Recorrências ou Equações a Diferenças Finitas (EDF)

Uma Introdução - Parte Um

José Renato Ramos Barbosa

www.ufpr.br/∼jrrb

30/01/2012-17/02/2012

EDF (Linear de Ordem k c/ Coeficientes Complexos Ctes)

$$L[s_n] = s_n - c_1 s_{n-1} - c_2 s_{n-2} - \cdots - c_k s_{n-k},$$

$$n \geq k,\ c_i \in \mathbb{C},\ i = 1, \ldots, k,\ c_k \neq 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{(H)} \quad \boxed{L[s_n] = 0},$$

$$\text{(NH)} \quad \boxed{L[s_n] = \psi(n)},$$

sendo $\psi : \{n \in \mathbb{N} \ :\ n \geq k\} \to \mathbb{C}$.

Solução do Problema de Valor Inicial (PVI) para (H)

Sequência (s_n) em $\mathbb{C}$ que satisfaz (H),

i.e., $\boxed{s_{n+k} = c_1 s_{n+k-1} + \cdots + c_k s_n}$,

com $s_0 = \alpha_0, \ldots, s_{k-1} = \alpha_{k-1}$.

Exemplo: Sequência de Fibonacci

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,\ f_0 = 0,\ f_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(f_n) = \left(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots, \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_0^n - \lambda_1^n), \ldots\right),$$

$$\lambda_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Existência de Solução do PVI para (H)

- De $s_0 = \alpha_0, \ldots, s_{k-1} = \alpha_{k-1}$, temos

$$s_k \overset{(H)}{=} c_1\alpha_{k-1} + \cdots + c_k\alpha_0.$$

Existência de Solução do PVI para (H)

- De $s_0 = \alpha_0, \ldots, s_{k-1} = \alpha_{k-1}$, temos

$$s_k \overset{(H)}{=} c_1\alpha_{k-1} + \cdots + c_k\alpha_0.$$

- Suposição: Obtemos $s_n, \ldots, s_{n+k-1}$

$$(\text{e } s_{n+k} \overset{(H)}{=} c_1 s_{n+k-1} + \cdots + +c_k s_n).$$

Existência de Solução do PVI para (H)

- De $s_0 = \alpha_0, \dots, s_{k-1} = \alpha_{k-1}$, temos

$$s_k \overset{(H)}{=} c_1\alpha_{k-1} + \cdots + c_k\alpha_0.$$

- Suposição: Obtemos $s_n, \dots, s_{n+k-1}$

$$(\text{e } s_{n+k} \overset{(H)}{=} c_1 s_{n+k-1} + \cdots + +c_k s_n).$$

- Daí, de $s_{n+1}, \dots, s_{n+k}$, temos

$$s_{n+k+1} \overset{(H)}{=} c_1 s_{n+k} + \cdots + c_k s_{n+1}.$$

Unicidade de Solução do PVI para (H)

- (α_n) e (β_n) soluções do PVI com $\alpha_i = \beta_i$, $i = 0, \ldots, k-1$.

Unicidade de Solução do PVI para (H)

- (α_n) e (β_n) soluções do PVI com $\alpha_i = \beta_i$, $i = 0, \ldots, k-1$.
- Daí:

Unicidade de Solução do PVI para (H)

- (α_n) e (β_n) soluções do PVI com $\alpha_i = \beta_i$, $i = 0, \ldots, k-1$.
- Daí:
  - $\alpha_k \overset{(H)}{=} \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_{k-i} = \sum_{i=1}^{k} c_i \beta_{k-i} \overset{(H)}{=} \beta_k$;

Unicidade de Solução do PVI para (H)

- (α_n) e (β_n) soluções do PVI com $\alpha_i = \beta_i$, $i = 0, \ldots, k-1$.
- Daí:
  - $\alpha_k \stackrel{(H)}{=} \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_{k-i} = \sum_{i=1}^{k} c_i \beta_{k-i} \stackrel{(H)}{=} \beta_k$;
  - $\alpha_{k+1} \stackrel{(H)}{=} \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_{k+1-i} = \sum_{i=1}^{k} c_i \beta_{k+1-i} \stackrel{(H)}{=} \beta_{k+1}$;

Unicidade de Solução do PVI para (H)

- (α_n) e (β_n) soluções do PVI com $\alpha_i = \beta_i$, $i = 0, \ldots, k-1$.
- Daí:
  - $\alpha_k \overset{(H)}{=} \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_{k-i} = \sum_{i=1}^{k} c_i \beta_{k-i} \overset{(H)}{=} \beta_k$;
  - $\alpha_{k+1} \overset{(H)}{=} \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_{k+1-i} = \sum_{i=1}^{k} c_i \beta_{k+1-i} \overset{(H)}{=} \beta_{k+1}$;
  - $\cdots$

Unicidade de Solução do PVI para (H)

- (α_n) e (β_n) soluções do PVI com $\alpha_i = \beta_i$, $i = 0, \ldots, k-1$.
- Daí:
  - $\alpha_k \overset{\text{(H)}}{=} \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_{k-i} = \sum_{i=1}^{k} c_i \beta_{k-i} \overset{\text{(H)}}{=} \beta_k$;
  - $\alpha_{k+1} \overset{\text{(H)}}{=} \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_{k+1-i} = \sum_{i=1}^{k} c_i \beta_{k+1-i} \overset{\text{(H)}}{=} \beta_{k+1}$;
  - $\cdots$
- Daí $\alpha_n = \beta_n$, para todo $n \geq 0$.

$\mathcal{X}$, Subespaço de $\mathbb{C}^\infty$ de Dimensão k

- Se $(s_n^{(i)}) \in \mathcal{X}$ e $a_i \in \mathbb{C}$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, então

$$(s_n) = \left(\sum_{i=i}^{m} a_i s_n^{(i)} \right) \in \mathcal{X}.$$

$\mathcal{X}$, Subespaço de $\mathbb{C}^\infty$ de Dimensão k

- Se $(s_n^{(i)}) \in \mathcal{X}$ e $a_i \in \mathbb{C}$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, então

$$(s_n) = \left(\sum_{i=i}^{m} a_i s_n^{(i)} \right) \in \mathcal{X}.$$

- De fato,

$$s_{n+k} = \sum_{i=i}^{m} a_i s_{n+k}^{(i)} \overset{(H)}{=} \sum_{i=i}^{m} a_i \sum_{j=1}^{k} c_j s_{n+k-j}^{(i)}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{i=1}^{m} a_i s_{n+k-j}^{(i)} = \sum_{j=1}^{k} c_j s_{n+k-j}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{X}$, Subespaço de $\mathbb{C}^\infty$ de Dimensão k

- Se $(s_n^{(i)}) \in \mathcal{X}$ e $a_i \in \mathbb{C}$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, então

$$(s_n) = \left(\sum_{i=i}^{m} a_i s_n^{(i)} \right) \in \mathcal{X}.$$

- De fato,

$$s_{n+k} = \sum_{i=i}^{m} a_i s_{n+k}^{(i)} \overset{(\mathrm{H})}{=} \sum_{i=i}^{m} a_i \sum_{j=1}^{k} c_j s_{n+k-j}^{(i)}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{i=1}^{m} a_i s_{n+k-j}^{(i)} = \sum_{j=1}^{k} c_j s_{n+k-j}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Quanto a dimensão de $\mathcal{X}$?

