\operatorname{sen} 2x} \quad \left(\Longleftarrow \frac{e^{-8(0)^2} - 1}{\cos 2(0) - 1} = \frac{0}{0}\right)\\
&= 8\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-8x^2}}{\operatorname{sen} 2x}\\
&= 8\lim_{x\to 0}\frac{e^{-8x^2} - 16x^2e^{-8x^2}}{2\cos 2x} \quad \left(\Longleftarrow \frac{(0)e^{-8(0)^2}}{\operatorname{sen} 2(0)} = \frac{0}{0}\right)\\
&= 8\lim_{x\to 0}\frac{e^{-8(0)^2} - 16(0)^2e^{-8(0)^2}}{2\cos 2(0)}\\
&= 8\cdot\frac{1}{2}\\
&= 4.
\end{aligned}$$

8. 7/3.

9. 0.

10. Pela dica do problema, se

$$y = x^{\frac{1}{x}},$$

então

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln x^{\frac{1}{x}}\\
&= \frac{1}{x}\cdot\ln x\\
&= \frac{\ln x}{x}.
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
y &= e^{\ln y}\\
&= e^{\frac{\ln x}{x}}.
\end{aligned}$$

Logo

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}.$$

Assim, calculando o limite de tal expressão por L'Hôpital, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1/x}{1}} \quad \left(\Longleftarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} \\
&= e^0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

11. 1.

12. L'Hôpital não se aplica aqui. Basta considerar $x = \pi$ tanto no numerador quanto no denominador. A resposta é

$$\frac{0}{-1-1} = 0.$$

8. Estude os **Capítulos 8–13** (sobre INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES REAIS DE UMA VARIÁVEL REAL) do livro do GONICK. Inicie pelo **Capítulo 9**. Depois estude os **Capítulos 8** e **10**, nessa ordem, e siga para os restantes.
Resolva os problemas do **Capítulo 8** (que faz uma INTRODUÇÃO A INTEGRAÇÃO). **(Página 176.)**

RESPOSTAS/SUGESTÕES/RESOLUÇÕES:

1.

$$\begin{aligned}
E_{\text{baixo}} &= 3\left(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2\right) \\
&= 42.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
E_{\text{alto}} &= 3\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right) \\
&= 90.
\end{aligned}$$

3. No enunciado do problema, escreva:
- "soma" no lugar de "diferença";
- "$\frac{1}{2}\left(E_{\text{alto}} + E_{\text{baixo}}\right)$" no lugar de "$\frac{1}{2}\left(E_{\text{alto}} - E_{\text{baixo}}\right)$".

Com tais correções, a resposta é 66.

4.

$$\begin{aligned}
E_{\text{mid}} &= 3\left((1/2)^2 + (3/2)^2 + (5/2)^2 + (7/2)^2\right) \\
&= 63.
\end{aligned}$$

5. $s(t) = t^3$ e $s(4) - s(0) = 64$.

6. Usando alturas nos pontos médios dos intervalos temos

$$\begin{aligned}
E_{\text{mid}} &= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{e^2-7}{e^2+7}\right) \\
&\approx 1,964.
\end{aligned}$$

Resolva os problemas do **Capítulo 9** (sobre INTEGRAL INDEFINIDA). **(Página 184.)**

RESPOSTAS/SUGESTÕES/RESOLUÇÕES:

1. $6x + C$.

2. $\frac{2x^5}{15} + C$.

3. $\frac{(x-2)^{51}}{51} + C$.

4. $(1-x)^{-1} + C$.

5. **Caso** $n = -1$**.** Primeiramente, note que

$$\int (a-x)^{-1} dx = \int \frac{1}{a-x} dx.$$

Vamos resolver de dois modos distintos.

1a. Resolução: Pelo problema **24** deste capítulo, se

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad F(x) = \ln|x|,$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a-x} dx &= -\int \frac{1}{x-a} dx \\ &= -\int f(x-a) dx \\ &= -F(x-a) + C \\ &= -\ln|a-x| + C.\end{aligned}$$

2a. Resolução: Pelo *método de integração por substituição* do **Capítulo 12**, considerando

$$u = a - x, du = -dx,$$

temos que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a-x} dx &= -\int \frac{1}{u} du \\ &= -\ln|u| + C \\ &= -\ln|a-x| + C.\end{aligned}$$

Caso $n \neq -1$**.** Faremos como na **1a. Resolução** anterior.
Pelo problema **24** deste capítulo, se

$$f(x) = x^n \quad \text{e} \quad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

$$
\begin{aligned}
\int (a-x)^n dx &= \int \big((-1)(x-a)\big)^n dx \\
&= \int (-1)^n (x-a)^n dx \\
&= (-1)^n \int (x-a)^n dx \\
&= (-1)^n \int f(x-a) dx \\
&= (-1)^n \cdot F(x-a) + C \\
&= \frac{(-1)^n (x-a)^{n+1}}{n+1} + C \\
&= \frac{(-1)^n (-1)^{n+1} (a-x)^{n+1}}{n+1} + C \\
&= \frac{(-1)^{2n} (-1) (a-x)^{n+1}}{n+1} + C \\
&= -\frac{(a-x)^{n+1}}{n+1} + C.
\end{aligned}
$$

6. $\ln\left(9+x^2\right)+C$.

7. Tal problema pode ser resolvido via o mesmo procedimento usado no **Exemplo 2** deste capítulo. Vejamos:
1. Note que o integrando

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

é similar a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x).$$

Assim, primeiramente, reescrevamos $f(x)$ do modo seguinte:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}.
\end{aligned}
$$

2. Considere então

$$F(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

como primeira tentativa para ser a primitiva de $f(x)$.
3. Queremos que a derivada de F em relação a x seja igual a f. Logo, se $u = \frac{x}{2}$,

segue da Regra da Cadeia que

$$\begin{aligned} F'(x) &= u' \cdot (\operatorname{arcsen} u)' \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

A conclusão é que, já na primeira tentativa,[19] obtemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

8. $-\frac{\cos 2x}{2} + C_1$.

9. $\operatorname{sen}^2 x + C_2$.

10–11. Como $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, as integrais dos problemas **8** e **9** anteriores são iguais. Daí:

$$-\frac{\cos 2x}{2} + C_1 = \operatorname{sen}^2 x + C_2 \Longrightarrow \cos 2x = -2\operatorname{sen}^2 x + 2\left(C_1 - C_2\right).$$

12. Note que

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{2} x^2 e^{\left(x^3+1\right)}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int 3x^2 e^{\left(x^3+1\right)}\, dx. \end{aligned}$$

(O problema **17** (deste capítulo) nos garante que podemos 'retirar' a constante $1/2$ do integrando e multiplicá-la pela integral sem alterar o resultado de tal integral!) Seja agora

$$f(x) = 3x^2 e^{\left(x^3+1\right)}.$$

Segue daí que, se $u(x) = x^3 + 1$, $v(u) = e^u$ e

$$\begin{aligned} F(x) &= v(u(x)) \\ &= e^{\left(x^3+1\right)}, \end{aligned}$$

então $u'(x) = 3x^2$, $v'(u) = e^u$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= u'(x) v'(u(x)) \\ &= 3x^2 e^{\left(x^3+1\right)} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

[19] Note que, no **Exemplo 2** citado, foram necessárias duas tentativas para obtermos a primitiva correta!

e, finalmente,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot F(x) + C \\ &= \frac{e^{\left(x^3+1\right)}}{2} + C. \end{aligned}$$

13. $-e^{\cos x} + C$.