$\mathcal{X}$ é Isomorfo a $\mathbb{C}^k$

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathbb{C}^k \\ & (s_n) & \longmapsto & (s_{k-1}, \ldots, s_1, s_0)^T \end{array}$$

é isomorfismo.

Demonstração

- π bem definida: toda sequência em $\mathcal{X}$ tem uma única sequência de k condições iniciais;

Demonstração

- π bem definida: toda sequência em $\mathcal{X}$ tem uma única sequência de k condições iniciais;
- π sobrejetora: cada sequência $(s_0, \ldots, s_{k-1})$ pode ser extendida a uma sequência em $\mathcal{X}$;

Demonstração

- π bem definida: toda sequência em $\mathcal{X}$ tem uma única sequência de k condições iniciais;
- π sobrejetora: cada sequência $(s_0, \ldots, s_{k-1})$ pode ser extendida a uma sequência em $\mathcal{X}$;
- π injetora: via unicidade de soluções;

Demonstração

- π bem definida: toda sequência em $\mathcal{X}$ tem uma única sequência de k condições iniciais;
- π sobrejetora: cada sequência $(s_0, \ldots, s_{k-1})$ pode ser extendida a uma sequência em $\mathcal{X}$;
- π injetora: via unicidade de soluções;
- π linear:

$$\pi(\alpha(x_n) + \beta(y_n)) = (\alpha x_{k-1} + \beta y_{k-1}, \ldots, \alpha x_0 + \beta y_0)^T =$$

$$\alpha(x_{k-1}, \ldots, x_0)^T + \alpha(y_{k-1}, \ldots, y_0)^T = \alpha\pi(x_n) + \beta\pi(y_n),$$

$\forall (x_n), (y_n) \in \mathcal{X}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

π^{-1} leva Base em Base

- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ base canônica de $\mathbb{C}^k \Rightarrow$ $\left\{\pi^{-1}(\mathbf{e}_1), \ldots, \pi^{-1}(\mathbf{e}_k)\right\}$ base de $\mathcal{X}$.

π^{-1} leva Base em Base

- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ base canônica de $\mathbb{C}^k \Rightarrow$ $\left\{\pi^{-1}(\mathbf{e}_1), \ldots, \pi^{-1}(\mathbf{e}_k)\right\}$ base de $\mathcal{X}$.
- Solução do PVI com condições iniciais $s_0 = \alpha_0, \ldots, s_{k-1} = \alpha_{k-1}$:

$$\alpha_0 \pi^{-1}(\mathbf{e}_k) + \cdots + \alpha_{k-1}\pi^{-1}(\mathbf{e}_1).$$

π^{-1} leva Base em Base

- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ base canônica de $\mathbb{C}^k \Rightarrow$ $\{\pi^{-1}(\mathbf{e}_1), \ldots, \pi^{-1}(\mathbf{e}_k)\}$ base de $\mathcal{X}$.
- Solução do PVI com condições iniciais $s_0 = \alpha_0, \ldots, s_{k-1} = \alpha_{k-1}$:

$$\alpha_0 \pi^{-1}(\mathbf{e}_k) + \cdots + \alpha_{k-1} \pi^{-1}(\mathbf{e}_1).$$

- $\{\pi^{-1}(\mathbf{e}_1), \ldots, \pi^{-1}(\mathbf{e}_k)\}$ pode não ser a melhor base de $\mathcal{X}$ para obtermos uma fórmula simples para o n-ésimo termo da solução de um PVI.

Exemplo:Recorrência de Fibonacci

- Qual a solução do PVI $\boxed{f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \;\; f_0 = -1, \, f_1 = 3}$?

Exemplo:Recorrência de Fibonacci

- Qual a solução do PVI $\boxed{f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad f_0 = -1, \; f_1 = 3}$?
- $$3\pi^{-1}(\mathbf{e}_1) + (-1)\pi^{-1}(\mathbf{e}_2) =$$
$$3(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots) - 1(1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots) =$$
$$(-1, 3, 2, 5, 7, 12, \ldots).$$

Matriz Companheira e Polinômio Característico de (H)

- $S_n \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} s_{n+k-1} \\ \vdots \\ s_{n+1} \\ s_n \end{bmatrix}$;

Matriz Companheira e Polinômio Característico de (H)

- $S_n \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} s_{n+k-1} \\ \vdots \\ s_{n+1} \\ s_n \end{bmatrix}$;
- $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & & \text{zeros} & \\ & 1 & 0 & & \\ & \text{zeros} & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

Matriz Companheira e Polinômio Característico de (H)

- $S_n \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} s_{n+k-1} \\ \vdots \\ s_{n+1} \\ s_n \end{bmatrix};$
- $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & & \text{zeros} & \\ & 1 & 0 & & \\ & \text{zeros} & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix};$
- $c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_k;$

Matriz Companheira e Polinômio Característico de (H)

- $S_n \overset{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} s_{n+k-1} \\ \vdots \\ s_{n+1} \\ s_n \end{bmatrix}$;
- $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & & \text{zeros} & \\ & 1 & 0 & & \\ & \text{zeros} & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$;
- $c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_k$;
- Forma Matricial de (H): $\boxed{S_{n+1} = CS_n}$;

Matriz Companheira e Polinômio Característico de (H)

- $S_n \overset{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} s_{n+k-1} \\ \vdots \\ s_{n+1} \\ s_n \end{bmatrix}$;
- $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & & \text{zeros} & \\ & 1 & 0 & & \\ & \text{zeros} & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$;
- $c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_k$;
- Forma Matricial de (H): $\boxed{S_{n+1} = CS_n}$;
- $S_1 = CS_0,\ S_2 = CS_1 = C^2 S_0,\ \ldots,\ S_n = C^n S_0$.

Exemplo: Fibonacci, Novamente!

- $\begin{bmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$

Exemplo: Fibonacci, Novamente!

- $\begin{bmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$
- $c(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - x - 1 \Rightarrow$

  C tem autovalores $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$;

Exemplo: Fibonacci, Novamente!

- $\begin{bmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$
- $c(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - x - 1 \Rightarrow$
  C tem autovalores $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$;
- $(C - \lambda_i I)C_i = 0,\ i = 1, 2 \Rightarrow$
  $C_1 = (-2/(1-\sqrt{5}), 1)^T$ e $C_2 = (-2/(1+\sqrt{5}), 1)^T$
  autovetores LI de C;

Exemplo: Fibonacci, Novamente!

- $\begin{bmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$
- $c(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - x - 1 \Rightarrow$
  C tem autovalores $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$;
- $(C - \lambda_i I)C_i = 0,\ i = 1, 2 \Rightarrow$
  $C_1 = (-2/(1-\sqrt{5}), 1)^T$ e $C_2 = (-2/(1+\sqrt{5}), 1)^T$
  autovetores LI de C;
- $P = \begin{bmatrix} -2/(1-\sqrt{5}) & -2/(1+\sqrt{5}) \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$
  $D^n = \begin{bmatrix} [(1+\sqrt{5})/2]^n & 0 \\ 0 & [(1-\sqrt{5})/2]^n \end{bmatrix}$ e
  $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/(\sqrt{5}(1+\sqrt{5})) \\ -1/\sqrt{5} & -2/(\sqrt{5}(1-\sqrt{5})) \end{bmatrix};$

Exemplo: Fibonacci, Novamente!

- $\begin{bmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$
- $c(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - x - 1 \Rightarrow$
  C tem autovalores $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$;
- $(C - \lambda_i I)C_i = 0,\ i = 1, 2 \Rightarrow$
  $C_1 = (-2/(1-\sqrt{5}), 1)^T$ e $C_2 = (-2/(1+\sqrt{5}), 1)^T$
  autovetores LI de C;
- $P = \begin{bmatrix} -2/(1-\sqrt{5}) & -2/(1+\sqrt{5}) \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$
  $D^n = \begin{bmatrix} [(1+\sqrt{5})/2]^n & 0 \\ 0 & [(1-\sqrt{5})/2]^n \end{bmatrix}$ e
  $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/(\sqrt{5}(1+\sqrt{5})) \\ -1/\sqrt{5} & -2/(\sqrt{5}(1-\sqrt{5})) \end{bmatrix};$
- $F_n = C^n F_0 = PD^nP^{-1}F_0 \overset{F_0=(1,0)^T}{\Longrightarrow} f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$

Teorema Fundamental

Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ as raízes distintas de $c(x)$ de multiplicidades $m_1, \ldots, m_t$, respectivamente. Daí

$$(s_n) \text{ é solução de (H)}$$

se, e somente se,

$$s_n = a_1(n)\lambda_1^n + \cdots + a_t(n)\lambda_t^n$$

é seu n-ésimo termo e cada a_i é polinômio em x de grau menor que m_i.

Exemplo: $s_{n+4} = s_{n+3} + 3s_{n+2} - 5s_{n+1} + 2s_n$, $s_0 = 1$, $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$

- $c(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x-1)^3(x+2)$;

Exemplo: $s_{n+4} = s_{n+3} + 3s_{n+2} - 5s_{n+1} + 2s_n$, $s_0 = 1$, $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$

- $c(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x-1)^3(x+2)$;
- $\lambda_1 = 1$, $m_1 = 3$; $\lambda_2 = -2$, $m_2 = 1$;

Exemplo: $s_{n+4} = s_{n+3} + 3s_{n+2} - 5s_{n+1} + 2s_n$, $s_0 = 1$, $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$

- $c(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x-1)^3(x+2)$;
- $\lambda_1 = 1$, $m_1 = 3$; $\lambda_2 = -2$, $m_2 = 1$;
- $s_n = a_1(n)(1)^n + a_2(n)(-2)^n$; $a_1(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$,$a_2(x) = \beta_3$;

Exemplo: $s_{n+4} = s_{n+3} + 3s_{n+2} - 5s_{n+1} + 2s_n$, $s_0 = 1$, $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$

- $c(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x-1)^3(x+2)$;
- $\lambda_1 = 1$, $m_1 = 3$; $\lambda_2 = -2$, $m_2 = 1$;
- $s_n = a_1(n)(1)^n + a_2(n)(-2)^n$; $a_1(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$, $a_2(x) = \beta_3$;
- $s_n = (\beta_0 + \beta_1 n + \beta_2 n^2) + \beta_3(-2)^n$;

Exemplo: $s_{n+4} = s_{n+3} + 3s_{n+2} - 5s_{n+1} + 2s_n$, $s_0 = 1$, $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$

- $c(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x-1)^3(x+2)$;
- $\lambda_1 = 1$, $m_1 = 3$; $\lambda_2 = -2$, $m_2 = 1$;
- $s_n = a_1(n)(1)^n + a_2(n)(-2)^n$; $a_1(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$,$a_2(x) = \beta_3$;
- $s_n = (\beta_0 + \beta_1 n + \beta_2 n^2) + \beta_3(-2)^n$;
- Cálculo dos β_i's via condições iniciais:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & -8 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Escalonamento}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 8/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/9 \end{bmatrix};$$

Exemplo: $s_{n+4} = s_{n+3} + 3s_{n+2} - 5s_{n+1} + 2s_n$, $s_0 = 1$, $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$

- $c(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x-1)^3(x+2)$;
- $\lambda_1 = 1$, $m_1 = 3$; $\lambda_2 = -2$, $m_2 = 1$;
- $s_n = a_1(n)(1)^n + a_2(n)(-2)^n$; $a_1(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$,$a_2(x) = \beta_3$;
- $s_n = (\beta_0 + \beta_1 n + \beta_2 n^2) + \beta_3(-2)^n$;
- Cálculo dos β_i's via condições iniciais:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & -8 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Escalonamento}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 8/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/9 \end{bmatrix};$$

- $s_n = \frac{8}{9} - \frac{8}{3}n + n^2 + \frac{1}{9}(-2)^n$.