14. Considere que

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{\sqrt{x^3 - 6x^2}}.$$

Considere agora o denominador de $f(x)$. Note que, se

$$F(x) = \left(x^3 - 6x^2\right)^{1/2},$$

segue da regra da cadeia que

$$\begin{aligned} F'(x) &= 3 \cdot \left(x^2 - 4x\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x^3 - 6x^2\right)^{-1/2} \\ &= \frac{3}{2} f(x). \end{aligned}$$

Assim, a integral pode ser resolvidada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 4x}{\sqrt{x^3 - 6x^2}}\, dx &= \int f(x)\, dx \\ &= \int \frac{2}{3} F'(x)\, dx \\ &= \frac{2}{3} \int F'(x)\, dx \\ &= \frac{2}{3} F(x) + C \\ &= \frac{2\left(x^3 - 6x^2\right)^{1/2}}{3} + C. \end{aligned}$$

(O problema **17** (deste capítulo) nos garante que podemos 'retirar' a constante $2/3$ do integrando e multiplicá-la pela integral sem alterar o resultado de tal integral!)

15. Vamos resolver de dois modos distintos.

1a. Resolução: Primeiramente, note que

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \int \frac{1}{x - (-1)} dx.$$

Agora, pelo problema **24** deste capítulo, se $f(x) = 1/x$ e $F(x) = \ln|x|$, então

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x - (-1)} dx &= -\int f(x - (-1)) dx \\ &= F(x - (-1)) + C \\ &= \ln|x - (-1)| + C \\ &= \ln|x + 1| + C. \end{aligned}$$

2a. Resolução: Pelo *método de integração por substituição* do **Capítulo 12**, considerando

$$u = x + 1, du = dx,$$

temos que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+1}dx &= \int \frac{1}{u}du \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

16. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-1} &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \\ &= \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(A+B)x + A - B}{x^2-1}.\end{aligned}$$

Então, comparando o numerador da primeira fração com o da última, temos

$$\begin{aligned}(A+B)x + A - B &= 1 \\ &= 0 \cdot x + 1,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A - B = 1. \end{cases}$$

Daí

$$A = \frac{1}{2} \text{ e } B = -\frac{1}{2}.$$

Assim, observando as duas primeiras igualdades deste problema, bem como o problema **15** anterior, segue que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

17. Como $F' = f$ e $G' = g$, temos

$$\begin{aligned}(CF + DG)' &= CF' + DG' \\ &= Cf + Dg.\end{aligned}$$

(Acabamos de demonstrar que

$$\int (Cf + Dg) = C\int f + D\int g$$

para quaisquer constantes C e D caso f e g sejam integráveis.)

18. $\frac{x^4}{2} + 5x^3 - \frac{x^2}{4} - 7x + C.$

19. Pelo problema **17** anterior, a integral da soma é igual a soma das integrais. Assim, escreva a integral como soma de duas integrais, calcule estas duas integrais, bem como a soma das mesmas, e obtenha

$$\frac{1}{3}\left(\operatorname{sen}^3\theta - \cos^3\theta\right) + C$$

como resultado da integral deste problema.

20. $\frac{e^x - e^{-x}}{2} + C.$

21. Note primeiramente que, via o problema **17** anterior,

$$\int \frac{3t^2}{t^3 - t^2 + 1}dt - \int \frac{2t}{t^3 - t^2 + 1}dt = \int \frac{3t^2 - 2t}{t^3 - t^2 + 1}dt.$$

Agora vamos resolver o problema de duas maneiras distintas.

1a. Resolução: Pelo problema **25** (deste capítulo), se $f(t) = t^3 - t^2 + 1$, então $f'(t) = 3t^2 - 2t$ e

$$\begin{aligned}
\int \frac{3t^2 - 2t}{t^3 - t^2 + 1}dt &= \int \frac{f'(t)}{f(t)}dt \\
&= \ln|f(t)| + C \\
&= \ln|t^3 - t^2 + 1| + C.
\end{aligned}$$

2a. Resolução: Considere a técnica de *integração por substituição* (do **Capítulo 12**) e

$$u = t^3 - t^2 + 1 \Longrightarrow du = (3t^2 - 2t)dt.$$

Daí:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3t^2 - 2t}{t^3 - t^2 + 1}dt &= \int \frac{1}{t^3 - t^2 + 1}(3t^2 - 2t)dt \\
&= \int \frac{1}{u}du \\
&= \ln|u| + C \\
&= \ln|t^3 - t^2 + 1| + C.
\end{aligned}$$

22. $\frac{2t^{5/2}}{5} + \frac{2t^{7/2}}{7} + \frac{8t^{-5/2}}{5} + C.$

23. $\begin{cases} \left(x^2/2\right) + C & \text{para } x > 0, \\ -\left(x^2/2\right) + C & \text{para } x < 0. \end{cases}$

$$\boxed{\text{O que acontece em } x = 0?}$$

24. $F'(x) = f(x)$ é equivalente a

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Daí nossa primeira tentativa para a integral é

$$\int f(x - a)dx = F(x - a) + C.$$

Assim, seja $u = x - a$. Temos então, pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned}\big(F(x-a)\big)' &= u' \cdot F'(u)\\ &= 1 \cdot f(u)\\ &= f(x-a).\end{aligned}$$

25. Relembre que $\big(\ln f(x)\big)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ para $f(x) > 0$. Daí, para $f(x) < 0$,

$$\begin{aligned}\big[\ln(-f(x))\big]' &= \frac{(-f(x))'}{-f(x)}\\ &= \frac{-f'(x)}{-f(x)}\\ &= \frac{f'(x)}{f(x)}.\end{aligned}$$

Segue então que

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C.$$

Resolva os problemas do **Capítulo 10** (sobre INTEGRAL DEFINIDA). **(Página 194.)**
Resolva os problemas do **Capítulo 11** (sobre o TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO) até o problema **11**. **(Página 202.)**

RESPOSTAS/SUGESTÕES/RESOLUÇÕES:

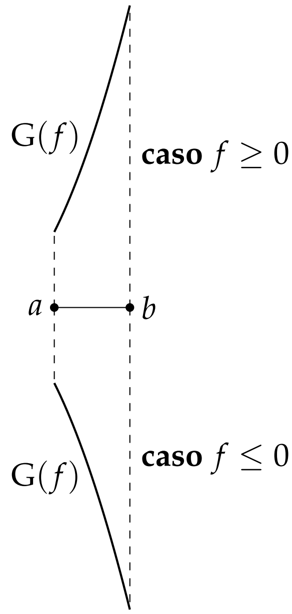
Sabemos que se f é contínua e F é a integral indefinida de f, isto é, $F' = f$, em $[a, b]$, então a integral definida de f (em $[a, b]$) é calculada por

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Tal integral definida calcula a *área com sinal* da região compreendida entre o gráfico de f, isto é, $\mathrm{G}(f)$, e o intervalo $[a, b]$ de acordo com os dois casos seguintes:

caso $f \geq 0$: $\int_a^b f$ representa tal área com sinal positivo;

caso $f \leq 0$: $\int_a^b f$ representa tal área com sinal negativo.