Exemplo: $s_{n+4} = s_{n+3} + 3s_{n+2} - 5s_{n+1} + 2s_n$, $s_0 = 1$, $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$

- $c(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x-1)^3(x+2)$;
- $\lambda_1 = 1$, $m_1 = 3$; $\lambda_2 = -2$, $m_2 = 1$;
- $s_n = a_1(n)(1)^n + a_2(n)(-2)^n$; $a_1(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2, a_2(x) = \beta_3$;
- $s_n = (\beta_0 + \beta_1 n + \beta_2 n^2) + \beta_3(-2)^n$;
- Cálculo dos β_i's via condições iniciais:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & -8 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Escalonamento}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 8/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/9 \end{bmatrix};$$
- $s_n = \frac{8}{9} - \frac{8}{3}n + n^2 + \frac{1}{9}(-2)^n$.
- Teste:
$$s_4 = \frac{8}{9} - \frac{32}{3} + 16 + \frac{16}{9} = 8 = 1 + 0 + 5 + 2 = s_3 + 3s_2 - 5s_1 + 2s_0.$$

Observações

- Idéia da Demonstração do Teorema Fundamental: Via Forma Canônica Racional (Álgebra Linear), obtemos base $\{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_k\}$ de $\mathbb{C}^k$, sendo $\{\pi^{-1}(\mathbf{b}_1), \ldots, \pi^{-1}(\mathbf{b}_k)\}$ a base mais simples possível de $\mathcal{X}$ com a qual podemos obter o n-ésimo termo de (s_n).

Observações

- Idéia da Demonstração do Teorema Fundamental: Via Forma Canônica Racional (Álgebra Linear), obtemos base $\{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_k\}$ de $\mathbb{C}^k$, sendo $\{\pi^{-1}(\mathbf{b}_1), \ldots, \pi^{-1}(\mathbf{b}_k)\}$ a base mais simples possível de $\mathcal{X}$ com a qual podemos obter o n-ésimo termo de (s_n).
- Se C tem k autovalores distintos (entre si), o n-ésimo termo da solução é dado por

$$s_n = a_1\lambda_1^n + \cdots + a_k\lambda_k^n,$$

com a_i's em $\mathbb{C}$.

Demonstração para $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ Distintos

- λ autovalor de C.

Demonstração para $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ Distintos

- λ autovalor de C.
- Daí $\mathbf{v}_\lambda = (\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \ldots, \lambda, 1)^T$ é autovetor associado.

Demonstração para $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ Distintos

- λ autovalor de C.
- Daí $\mathbf{v}_\lambda = (\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \ldots, \lambda, 1)^T$ é autovetor associado.
  - De fato, como $c(\lambda) = 0$,

$$C\mathbf{v}_\lambda = (c_1\lambda^{k-1} + c_2\lambda^{k-2} + \cdots + c_k, \lambda^{k-1}, \ldots, \lambda)^T =$$

$$(\lambda^k, \lambda^{k-1}, \ldots, \lambda)^T = \lambda(\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \ldots, 1)^T = \lambda\mathbf{v}_\lambda.$$

Demonstração para $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ Distintos

- λ autovalor de C.
- Daí $\mathbf{v}_\lambda = (\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \ldots, \lambda, 1)^T$ é autovetor associado.
    - De fato, como $c(\lambda) = 0$,

$$C\mathbf{v}_\lambda = (c_1\lambda^{k-1} + c_2\lambda^{k-2} + \cdots + c_k, \lambda^{k-1}, \ldots, \lambda)^T =$$

$$(\lambda^k, \lambda^{k-1}, \ldots, \lambda)^T = \lambda(\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \ldots, 1)^T = \lambda\mathbf{v}_\lambda.$$

- $\pi^{-1}(\mathbf{v}_\lambda) = (\lambda^n) \in \mathcal{X}$.

Demonstração para $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ Distintos

- λ autovalor de C.
- Daí $\mathbf{v}_\lambda = (\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \ldots, \lambda, 1)^T$ é autovetor associado.
  - De fato, como $c(\lambda) = 0$,

$$C\mathbf{v}_\lambda = (c_1\lambda^{k-1} + c_2\lambda^{k-2} + \cdots + c_k, \lambda^{k-1}, \ldots, \lambda)^T =$$

$$(\lambda^k, \lambda^{k-1}, \ldots, \lambda)^T = \lambda(\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \ldots, 1)^T = \lambda\mathbf{v}_\lambda.$$

- $\pi^{-1}(\mathbf{v}_\lambda) = (\lambda^n) \in \mathcal{X}$.
  - De fato, defina $s_n = \lambda^n$.

Demonstração para $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ Distintos

- λ autovalor de C.
- Daí $\mathbf{v}_\lambda = (\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \ldots, \lambda, 1)^T$ é autovetor associado.
    - De fato, como $c(\lambda) = 0$,

$$C\mathbf{v}_\lambda = (c_1\lambda^{k-1} + c_2\lambda^{k-2} + \cdots + c_k, \lambda^{k-1}, \ldots, \lambda)^T =$$

$$(\lambda^k, \lambda^{k-1}, \ldots, \lambda)^T = \lambda(\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \ldots, 1)^T = \lambda\mathbf{v}_\lambda.$$

- $\pi^{-1}(\mathbf{v}_\lambda) = (\lambda^n) \in \mathcal{X}$.
    - De fato, defina $s_n = \lambda^n$.
    - Daí $S_n = \lambda^n\mathbf{v}_\lambda$ e $CS_n = \lambda^n C\mathbf{v}_\lambda = \lambda^{n+1}\mathbf{v}_\lambda = S_{n+1}$.

Demonstração para $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ Distintos

- λ autovalor de C.
- Daí $\mathbf{v}_\lambda = (\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \ldots, \lambda, 1)^T$ é autovetor associado.
  - De fato, como $c(\lambda) = 0$,

$$C\mathbf{v}_\lambda = (c_1\lambda^{k-1} + c_2\lambda^{k-2} + \cdots + c_k, \lambda^{k-1}, \ldots, \lambda)^T =$$

$$(\lambda^k, \lambda^{k-1}, \ldots, \lambda)^T = \lambda(\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \ldots, 1)^T = \lambda\mathbf{v}_\lambda.$$

- $\pi^{-1}(\mathbf{v}_\lambda) = (\lambda^n) \in \mathcal{X}$.
  - De fato, defina $s_n = \lambda^n$.
  - Daí $S_n = \lambda^n\mathbf{v}_\lambda$ e $CS_n = \lambda^n C\mathbf{v}_\lambda = \lambda^{n+1}\mathbf{v}_\lambda = S_{n+1}$.
  - Daí $(s_n) \in \mathcal{X}$ com vetor inicial $S_0 = \mathbf{v}_\lambda$.