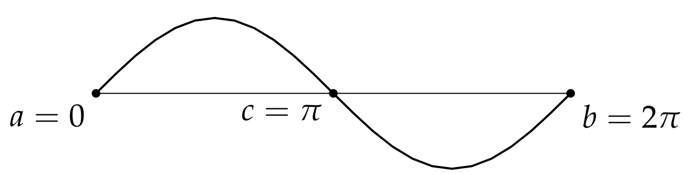


Ainda, caso existam exatamente n pontos entre a e b, digamos $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n$, onde f mude de sinal, considere

$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f + \int_{c_n}^{b} f,$$

onde a contribuição de cada uma das $n+1$ parcelas do segundo membro alterna entre os dois casos anteriores a medida que f muda de sinal. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx - \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx \\ &= 0.\end{aligned}$$



Já calculamos (nos problemas do **Capítulo 9**) a F para cada f específica dos problemas **1–11** (do **Capítulo 11**), com uma exceção: o problema **8**. Daí:

1. Aqui, $f(x) = 6$, $F(x) = 6x + C$, $a = -3$ e $b = 20$. Daí

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{20} 6\, dx &= F(20) - F(-3) \\ &= 6 \cdot 20 - 6 \cdot (-3) \\ &= 120 + 18 \\ &= 138.\end{aligned}$$

2. Aqui, $f(x)=\frac{2}{3}x^4$, $F(x)=\frac{2}{15}x^5+C$, $a=-1$ e $b=5$. Daí

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{5}\frac{2}{3}x^4\,dx &= F(5)-F(-1)\\ &= \frac{2}{15}5^5-\frac{2}{15}(-1)^5\\ &= \frac{2}{15}(3125+1)\\ &= \frac{2}{15}\cdot 3126.\end{aligned}$$

3. Aqui, $f(x)=(x-2)^{50}$, $F(x)=\frac{(x-2)^{51}}{51}+C$, $a=3$ e $b=4$. Daí

$$\begin{aligned}\int_{3}^{4}(x-2)^{50}\,dx &= F(4)-F(3)\\ &= \frac{(4-2)^{51}}{51}-\frac{(3-2)^{51}}{51}\\ &= \frac{1}{51}\left(2^{51}-1\right).\end{aligned}$$

4. Aqui, $f(x)=(1-x)^{-2}$, $F(x)=(1-x)^{-1}+C$, $a=1/2$ e $b=2/3$. Daí

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{2/3}(1-x)^{-2}\,dx &= F(2/3)-F(1/2)\\ &= \left(1-\frac{2}{3}\right)^{-1}-\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-1}\\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\\ &= 3-2\\ &= 1.\end{aligned}$$

5. Caso $n\neq -1$**.** Aqui, $f(x)=(a-x)^n$, $F(x)=-\frac{(a-x)^{n+1}}{n+1}+C$, $a=a$ e $b=a+1$. Daí

$$\begin{aligned}\int_{a}^{a+1}(a-x)^n\,dx &= F(a+1)-F(a)\\ &= -\frac{(a-a-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{(a-a)^{n+1}}{n+1}\\ &= (-1)\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\\ &= \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}.\end{aligned}$$

Caso $n=-1$**.** Aqui, $f(x)=(a-x)^{-1}$, $F(x)=-\ln|a-x|+C$, $a=a$ e $b=a+1$. Daí

$$\begin{aligned}\int_{a}^{a+1}(a-x)^{-1}\,dx &= F(a+1)-F(a)\\ &= -\ln|a-a-1|+\ln|a-a|\\ &= -\ln 1+\ln 0\,!\end{aligned}$$

Como $\ln 0$ não está definido, este caso não é possível!

6. Aqui, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $F(x) = \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + C$, $a = \sqrt{2}$ e $b = 2$. Daí

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= F(2) - F\left(\sqrt{2}\right) \\
&= \text{arcsen}\left(\frac{2}{2}\right) - \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \text{arcsen}\,1 - \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

7. Aqui, $f(x) = \text{sen}\,2x$, $F(x) = \text{sen}^2\,x + C$, $a = \pi/4$ e $b = 7\pi/2$. Daí

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/4}^{7\pi/2} \text{sen}\,2x\,dx &= F(7\pi/2) - F(\pi/4) \\
&= \text{sen}^2(7\pi/2) - \text{sen}^2(\pi/4) \\
&= \left(\text{sen}\left(3\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2 - \left(\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)^2 \\
&= \left(\text{sen}\,3\pi\cos\frac{\pi}{2} + \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\cos 3\pi\right)^2 - \frac{1}{2} \\
&= 1 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

8. Aqui, $f(x) = \frac{1}{1-x}$,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{1}{1-x}\,dx \\
&= -\int \frac{1}{u}\,du \qquad\qquad (u = 1-x,\ du = -dx) \\
&= -\ln|u| + C \\
&= -\ln|1-x| + C,
\end{aligned}$$

$a = 2$ e $b = e^2 + 1$. Daí

$$\begin{aligned}
\int_{2}^{e^2+1} \frac{1}{1-x}\,dx &= F\left(e^2+1\right) - F(2) \\
&= -\ln\left|1 - e^2 - 1\right| + \ln|1-2| \\
&= -\ln e^2 + \ln 1 \\
&= -2\ln e + 0 \\
&= -2.
\end{aligned}$$

9. Aqui,

$$f(t) = t^{3/2} + t^{5/2} - 4t^{-7/2},\ F(t) = \frac{2t^{5/2}}{5} + \frac{2t^{7/2}}{7} + \frac{8t^{-5/2}}{5} + C,\ a = 4 \text{ e } b = 25.$$

10. Via a integral indefinida do **Problema 12** do **Capítulo 9**, aqui, a integral definida é dada por

$$\frac{e^9 - 1}{2}.$$

11. Aqui,

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta, \\
F(\theta) &= \frac{1}{3}\left(\operatorname{sen}^3\theta - \cos^3\theta\right) + C, \\
a &= 5\pi/6 \text{ e} \\
b &= 11\pi/6.
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
\int_{5\pi/6}^{11\pi/6} \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta &= F(11\pi/6) - F(5\pi/6) \\
&= \frac{1}{3}\left(\operatorname{sen}^3\left(\frac{11\pi}{6}\right) - \cos^3\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) \\
&\quad - \frac{1}{3}\left(\operatorname{sen}^3\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \cos^3\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\
&= \frac{\left(\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)^3 - \left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)^3}{3} \\
&\quad - \frac{\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)^3 - \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)^3}{3}.
\end{aligned}$$

Considere agora as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) &= \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)\\
&= \operatorname{sen} 2\pi \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos 2\pi\\
&= -\frac{1}{2},\\
\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) &= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)\\
&= \cos 2\pi \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen} 2\pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2},\\
\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\\
&= \operatorname{sen} \pi \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos \pi\\
&= \frac{1}{2},\\
\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\\
&= \cos \pi \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_{5\pi/6}^{11\pi/6} \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}{3}\\
&= 2\left(\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}{3}\right)\\
&= \frac{-\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}}{3}\\
&= -\frac{1+3\sqrt{3}}{12}.
\end{aligned}$$