Demonstração para $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ Distintos

- λ autovalor de C.
- Daí $\mathbf{v}_\lambda = (\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \dots, \lambda, 1)^T$ é autovetor associado.
    - De fato, como $c(\lambda) = 0$,

$$C\mathbf{v}_\lambda = (c_1\lambda^{k-1} + c_2\lambda^{k-2} + \cdots + c_k, \lambda^{k-1}, \dots, \lambda)^T =$$

$$(\lambda^k, \lambda^{k-1}, \dots, \lambda)^T = \lambda(\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \dots, 1)^T = \lambda\mathbf{v}_\lambda.$$

- $\pi^{-1}(\mathbf{v}_\lambda) = (\lambda^n) \in \mathcal{X}$.
    - De fato, defina $s_n = \lambda^n$.
    - Daí $S_n = \lambda^n\mathbf{v}_\lambda$ e $CS_n = \lambda^n C\mathbf{v}_\lambda = \lambda^{n+1}\mathbf{v}_\lambda = S_{n+1}$.
    - Daí $(s_n) \in \mathcal{X}$ com vetor inicial $S_0 = \mathbf{v}_\lambda$.
- $\{\mathbf{v}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{v}_{\lambda_k}\}$ base de $\mathbb{C}^k$. Daí $\{(\lambda_1^n), \dots, (\lambda_k^n)\}$ é base de $\mathcal{X}$.

$$\boxed{s_n = \lambda s_{n-1} + \psi(n),\ s_0 = \alpha_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{s_n = \alpha_0\lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \psi(i)\lambda^{n-i},\ \forall n > 0}$$

- $s_1 = \lambda s_0 + \psi(1) = \alpha_0\lambda^1 + \sum_{i=1}^{1} \psi(i)\lambda^{1-i}$;

$$\boxed{s_n = \lambda s_{n-1} + \psi(n),\ s_0 = \alpha_0} \Rightarrow$$
$$\boxed{s_n = \alpha_0 \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \psi(i)\lambda^{n-i},\ \forall n > 0}$$

- $s_1 = \lambda s_0 + \psi(1) = \alpha_0 \lambda^1 + \sum_{i=1}^{1} \psi(i)\lambda^{1-i}$;
- $s_n \overset{\text{Hipótese de Indução}}{=} \lambda\left(\alpha_0 \lambda^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \psi(i)\lambda^{n-1-i}\right) + \sum_{i=n}^{n} \psi(i)\lambda^{n-i} = \alpha_0 \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \psi(i)\lambda^{n-i}$.

$$\boxed{s_n = \lambda s_{n-1} + \psi(n),\ s_0 = \alpha_0} \Rightarrow$$
$$\boxed{s_n = \alpha_0 \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \psi(i) \lambda^{n-i},\ \forall n > 0}$$

- $s_1 = \lambda s_0 + \psi(1) = \alpha_0 \lambda^1 + \sum_{i=1}^{1} \psi(i) \lambda^{1-i}$;
- $s_n \overset{\text{Hipótese de Indução}}{=} \lambda \left(\alpha_0 \lambda^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \psi(i) \lambda^{n-1-i} \right) + \sum_{i=n}^{n} \psi(i) \lambda^{n-i} = \alpha_0 \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \psi(i) \lambda^{n-i}$.
- Exemplo:
  $s_n = \lambda s_{n-1} + \text{cte},\ s_0 = \alpha_0 \Rightarrow$
  $s_n = \alpha_0 \lambda^n + \text{cte}(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1)$
  $= \begin{cases} \alpha_0 \lambda^n + \text{cte} \left(\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} \right), & \text{se } \lambda \neq 1; \\ \alpha_0 + \text{cte}\, n, & \text{se } \lambda = 1, \end{cases}$

$L[-]$ é Operador Linear

- Seja $\left\{(x_n^{(1)}), \ldots, (x_n^{(k)})\right\}$ base de $\mathcal{X}$, i.e.,

$$L[x_n^{(1)}] = \cdots = L[x_n^{(k)}] = 0.$$

$L[-]$ é Operador Linear

- Seja $\left\{(x_n^{(1)}), \ldots, (x_n^{(k)})\right\}$ base de $\mathcal{X}$, i.e.,
$$L[x_n^{(1)}] = \cdots = L[x_n^{(k)}] = 0.$$
- Daí, para quaisquer α_1, ..., α_k,
$$L[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_n^{(i)}] = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i L[x_n^{(i)}] = 0.$$

$L[-]$ é Operador Linear

- Seja $\left\{(x_n^{(1)}), \ldots, (x_n^{(k)})\right\}$ base de $\mathcal{X}$, i.e.,
$$L[x_n^{(1)}] = \cdots = L[x_n^{(k)}] = 0.$$
- Daí, para quaisquer α_1, ..., α_k,
$$L[\sum_{i=1}^k \alpha_i x_n^{(i)}] = \sum_{i=1}^k \alpha_i L[x_n^{(i)}] = 0.$$
- Como $\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_n^{(i)}\right) \in \mathcal{X}$, podemos obter os α_i's para o PVI
$$\boxed{L[\sum_{i=1}^k \alpha_i x_n^{(i)}] = 0, \ \ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_0^{(i)} = s_0, \ldots, \sum_{i=1}^k \alpha_i x_{k-1}^{(i)} = s_{k-1}},$$
resolvendo o sistema de k equações lineares nas variáveis α_1, ..., α_k dadas pelas condições iniciais.

$L[-]$ é Operador Linear

- Seja $\left\{(x_n^{(1)}), \ldots, (x_n^{(k)})\right\}$ base de $\mathcal{X}$, i.e.,
$$L[x_n^{(1)}] = \cdots = L[x_n^{(k)}] = 0.$$
- Daí, para quaisquer α_1, ..., α_k,
$$L[\sum_{i=1}^k \alpha_i x_n^{(i)}] = \sum_{i=1}^k \alpha_i L[x_n^{(i)}] = 0.$$
- Como $\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_n^{(i)}\right) \in \mathcal{X}$, podemos obter os α_i's para o PVI
$$\boxed{L[\sum_{i=1}^k \alpha_i x_n^{(i)}] = 0, \ \ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_0^{(i)} = s_0, \ldots, \sum_{i=1}^k \alpha_i x_{k-1}^{(i)} = s_{k-1}},$$
resolvendo o sistema de k equações lineares nas variáveis α_1, ..., α_k dadas pelas condições iniciais.
- De fato, $\sum_{i=1}^k \alpha_i (x_0^{(i)}, \ldots, x_{k-1}^{(i)})^T = (s_0, \ldots, s_{k-1})^T$ e $\left\{(x_0^{(i)}, \ldots, x_{k-1}^{(i)})^T \ : \ i = 1, \ldots, k\right\}$ é LI. Caso contrário, $\left\{(x_n^{(i)}) \ : \ i = 1, \ldots, k\right\}$ seria LD!

$L[-]$ é Operador Linear

- Sendo (h_n) solução geral de (H) e (p_n) solução particular de (NH):

$L[-]$ é Operador Linear

- Sendo (h_n) solução geral de (H) e (p_n) solução particular de (NH):
  - $h_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_n^{(i)}$, $L[h_n] = 0$ e $L[p_n] = \psi(n)$;

$L[-]$ é Operador Linear

- Sendo (h_n) solução geral de (H) e (p_n) solução particular de (NH):
  - $h_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_n^{(i)}$, $L[h_n] = 0$ e $L[p_n] = \psi(n)$;
  - $L[h_n + p_n] = \psi(n)$, i.e., $(h_n + p_n)$ é solução de (NH).

$L[-]$ é Operador Linear

- Sendo (h_n) solução geral de (H) e (p_n) solução particular de (NH):
  - $h_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_n^{(i)}$, $L[h_n] = 0$ e $L[p_n] = \psi(n)$;
  - $L[h_n + p_n] = \psi(n)$, i.e., $(h_n + p_n)$ é solução de (NH).
- Resolver o PVI

$$\boxed{L[s_n] = \psi(n), \;\; s_0 = \beta_0, \ldots, s_{k-1} = \beta_{k-1}}$$

é obter $s_n = h_n + p_n$ satisfazendo as condições iniciais, i.e., é obter:

$L[-]$ é Operador Linear

- Sendo (h_n) solução geral de (H) e (p_n) solução particular de (NH):
  - $h_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_n^{(i)}$, $L[h_n] = 0$ e $L[p_n] = \psi(n)$;
  - $L[h_n + p_n] = \psi(n)$, i.e., $(h_n + p_n)$ é solução de (NH).
- Resolver o PVI

$$\boxed{L[s_n] = \psi(n), \;\; s_0 = \beta_0, \ldots, s_{k-1} = \beta_{k-1}}$$

é obter $s_n = h_n + p_n$ satisfazendo as condições iniciais, i.e., é obter:
  - solução (p_n) de (NH),

$L[-]$ é Operador Linear

- Sendo (h_n) solução geral de (H) e (p_n) solução particular de (NH):
  - $h_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_n^{(i)}$, $L[h_n] = 0$ e $L[p_n] = \psi(n)$;
  - $L[h_n + p_n] = \psi(n)$, i.e., $(h_n + p_n)$ é solução de (NH).
- Resolver o PVI

$$\boxed{L[s_n] = \psi(n), \;\; s_0 = \beta_0, \ldots, s_{k-1} = \beta_{k-1}}$$

é obter $s_n = h_n + p_n$ satisfazendo as condições iniciais, i.e., é obter:
  - solução (p_n) de (NH),
  - solução geral (h_n) de (H) e

$L[-]$ é Operador Linear

- Sendo (h_n) solução geral de (H) e (p_n) solução particular de (NH):
  - $h_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_n^{(i)}$, $L[h_n] = 0$ e $L[p_n] = \psi(n)$;
  - $L[h_n + p_n] = \psi(n)$, i.e., $(h_n + p_n)$ é solução de (NH).
- Resolver o PVI

$$\boxed{L[s_n] = \psi(n), \;\; s_0 = \beta_0, \dots, s_{k-1} = \beta_{k-1}}$$

é obter $s_n = h_n + p_n$ satisfazendo as condições iniciais, i.e., é obter:

  - solução (p_n) de (NH),
  - solução geral (h_n) de (H) e
  - solução do sistema de k equações lineares nas variáveis α_1, ..., α_k dadas pelas condições

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_0^{(i)} = \beta_0 - p_0, \dots, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{k-1}^{(i)} = \beta_{k-1} - p_{k-1}.$$

Teorema para $L[s_n] = \lambda^n p(n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $p(x) \in \mathbb{C}[x]$

- Sejam:

Teorema para $L[s_n] = \lambda^n p(n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $p(x) \in \mathbb{C}[x]$

- Sejam:
  - $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ os autovalores distintos de C de multiplicidades $m_1, \ldots, m_t$, respectivamente;

Teorema para $L[s_n] = \lambda^n p(n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $p(x) \in \mathbb{C}[x]$

- Sejam:
  - $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ os autovalores distintos de C de multiplicidades $m_1, \ldots, m_t$, respectivamente;
  - $\delta = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_t\}, \\ m_i, & \text{se } \lambda = \lambda_i. \end{cases}$

Teorema para $L[s_n] = \lambda^n p(n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $p(x) \in \mathbb{C}[x]$

- Sejam:
  - $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ os autovalores distintos de C de multiplicidades $m_1, \ldots, m_t$, respectivamente;
  - $\delta = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_t\}, \\ m_i, & \text{se } \lambda = \lambda_i. \end{cases}$
- Daí existe $q(x) \in \mathbb{C}[x]$, de grau não maior que o grau de $p(x)$, tal que

$$\boxed{(p_n) = (\lambda^n n^\delta q(n))}$$

é solução particular de (NH).

Exemplo: $s_n = -3s_{n-1} - 2s_{n-2} + (-1)^n, \;\; s_0 = 2, \; s_1 = -3$

- $c(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = -1, \; m_1 = 1, \; \lambda_2 = -2, \; m_2 = 1.$

Exemplo: $s_n = -3s_{n-1} - 2s_{n-2} + (-1)^n, \;\; s_0 = 2, \; s_1 = -3$

- $c(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = -1, \; m_1 = 1, \; \lambda_2 = -2, \; m_2 = 1.$
- Daí:

Exemplo: $s_n = -3s_{n-1} - 2s_{n-2} + (-1)^n$, $s_0 = 2$, $s_1 = -3$

- $c(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = -1$, $m_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $m_2 = 1$.
- Daí:
  - $\boxed{h_n = a_1(-1)^n + a_2(-2)^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;

Exemplo: $s_n = -3s_{n-1} - 2s_{n-2} + (-1)^n, \;\; s_0 = 2, \; s_1 = -3$

- $c(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = -1, \; m_1 = 1, \; \lambda_2 = -2, \; m_2 = 1.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = a_1(-1)^n + a_2(-2)^n}, \; a_1, a_2 \in \mathbb{C};$
  - $\delta = 1$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$ (pois $p(x) = 1$) $\Rightarrow \boxed{p_n = (-1)^n na}.$