Resolva os problemas do **Capítulo 12** (sobre TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO) até o problema **12**. **(Página 212.)**

RESPOSTAS/SUGESTÕES/RESOLUÇÕES:

1. Integre por substituição com $u = 1 + x^2$ e $du = 2xdx$ para obter

$$\int \frac{1}{1+x^2}\cdot x\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

2. Integre por substituição com $u = 1 + x^2$ e $du = 2xdx$ para obter

$$\int \left(1 + x^2\right)^{-2} \cdot x\,dx = -\frac{1}{2}\left(1 + x^2\right)^{-1} + C.$$

3. Para $n = 0$ a resposta é simplesmente

$$\int \operatorname{sen} t\,dt = -\cos t + C.$$

Para $n \neq 0$, integre por substituição com $u = n\cos t$ e $du = -n \operatorname{sen} t\,dt$. Assim

$$\begin{aligned}\int e^{n\cos t} \operatorname{sen} t\,dt &= -\frac{1}{n}\int e^u\,du \\ &= -\frac{e^u}{n} + C \\ &= -\frac{e^{n\cos t}}{n} + C.\end{aligned}$$

4. Via Integração Por Substituição, a integral é dada por

$$-\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C.$$

5. (A resolução deste problema é similar a do **Exemplo 3** deste capítulo.)
Se $u = 3x - 1$, isto é, $x = (1/3)(u+1)$, então $du = 3dx$, isto é, $dx = (1/3)du$, e

$$\begin{aligned}\int x^2(3x-1)^{-1/2}\,dx &= (1/3)^2(1/3)\int (u+1)^2 u^{-1/2}\,du \\ &= \frac{1}{27}\int (u^2 + 2u + 1)u^{-1/2}\,du \\ &= \frac{1}{27}\left(\int u^{3/2}\,du + 2\int u^{1/2}\,du + \int u^{-1/2}\,du\right) \\ &= \frac{1}{27}\left(\frac{2}{5}\cdot u^{5/2} + \frac{4}{3}\cdot u^{3/2} + \frac{1}{2}\cdot u^{1/2}\right) + C.\end{aligned}$$

6. Pela dica dada, $x = \cos\theta$. Daí $dx = -\operatorname{sen}\theta d\theta$ e

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1 - x^2}dx &= -\int \sqrt{1 - \cos^2\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\ &= -\int \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\ &= -\int \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \theta) + C \qquad \text{(}\textbf{Exemplo 9}\text{ deste cap.)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - \cos^2\theta}\cos\theta - \theta\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - x^2}x - \arccos x\right) + C.\end{aligned}$$

7. (A resolução deste problema é similar a do **Exemplo 3** e a do problema **5** deste capítulo.)
Use a substituição

$$u = 2x + 5, \text{ isto é, } x = \frac{u-5}{2},$$

e o binômio

$$(u-5)^3 = u^3 - 15u^2 + 75u - 125.$$

8. Integre por partes duas vezes para obter

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$$

9. Sejam $u = t$ e $dv = e^{-t}dt$. Então $du = dt$,

$$\begin{aligned} v &= \int dv \\ &= \int e^{-t}\, dt \\ &= -e^{-t} \end{aligned}$$

e, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int te^{-t}\, dt &= \int u\, dv \\ &= uv - \int v\, du \\ &= t\left(-e^{-t}\right) - \int \left(-e^{-t}\right)\, dt \\ &= -te^{-t} + \int e^{-t} dt \\ &= -te^{-t} - e^{-t}. \end{aligned}$$

10. Pelo **Exemplo 6** deste capítulo,

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C,$$

inclusive para $C = 0$. Seja então $f(x) = (\ln x)^2$. Assim, integrando por partes com $u = \ln x$ e $dv = \ln x dx$, isto é, $du = \frac{1}{x}dx$ e

$$\begin{aligned} v &= \int dv \\ &= \int \ln x\, dx \\ &= x \ln x - x, \end{aligned}$$

temos que a integral indefinida de f é dada por

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\,dx \\
&= \int (\ln x)^2\,dx \\
&= \int \ln x \ln x\,dx \\
&= \int u\,dv \\
&= uv - \int v\,du \\
&= \ln x(x\ln x - x) - \int (x\ln x - x)\frac{1}{x}\,dx \\
&= x(\ln x)^2 - x\ln x - \int \ln x\,dx + \int 1\,dx \\
&= x(\ln x)^2 - x\ln x - x\ln x + x + x \\
&= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C.
\end{aligned}$$

Daí, temos a seguinte integral definida

$$\begin{aligned}
\int_1^5 (\ln x)^2\,dx &= \int_1^5 f(x)\,dx \\
&= F(5) - F(1) \\
&= 5(\ln 5)^2 - 2(5)\ln 5 + 2(5) - 1(\ln 1)^2 + 2(1)\ln 1 - 2(1) \\
&= 5(\ln 5)^2 - 10\ln 5 + 8 \\
&= 4,857072845560170\ldots\,.
\end{aligned}$$

11. A integral indefinida

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C,$$

inclusive para $C = 0$, foi obtida na resolução do problema anterior. Antes,

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + \text{constante}$$

foi obtida no **Exemplo 6** deste capítulo. (Aqui também a constante pode ser nula!) Assim, seja $f(x) = (\ln x)^3$. Daí, integrando por partes com $u = \ln x$ e $dv = (\ln x)^2 dx$, isto é, $du = \frac{1}{x}dx$ e

$$\begin{aligned}
v &= \int dv \\
&= \int (\ln x)^2\,dx \\
&= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x,
\end{aligned}$$

temos que a integral indefinida de f é dada por

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\,dx \\
&= \int (\ln x)^3\,dx \\
&= \int \ln x(\ln x)^2\,dx \\
&= \int u\,dv \\
&= uv - \int v\,du \\
&= \ln x\left(x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\right) - \int \left(x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\right)\frac{1}{x}\,dx \\
&= x(\ln x)^3 - 2x(\ln x)^2 + 2x\ln x - \int (\ln x)^2\,dx + 2\int \ln x\,dx - 2\int 1\,dx \\
&= x(\ln x)^3 - 2x(\ln x)^2 + 2x\ln x \\
&\quad - x(\ln x)^2 + 2x\ln x - 2x + 2x\ln x - 2x - 2x + C \\
&= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C.
\end{aligned}$$

12. Seja $f(v) = \arctan v$. Então, integrando por partes com $U = \arctan v$ e $dV = dv$, isto é, $dU = \frac{1}{1+v^2}dv$ e $V = v$, temos que a integral indefinida $F(v)$ de $f(v)$ é dada por

$$\begin{aligned}
F(v) &= \int f(v)\,dv \\
&= \int \arctan v\,dv \\
&= \int U\,dV \\
&= UV - \int V\,dU \\
&= (\arctan v)v - \int v\left(\frac{1}{1+v^2}\right)\,dv \\
&= v\arctan v - \int \frac{1}{1+v^2}v\,dv.
\end{aligned}$$

Na integral do segundo membro da igualdade anterior usaremos a substituição $u = 1+v^2$. Logo $du = 2vdv$, isto é, $vdv = \frac{1}{2}du$, e

$$\begin{aligned}
F(v) &= v\arctan v - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du \\
&= v\arctan v - \frac{1}{2}\ln|u| + C \\
&= v\arctan v - \frac{1}{2}\ln\left(1+v^2\right) + C.
\end{aligned}$$

Finalmente podemos calcular a integral definida:

$$\begin{aligned}\int_0^x \arctan v\,dv &= \int_0^x f(v)\,dv \\ &= F(x) - F(0) \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right).\end{aligned}$$

Resolva os cinco problemas do **Capítulo 13** (sobre APLICAÇÕES DE INTEGRAÇÃO).

RESPOSTAS/SUGESTÕES/RESOLUÇÕES:

1. Primeiramente, uma errata:

- No diagrama, a altura D deveria ser $R - D$.[20]
- Para o volume acima da água, os limites de integração deveriam ser 0 e $R - D$, isto é, tal volume é dado por

$$\int_0^{R-D} \pi\left(R^2 - y^2\right) dy.$$

Agora, uma observação em relação a fórmula que aparece no **Problema 1** do **Capítulo 4**. Na resolução daquele problema, como aqui, iniciamos com uma errata e escrevemos a seguinte fórmula para o volume da água:

$$V = \pi\left(Rh^2 - \frac{h^3}{3}\right).$$

Assim, como neste problema $h = D$, a resposta aqui deve ser:

$$V = \pi\left(RD^2 - \frac{D^3}{3}\right).$$

De fato, pelo Teorema de Pitágoras, o raio x de uma fatia (secção transversal) de altura y é $\sqrt{R^2 - y^2}$. Daí a área de tal fatia é

$$\pi x^2 = \pi\left(R^2 - y^2\right).$$

Logo, se o foco é na profundidade D da água, o volume de ar acima da água é dado, em unidades de volume, por:

$$\begin{aligned}V_{\text{ar}} &= \pi\int_0^{R-D} R^2 - y^2\,dy \\ &= \pi\left[R^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{R-D} \\ &= \pi\left(\frac{2R^3}{3} - RD^2 + \frac{D^3}{3}\right).\end{aligned}$$

[20]De fato, se a profundidade da água na tigela é D, então a profundidade da região acima da água é $R - D$.

Segue daí que

$$
\begin{aligned}
V_{\text{água}} &= \frac{4\pi R^3/3}{2} - V_{\text{ar}} \\
&= \frac{2\pi R^3}{3} - \pi\left(\frac{2R^3}{3} - RD^2 + \frac{D^3}{3}\right) \\
&= \pi\left(RD^2 - \frac{D^3}{3}\right)
\end{aligned}
$$

em unidades de volume.

2. A integral é igual a -1.[21]

3. Aqui vamos considerar cilindros circulares retos,[22] com bases paralelas ao plano $y = H$, este sendo o teto de todos tais cilindros. Cada um destes cilindros é obtido ao fixarmos um valor para o raio r de sua base,[23] obtendo daí não só a altura $H - ar^2$ para o mesmo, bem como o intervalo de variação do raio:

$$r \in \left[0, \sqrt{H/a}\right].$$

(De fato, quando $y = H$, devido a $y = ar^2$, temos $r = \sqrt{H/a}$.)

Assim, como no exemplo da explosão da fábrica de cola deste capítulo, vamos imaginar cada um destes cilindros como uma concha cilíndrica de espessura arbitrariamente pequena, isto é, tão fina quanto se queira. Ao cortarmos verticalmente o cilindro, obtemos uma lâmina retangular de altura $H - ar^2$, comprimento $2\pi r$ e largura dr arbitrariamente pequena, cujo volume é dado por

$$dV = 2\pi r\left(H - ar^2\right) dr.$$

Integrando tal volume infinitesimal, obtemos o seguinte volume total:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^{\sqrt{H/a}} \left(rH - ar^3\right) dr \\
&= \pi\left(\frac{H^2}{a} - \frac{H^2}{2a}\right) \\
&= \frac{\pi H^2}{2a} \text{ u.v.}
\end{aligned}
$$

[21] Confira o problema 18 da LISTA ADICIONAL no final deste material!

[22] Isto é, cilindros cujas geratrizes são perpendiculares as suas bases.

[23] Confira figura associada ao problema!

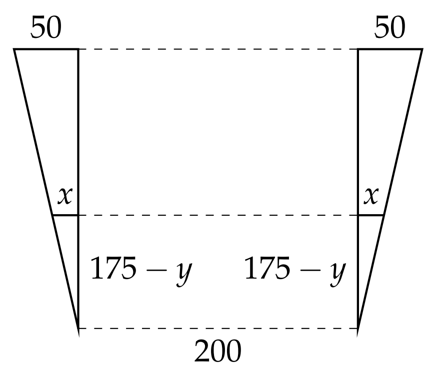
4.

$$\begin{aligned} V &= \int_1^\infty \pi(1/x)^2\,dx \\ &= \pi \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-2}\,dx \\ &= \pi \lim_{t\to\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^t \\ &= \pi \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{t}+1\right) \\ &= \pi \text{ u.v.} \end{aligned}$$

5. Por um lado, uma linha horizontal que atravesse a represa a uma profundidade de y metros tem comprimento

$$W(y) = 287{,}5 - \frac{y}{2} \text{ metros.}$$

De fato, considere os dois triângulos retos seguintes, obtidos retirando-se do trapézio (da figura dada no problema) um quadrado de lado 200 metros.



Assim, $W(y) = 200 + 2x$ metros e, por semelhança de triângulos, temos que

$$\begin{aligned} \frac{175-y}{200} = \frac{x}{50} &\Longrightarrow \frac{175-y}{2} = 2x \\ &\Longrightarrow 2x = 87{,}5 - \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

Agora, por outro lado, se $F(y)$ é a pressão total da água de 0 até y metros de profundidade, então

$$dF = 9{,}8y\,W(y)\,dy \text{ quilonewtons.}^{24}$$

Finalmente, podemos calcular a força total de 0 até 175 metros via a seguinte

[24] Confira exemplo da represa apresentado no final do **Capítulo 13** do GONICK!

integral:

$$
\begin{aligned}
F(175) &= \int_0^{175} dF \\
&= \int_0^{175} 9{,}8y\left(287{,}5 - \frac{y}{2}\right) dy \\
&= \int_0^{175} \left(2.817{,}5y - 4{,}9y^2\right) dy \\
&= \left[1.408{,}75y^2 - 1{,}6\overline{3}y^3\right]_0^{175} \\
&= 43.142.968{,}75 - 8.753.645{,}8\overline{3} \\
&= 34.389.322{,}91\overline{6} \text{ quilonewtons.}
\end{aligned}
$$

SEGUEM FÓRMULAS VÁLIDAS PARA f E F ADEQUADAS:

integral definida: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ com $F' = f$.

integração por partes: $\int udv = uv - \int vdu$.