Exemplo: $s_n = -3s_{n-1} - 2s_{n-2} + (-1)^n, \;\; s_0 = 2, \; s_1 = -3$

- $c(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = -1, \; m_1 = 1, \; \lambda_2 = -2, \; m_2 = 1.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = a_1(-1)^n + a_2(-2)^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;
  - $\delta = 1$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$ (pois $p(x) = 1$) $\Rightarrow$ $\boxed{p_n = (-1)^n na}$.
- Como $p_n = -3p_{n-1} - 2p_{n-2} + (-1)^n$,

$$(-1)^n na = -3(-1)^{n-1}(n-1)a - 2(-1)^{n-2}(n-2)a + (-1)^n.$$

Exemplo: $s_n = -3s_{n-1} - 2s_{n-2} + (-1)^n,\ \ s_0 = 2,\ s_1 = -3$

- $c(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = -1,\ m_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ m_2 = 1.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = a_1(-1)^n + a_2(-2)^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;
  - $\delta = 1$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$ (pois $p(x) = 1$) $\Rightarrow$ $\boxed{p_n = (-1)^n na}$.
- Como $p_n = -3p_{n-1} - 2p_{n-2} + (-1)^n$,

$$(-1)^n na = -3(-1)^{n-1}(n-1)a - 2(-1)^{n-2}(n-2)a + (-1)^n.$$

- Dividindo por $(-1)^{n-2}$,

$$an = 3a(n-1) - 2a(n-2) + 1 = an + a + 1.$$

Exemplo: $s_n = -3s_{n-1} - 2s_{n-2} + (-1)^n,\ \ s_0 = 2,\ s_1 = -3$

- $c(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = -1,\ m_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ m_2 = 1.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = a_1(-1)^n + a_2(-2)^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;
  - $\delta = 1$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$ (pois $p(x) = 1$) $\Rightarrow$ $\boxed{p_n = (-1)^n na}$.
- Como $p_n = -3p_{n-1} - 2p_{n-2} + (-1)^n$,
  $$(-1)^n na = -3(-1)^{n-1}(n-1)a - 2(-1)^{n-2}(n-2)a + (-1)^n.$$
- Dividindo por $(-1)^{n-2}$,
  $$an = 3a(n-1) - 2a(n-2) + 1 = an + a + 1.$$
- $\therefore\ a = a(!)$ e $0 = a + 1$, i.e., $a = -1$.

Exemplo: $s_n = -3s_{n-1} - 2s_{n-2} + (-1)^n$, $s_0 = 2$, $s_1 = -3$

- $c(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = -1$, $m_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $m_2 = 1$.
- Daí:
  - $\boxed{h_n = a_1(-1)^n + a_2(-2)^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;
  - $\delta = 1$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$ (pois $p(x) = 1$) $\Rightarrow$ $\boxed{p_n = (-1)^n na}$.
- Como $p_n = -3p_{n-1} - 2p_{n-2} + (-1)^n$,
  $$(-1)^n na = -3(-1)^{n-1}(n-1)a - 2(-1)^{n-2}(n-2)a + (-1)^n.$$
- Dividindo por $(-1)^{n-2}$,
  $$an = 3a(n-1) - 2a(n-2) + 1 = an + a + 1.$$
- $\therefore a = a(!)$ e $0 = a + 1$, i.e., $a = -1$.
- Como $s_n = h_n + p_n = a_1(-1)^n + a_2(-2)^n + (-1)^{n+1}n$, temos:

Exemplo: $s_n = -3s_{n-1} - 2s_{n-2} + (-1)^n, \;\; s_0 = 2, \, s_1 = -3$

- $c(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = -1, \, m_1 = 1, \, \lambda_2 = -2, \, m_2 = 1.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = a_1(-1)^n + a_2(-2)^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;
  - $\delta = 1$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$ (pois $p(x) = 1$) $\Rightarrow \boxed{p_n = (-1)^n na}$.
- Como $p_n = -3p_{n-1} - 2p_{n-2} + (-1)^n$,
  $$(-1)^n na = -3(-1)^{n-1}(n-1)a - 2(-1)^{n-2}(n-2)a + (-1)^n.$$
- Dividindo por $(-1)^{n-2}$,
  $$an = 3a(n-1) - 2a(n-2) + 1 = an + a + 1.$$
- $\therefore \; a = a(!)$ e $0 = a + 1$, i.e., $a = -1$.
- Como $s_n = h_n + p_n = a_1(-1)^n + a_2(-2)^n + (-1)^{n+1}n$, temos:
  - $2 = s_0 = a_1 + a_2$ e $-3 = s_1 = -a_1 - 2a_2 + 1$, i.e., $a_1 = 0$ e $a_2 = 2$;

Exemplo: $s_n = -3s_{n-1} - 2s_{n-2} + (-1)^n, \;\; s_0 = 2, \; s_1 = -3$

- $c(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = -1, \; m_1 = 1, \; \lambda_2 = -2, \; m_2 = 1.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = a_1(-1)^n + a_2(-2)^n}, \; a_1, a_2 \in \mathbb{C};$
  - $\delta = 1$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$ (pois $p(x) = 1$) $\Rightarrow \boxed{p_n = (-1)^n na}.$
- Como $p_n = -3p_{n-1} - 2p_{n-2} + (-1)^n$,
  $$(-1)^n na = -3(-1)^{n-1}(n-1)a - 2(-1)^{n-2}(n-2)a + (-1)^n.$$
- Dividindo por $(-1)^{n-2}$,
  $$an = 3a(n-1) - 2a(n-2) + 1 = an + a + 1.$$
- $\therefore a = a(!)$ e $0 = a + 1$, i.e., $a = -1$.
- Como $s_n = h_n + p_n = a_1(-1)^n + a_2(-2)^n + (-1)^{n+1}n$, temos:
  - $2 = s_0 = a_1 + a_2$ e $-3 = s_1 = -a_1 - 2a_2 + 1$, i.e., $a_1 = 0$ e $a_2 = 2$;
  - $\boxed{s_n = -(-2)^{n+1} + (-1)^{n+1}n}.$

Exemplo: $s_n = -3s_{n-1} - 2s_{n-2} + (-1)^n$, $s_0 = 2$, $s_1 = -3$

- $c(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = -1$, $m_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $m_2 = 1$.
- Daí:
  - $\boxed{h_n = a_1(-1)^n + a_2(-2)^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;
  - $\delta = 1$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$ (pois $p(x) = 1$) $\Rightarrow$ $\boxed{p_n = (-1)^n na}$.
- Como $p_n = -3p_{n-1} - 2p_{n-2} + (-1)^n$,
  $$(-1)^n na = -3(-1)^{n-1}(n-1)a - 2(-1)^{n-2}(n-2)a + (-1)^n.$$
- Dividindo por $(-1)^{n-2}$,
  $$an = 3a(n-1) - 2a(n-2) + 1 = an + a + 1.$$
- $\therefore a = a(!)$ e $0 = a + 1$, i.e., $a = -1$.
- Como $s_n = h_n + p_n = a_1(-1)^n + a_2(-2)^n + (-1)^{n+1}n$, temos:
  - $2 = s_0 = a_1 + a_2$ e $-3 = s_1 = -a_1 - 2a_2 + 1$, i.e., $a_1 = 0$ e $a_2 = 2$;
  - $\boxed{s_n = -(-2)^{n+1} + (-1)^{n+1}n}$.
- Teste: $s_2 = 8 - 2 = 6 = 9 - 4 + 1 = -3s_1 - 2s_0 + (-1)^2!$