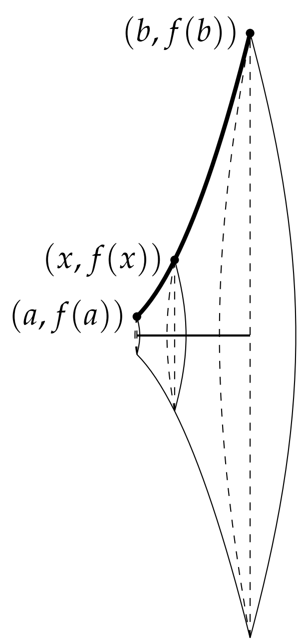
integração por substituição: $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)\, du$.

área entre curvas: $\left|\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx\right|$ ou $\left|\int_c^d (f(y) - g(y))\, dy\right|$.

A primeira para uma região limitada superiormente por uma das curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, inferiormente pela outra, a esquerda por $x = a$ e a direita por $x = b$.
A segunda para uma região limitada a esquerda por uma das curvas $x = f(y)$ e $x = g(y)$, a direita pela outra, inferiormente por $y = c$ e superiormente por $y = d$.

volume de sólidos com OX **como eixo de rotação do gráfico de** f**:** $\int_a^b \pi f(x)^2\, dx$.

De fato, seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$. Extrapolando do $\mathbb{R}^2$ para o $\mathbb{R}^3$, considere o círculo do plano perpendicular ao eixo das abcissas, de centro $(x, 0)$ e raio $f(x)$.[25] A medida da área de tal círculo é dada por $\pi f(x)^2$ u.a.. Agora, integre de $x = a$ até $x = b$.[26]



volume de sólidos com OY **como eixo de rotação do gráfico de** f**:** $\int_c^d \pi f(y)^2\, dy$.

De fato, seja $x = f(y)$ uma função contínua em $[c, d]$. Agora proceda como no item anterior.

[25] É o segundo círculo da figura acima.
[26] $\pi f(x)^2 dx$ pode ser visto como o volume do cilindro de revolução em torno do eixo OX, de raio $f(x)$ e altura dx arbitrariamente pequena. (Confira **Capítulo 13** do GONICK!)

integração imprópria: $\int_a^b f$ admite uma das seguintes condições:

I. $a = -\infty$ ou $b = \infty$;

II. f é descontínua em algum ponto de $[a, b]$.

Ainda, caso os limites seguintes existam, temos que:

I.1. f contínua em $[a, \infty)$ acarreta

$$\int_a^\infty f := \lim_{\delta \to \infty} \int_a^\delta f;$$

I.2. f contínua em $(\infty, b]$ implica em

$$\int_{-\infty}^b f := \lim_{\epsilon \to -\infty} \int_\epsilon^b f;$$

I.3. f contínua em $(-\infty, \infty)$ resulta em

$$\int_{-\infty}^\infty f := \int_{-\infty}^c f + \int_c^\infty f;$$

II.1 f contínua em $(a, b]$ e descontínua em a acarreta

$$\int_a^b f := \lim_{\tau \to 0^+} \int_{a+\tau}^b f;$$

II.2 f contínua em $[a, b)$ e descontínua em b implica em

$$\int_a^b f := \lim_{\tau \to 0^+} \int_a^{b-\tau} f;$$

II.3 f contínua em $[a, b] - \{c\}$ e descontínua em c, resulta em

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b.$$

Caso um dos limites anteriores não exista, diremos que sua integral "não converge".

função densidade de probabilidade: $p(x)$ não-negativa tal que

$$\int_{-\infty}^\infty p(x)\, dx.$$

Uma tal p é dita uma "pdf", do inglês *probability density function*.

APRESENTE CÁLCULOS QUE COMPROVEM A VALIDADE DAS SEGUINTES AFIRMAÇÕES:

1. É nulo o limite
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(x-\frac{\pi}{2})}{\sec x}.$$

2. $f(x) = e^x + 3e^{-x}$ não tem ponto de máximo e $\ln\sqrt{3}$ é seu único ponto de mínimo.

3. $f'(1) = \ln 2$ para
$$f(x) = \left(x^2+1\right)^{\ln x}.$$

4. Via aproximação linear,
$$f(1{,}99) \approx -0{,}08\pi$$
para
$$f(x) = x \operatorname{sen}\left(\pi x^2\right).$$

5. $$\int_0^{\pi/2} x^2 \operatorname{sen} x\, dx = \pi - 2.$$

6. $$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\, dx = 2e^2 + 2.$$

7. A área entre as curvas $y = x$ e $y = x^2$ de $x = 0$ até $x = 1$ mede, em unidades de área, $1/6$.

8. A área entre as curvas $x = y + 3$ e $x = y^2$ de $y = -1$ até $y = 1$ mede, em unidades de área, $16/3$.

9. Velocidades de um Audi e um BMW (em função do tempo) são dadas pelas funções
$$v_A(t) = \begin{cases} 3t \ \text{ m/s} & \text{para os primeiros 10 segundos,} \\ 30 \ \text{ m/s} & \text{após 10 segundos,} \end{cases}$$
e
$$v_B(t) = \begin{cases} 5t \ \text{ m/s} & \text{para os primeiros 4 segundos,} \\ 20 \ \text{ m/s} & \text{após 4 segundos,} \end{cases}$$
respectivamente. Se a ultrapassagem do Audi sobre o BMW ocorre em $t = T$ segundos, então $T = 11$.

10. (a) Use o **Problema 6** do **Capítulo 12** do GONICK para obter
$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi R^2}{2}.$$
(b) Use (a) para verificar que a área de um círculo de raio R é, em unidades de área, πR^2.

11. Considere a esfera de raio R obtida pela rotação da semi-circunferência $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ em torno do eixo das abcissas. Via uma integral adequada, prova-se que a medida do volume de tal sólido é, de fato, $\frac{4\pi R^3}{3}$ u.v..

12. O volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo das abcissas da região do plano delimitada por $y = x^2 - 4x + 5$, $x = 1$, $x = 4$ e $y = 0$, em unidades de volume, é dado por $78\pi/5$.

13. O volume do sólido obtido pela rotação do gráfico de $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ em torno do eixo das abcissas, de $x = 0$ a $x = 2\pi$, em unidades de volume, é $9\pi^2$.

14. Considere o cone de altura H obtido pela rotação da reta $y = ax$ em torno do eixo das ordenadas. Via uma integral adequada, prova-se que a medida do volume de tal sólido é, de fato, $\frac{\pi H^3}{3a^2}$ u.v..

15. Considere o parabolóide de altura H obtido pela rotação da parábola $y = ax^2$ em torno do eixo das ordenadas. Via uma integral adequada, prova-se que a medida do volume de tal sólido é, de fato, $\frac{\pi H^2}{2a}$ u.v..

16. $$\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 16}\, dx = \frac{\pi}{8}.$$

17. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + 2x + 8}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{7}}.$$

18. Seja A a medida da área da região do plano delimitada pelo semi-eixo negativo das ordenadas, o segmento de reta da origem até o ponto $(1, 0)$ e a parte do gráfico de $\ln x$ que está no quarto quadrante. Daí, em unidades de área, $A = 1$.

19. Uma explosão numa fábrica de cola cobriu as suas cercanias com uma camada de um líquido amarelo, viscoso e grudento, na forma de um calombo simetricamente arredondado. Medidas revelam que a profundidade da cola diminui com a distância a partir do "ground zero" (centro) da explosão. De fato, $D(r)$, a profundidade em metros a uma distância de r quilômetros, pode ser calculada aproximadamente pela fórmula:

$$D(r) = 2e^{-3r^2} \text{ metros.}$$

   (a) 2,1 milhões de metros cúbicos, aproximadamente, é o volume total da cola num raio de 5 quilômetros.

   (b) Supondo que o terreno da fábrica seja plano e arbitrariamente longo em todas as direções, $\frac{2\pi}{3} \cdot 10^6\,\mathrm{m}^3$, aproximadamente, é o volume total de cola espalhada por todo tal terreno.[27]

20. A função $p(x)$ dada a seguir é uma pdf:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0, \\ \frac{1}{(1+x)^2} & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

[27] Note que os valores dos itens (a) e (b) nos dizem que, a partir de 5 Km, o volume permanece quase inalterado!

DICAS/SUGESTÕES/RESOLUÇÕES PARCIAIS/TOTAIS:

1. De fato, basta observar que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(x-\frac{\pi}{2})}{\sec x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(x-\frac{\pi}{2})}{\frac{1}{\cos x}} \quad \text{(do tipo "}\infty/\infty\text{")}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} \quad \text{(L'Hôpital)}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{(do tipo "}0/0\text{")}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2\cos x \operatorname{sen} x}{\cos x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen} x} \quad \text{(L'Hôpital)}\\
&= \frac{0}{1}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. Vamos calcular o(s) ponto(s) crítico(s) e usar o Teste da Derivada de Segunda Ordem para $f(x) = e^x + 3e^{-x}$. Note primeiramente que

$$f'(x) = e^x - 3e^{-x} \ \text{ e } \ f''(x) = f(x) > 0.$$

Então

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Longrightarrow e^x = \frac{3}{e^x}\\
&\Longrightarrow e^{2x} = 3\\
&\Longrightarrow 2x = \ln 3\\
&\Longrightarrow x = \frac{1}{2}\ln 3
\end{aligned}$$

nos diz que $x = \ln\sqrt{3}$ é o único ponto crítico e que, devido a $f''\left(\ln\sqrt{3}\right) > 0$, temos um único extremo local e este é ponto de mínimo.

3.

$$\begin{aligned}
f(x) = \left(x^2+1\right)^{\ln x} &\Longrightarrow \ln f(x) = \ln x \cdot \ln\left(x^2+1\right)\\
&\Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} + \frac{2x\ln x}{x^2+1}\\
&\Longrightarrow f'(x) = \left(\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} + \frac{2x\ln x}{x^2+1}\right)\left(x^2+1\right)^{\ln x}\\
&\Longrightarrow f'(1) = \left(\frac{\ln(1+1)}{1} + \frac{2\ln 1}{1+1}\right)(1+1)^{\ln 1}\\
&\Longrightarrow f'(1) = (\ln 2 + 0)\cdot\left(2^0\right)\\
&\Longrightarrow f'(1) = \ln 2.
\end{aligned}$$

4. A aproximação linear (aqui estudada) é expressa da forma

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

desde que x esteja suficientemente próximo de a. Assim, como

$$f(x) = x \operatorname{sen}\left(\pi x^2\right) \quad \text{e} \quad f'(x) = \operatorname{sen}\left(\pi x^2\right) + 2\pi x^2 \cos\left(\pi x^2\right),$$

se $x = 1{,}99$ e $a = 2$, então

$$\begin{aligned} f(1{,}99) &\approx 0 + (0 + 8\pi)(-0{,}01) \\ &\approx -0{,}08\pi. \end{aligned}$$

5. Via o **Exemplo 8** do **Capítulo 12** do GONICK,[28]

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \operatorname{sen} x \, dx = \left[-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x \right]_0^{\pi/2}.$$

6. Considere $y^2 = x$. Daí $2y dy = dx$ e

$$\begin{aligned} F(x) &= \int e^{\sqrt{x}} \, dx \\ &= \int 2y e^y \, dy. \end{aligned}$$

Assim, via integração por partes, para

$$u = 2y \quad \text{e} \quad dv = e^y dy,$$

isto é,

$$du = 2dy \quad \text{e} \quad v = e^y,$$

temos que

$$\begin{aligned} F(x) &= 2ye^y - 2 \int e^y \, dy \\ &= 2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C. \end{aligned}$$

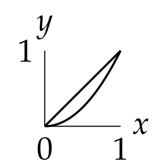
Então

$$\begin{aligned} \int_0^4 e^{\sqrt{x}} \, dx &= F(4) - F(0) \\ &= 2e^2 + 2. \end{aligned}$$

[28]Caso seja questão de Prova, a integral indefinida deve ser calculada, isto é, não pode ser usada apenas de memória!

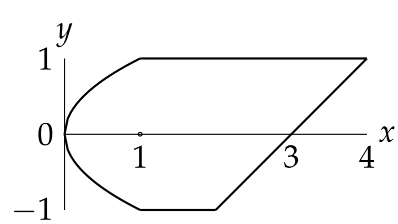
7.

$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= \left| \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx \right| \\
&= \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx \quad (x - x^2 > 0 \text{ para } x \in [0,1]) \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - (0 - 0) \\
&= \frac{1}{6} \text{ u.a.}
\end{aligned}
$$



8.

$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= \left| \int_{-1}^1 \left(y + 3 - y^2\right) dy \right| \\
&= \int_{-1}^1 \left(y + 3 - y^2\right) dy \quad (y + 3 - y^2 > 0 \text{ para } y \in [-1,1]) \\
&= \left[\frac{y^2}{2} + 3y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 \\
&= \left(\frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 3 + \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{16}{3} \text{ u.a.}
\end{aligned}
$$

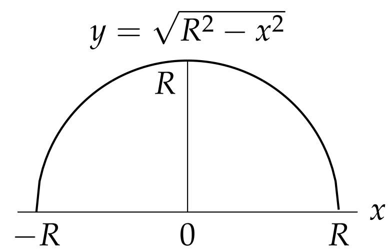


9. Resolução no **Capítulo 13** do GONICK.

10. (a)

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx &= \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2\left(1 - (x^2/R^2)\right)}\, dx \\
&= R \int_{-R}^{R} \sqrt{1 - (x/R)^2}\, dx \\
&= R \cdot R \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - u^2}\, du \\
&= R^2 \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - u^2} u - \operatorname{arccos} u \right) \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{R^2}{2} (-\operatorname{arccos} 1 + \operatorname{arccos}(-1)) \\
&= \frac{R^2}{2} (0 + \pi) \\
&= \frac{\pi R^2}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Para calcular a área de um círculo de raio R, basta considerar a circunferência de centro na origem e mesmo raio dada pela equação $x^2 + y^2 = R^2$, isto é, $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Neste caso o sinal $+$ (respectivamente, $-$) está associado a semi-circunferência superior (respectivamente, inferior).



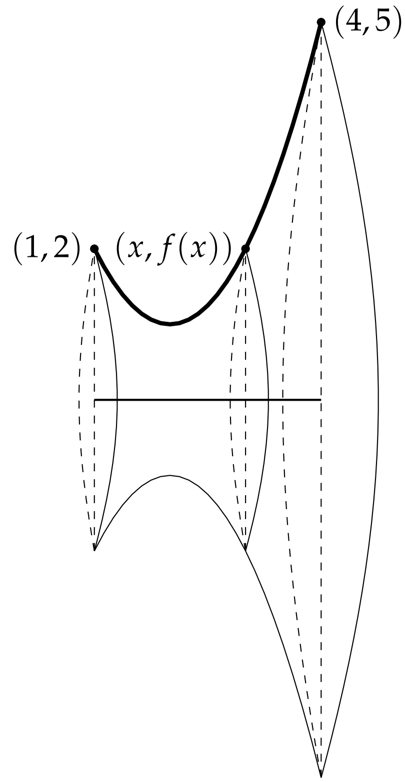
Então a área de um tal círculo pode ser obtida via

$$\begin{aligned}
2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx &= 2 \cdot \frac{\pi R^2}{2} \\
&= \pi R^2.
\end{aligned}$$

11. Resolução no **Capítulo 13** do GONICK.

12. Seja $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Daí

$$\begin{aligned}
\text{Volume} &= \int_{1}^{4} \pi f(x)^2\, dx \\
&= \int_{1}^{4} \pi \left(x^2 - 4x + 5 \right)^2\, dx \\
&= \pi \int_{1}^{4} \left(x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25 \right)\, dx \\
&= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{26x^3}{3} - 20x^2 + 25x \right]_{1}^{4} dx \\
&= \frac{78\pi}{5} \text{ u.v.}
\end{aligned}$$



13. Tal volume é obtido da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \pi(f(x))^2\, dx &= \pi \int_0^{2\pi} (2+\operatorname{sen} x)^2\, dx \\
&= \pi \int_0^{2\pi} \left(4 + 4\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x\right)\, dx \\
&= \pi \left[4x - 4\cos x + \frac{1}{2}\left(x - \operatorname{sen} x \cos x\right)\right]_0^{2\pi} \\
&= \pi(8\pi - 4 + \pi + 4) \\
&= 9\pi^2 \text{ u.v..}
\end{aligned}
$$

(A integral de $\operatorname{sen}^2 x$ está resolvida no **Exemplo 9** do **Capítulo 12** do GONICK.
Se este exercício fosse questão de prova, nada valeria caso tal exemplo fosse usado apenas de memória, sem o cálculo da integral indefinida $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$!)

14. Resolução no **Capítulo 13** do GONICK.

15. Resolução no **Capítulo 13** do GONICK.

16.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+16}\,dx &= \lim_{\delta\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{1}{x^2+16}\,dx \\
&= \lim_{\delta\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{1}{16\left(1+(x^2/16)\right)}\,dx \\
&= \lim_{\delta\to\infty} \frac{1}{16} \int_0^{\delta} \frac{1}{1+(x/4)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{16} \lim_{\delta\to\infty} 4 \int_0^{\delta/4} \frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= \frac{1}{4} \lim_{\delta\to\infty} \big[\arctan u\big]_0^{\delta/4} \\
&= \frac{1}{4} \lim_{\delta\to\infty} \left(\arctan\frac{\delta}{4} - \arctan 0\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\
&= \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{OBSERVAÇÃO:}}$ Tanto nesta questão quanto na próxima, no cálculo dos limites,

$$
\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}
$$

são usados. De fato, confira o gráfico da função $\arctan x$ no final do **Capítulo 0** do GONICK.

17. Se $F(x)$ é primitiva de

$$
f(x) = \frac{1}{x^2+2x+8},
$$

isto é,

$$
\int f(x)\,dx = F(x) + C
$$

para qualquer C constante, então tal F pode ser obtida via:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{1}{x^2+2x+8}\,dx \\
&= \int \frac{1}{x^2+2x+1+7}\,dx \\
&= \int \frac{1}{(x+1)^2+7}\,dx \\
&= \int \frac{1}{u^2+7}\,du \\
&= \int \frac{1}{u^2+\sqrt{7}^2}\,du \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{7}^2\left(1+\left(u^2/\sqrt{7}^2\right)\right)}\,du \\
&= \frac{1}{7}\int \frac{1}{1+\left(u/\sqrt{7}\right)^2}\,du \\
&= \frac{1}{7}\cdot\sqrt{7}\int \frac{1}{1+v^2}\,dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan v \\
&= \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan \frac{u}{\sqrt{7}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan \frac{x+1}{\sqrt{7}}.
\end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+8}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx \\
&= \lim_{\epsilon\to-\infty}\int_{\epsilon}^{0} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to\infty}\int_{0}^{\delta} f(x)\,dx \\
&= \lim_{\epsilon\to-\infty}(F(0)-F(\epsilon)) + \lim_{\delta\to\infty}(F(\delta)-F(0)) \\
&= \cancel{F(0)} - \left(\lim_{\epsilon\to-\infty} F(\epsilon)\right) + \left(\lim_{\delta\to\infty} F(\delta)\right) - \cancel{F(0)}
\end{aligned}$$

caso existam tais limites. Assim

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+8}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{7}}\left(-\lim_{\epsilon\to-\infty}\arctan\frac{\epsilon+1}{\sqrt{7}} + \lim_{\delta\to\infty}\arctan\frac{\delta+1}{\sqrt{7}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{7}}\left(-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{7}}.
\end{aligned}$$

18. Temos que verificar que

$$A = \left| \int_0^1 \ln x \, dx \right| \\ = 1.$$

De fato, por um lado, considere o gráfico da função $\ln x$ no final do **Capítulo 0** do GONICK. (Mais especificamente, considere apenas o quarto quadrante daquela figura.) Por outro lado, vimos no **Exemplo 6** do Capítulo 12 (via integração por partes) que

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C.$$

Daí

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x \, dx &= \lim_{\tau \to 0^+} \int_\tau^1 \ln x \, dx \\ &= \lim_{\tau \to 0^+} \big[x(\ln x - 1) \big] \big]_\tau^1 \\ &= \lim_{\tau \to 0^+} [(\ln 1 - 1) - (\tau(\ln \tau - 1))] \\ &= -1 - \lim_{\tau \to 0^+} \frac{\ln \tau - 1}{1/\tau} \end{aligned}$$

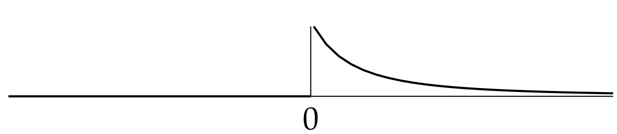
caso exista tal limite. Assim, via L'Hopital,

$$\begin{aligned} A &= \left| -1 - \lim_{\tau \to 0^+} \frac{1/\tau}{-1/\tau^2} \right| \\ &= \left| -1 + \lim_{\tau \to 0^+} \tau \right| \\ &= |-1| \\ &= 1. \end{aligned}$$

19. Resoluções no **Capítulo 13** do GONICK.

20. Como $p(x)$ é não-negativa, resta verificar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \, dx = 1.$$



De fato,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} p(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} p(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx \\
&= 0 + \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{1+t} u^{-2}\,du \qquad\qquad (u = 1 + x) \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{u^{-1}}{-1}\right]_{1}^{1+t} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{1+t} + 1\right) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$