Exemplo: $s_n = 5s_{n-1} - 6s_{n-2} + 2^n n, \;\; s_0 = 5, \; s_1 = 4$

- $c(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = 2, \; m_1 = 1, \; \lambda_2 = 3, \; m_2 = 1.$

Exemplo: $s_n = 5s_{n-1} - 6s_{n-2} + 2^n n, \ \ s_0 = 5, \ s_1 = 4$

- $c(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = 2, \ m_1 = 1, \ \lambda_2 = 3, \ m_2 = 1.$
- Daí:

Exemplo: $s_n = 5s_{n-1} - 6s_{n-2} + 2^n n, \;\; s_0 = 5, \; s_1 = 4$

- $c(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = 2, \; m_1 = 1, \; \lambda_2 = 3, \; m_2 = 1.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = a_1 2^n + a_2 3^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;

Exemplo: $s_n = 5s_{n-1} - 6s_{n-2} + 2^n n, \;\; s_0 = 5, \; s_1 = 4$

- $c(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = 2, \; m_1 = 1, \; \lambda_2 = 3, \; m_2 = 1.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = a_1 2^n + a_2 3^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;
  - $\delta = 1$ e $q(x) = ax + b \in \mathbb{C}[x]$ (pois $p(x) = x$) $\Rightarrow$ $\boxed{p_n = 2^n n(an+b)}$.

Exemplo: $s_n = 5s_{n-1} - 6s_{n-2} + 2^n n, \;\; s_0 = 5, \; s_1 = 4$

- $c(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = 2, \; m_1 = 1, \; \lambda_2 = 3, \; m_2 = 1.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = a_1 2^n + a_2 3^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;
  - $\delta = 1$ e $q(x) = ax + b \in \mathbb{C}[x]$ (pois $p(x) = x$) $\Rightarrow$ $\boxed{p_n = 2^n n(an+b)}$.
- Como $p_n = 5p_{n-1} - 6p_{n-2} + 2^n n$,

$$2^n(an^2 + bn) =$$
$$5 \cdot 2^{n-1}(n-1)(an - a + b) - 3 \cdot 2^{n-1}(n-2)(an - 2a + b) + 2^n n.$$

Exemplo: $s_n = 5s_{n-1} - 6s_{n-2} + 2^n n, \ \ s_0 = 5, \ s_1 = 4$

- $c(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \Rightarrow$
  $\lambda = \lambda_1 = 2, \ m_1 = 1, \ \lambda_2 = 3, \ m_2 = 1.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = a_1 2^n + a_2 3^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;
  - $\delta = 1$ e $q(x) = ax + b \in \mathbb{C}[x]$ (pois $p(x) = x$) $\Rightarrow$ $\boxed{p_n = 2^n n(an+b)}$.
- Como $p_n = 5p_{n-1} - 6p_{n-2} + 2^n n$,

$$2^n(an^2 + bn) =$$
$$5 \cdot 2^{n-1}(n-1)(an-a+b) - 3 \cdot 2^{n-1}(n-2)(an-2a+b) + 2^n n.$$

- Dividindo por 2^{n-1},

$$2an^2 + 2bn =$$

$$5(an^2 - (2a-b)n + a - b) - 3(an^2 - (4a-b)n + 4a - 2b) + 2n =$$

$$2an^2 + (2a + 2b + 2)n - 7a + b.$$

Continuação do Exemplo

- $\therefore 2a = 2a(!)$, $2b = 2a + 2b + 2$ e $0 = -7a + b$, i.e., $a = -1$ e $b = -7$.

Continuação do Exemplo

- $\therefore 2a = 2a(!)$, $2b = 2a + 2b + 2$ e $0 = -7a + b$, i.e., $a = -1$ e $b = -7$.
- Como $s_n = h_n + p_n = a_1 2^n + a_2 3^n - 2^n(n^2 + 7n)$, temos:

Continuação do Exemplo

- $\therefore 2a = 2a(!)$, $2b = 2a + 2b + 2$ e $0 = -7a + b$, i.e., $a = -1$ e $b = -7$.
- Como $s_n = h_n + p_n = a_1 2^n + a_2 3^n - 2^n(n^2 + 7n)$, temos:
  - $5 = s_0 = a_1 + a_2$ e $4 = s_1 = 2a_1 + 3a_2 - 16$, i.e., $a_1 = -5$ and $a_2 = 10$;

Continuação do Exemplo

- $\therefore 2a = 2a(!)$, $2b = 2a + 2b + 2$ e $0 = -7a + b$, i.e., $a = -1$ e $b = -7$.
- Como $s_n = h_n + p_n = a_1 2^n + a_2 3^n - 2^n(n^2 + 7n)$, temos:
  - $5 = s_0 = a_1 + a_2$ e $4 = s_1 = 2a_1 + 3a_2 - 16$, i.e., $a_1 = -5$ and $a_2 = 10$;
  - $\boxed{s_n = -5 \cdot 2^n + 10 \cdot 3^n - 2^n(n^2 + 7n)}$.

Continuação do Exemplo

- $\therefore 2a = 2a(!)$, $2b = 2a+2b+2$ e $0 = -7a+b$, i.e., $a = -1$ e $b = -7$.
- Como $s_n = h_n + p_n = a_1 2^n + a_2 3^n - 2^n(n^2 + 7n)$, temos:
  - $5 = s_0 = a_1 + a_2$ e $4 = s_1 = 2a_1 + 3a_2 - 16$, i.e., $a_1 = -5$ and $a_2 = 10$;
  - $\boxed{s_n = -5 \cdot 2^n + 10 \cdot 3^n - 2^n(n^2 + 7n)}$.
- Teste: $s_2 = -20 + 90 - 72 = -2 = 20 - 30 + 8 = 5s_1 - 6s_0 + 2^2 2!$

Exemplo: $s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2} + 3^n, \;\; s_0 = 0, \; s_1 = 1$

- $c(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow$
  $\lambda_1 = 2, \; m_1 = 2.$

Exemplo: $s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2} + 3^n, \ \ s_0 = 0, \ s_1 = 1$

- $c(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow$
  $\lambda_1 = 2, \ m_1 = 2.$
- Daí:

Exemplo: $s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2} + 3^n, \;\; s_0 = 0, \; s_1 = 1$

- $c(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow$ $\lambda_1 = 2, \; m_1 = 2.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = (a_1 n + a_2)2^n}, \; a_1, a_2 \in \mathbb{C};$

Exemplo: $s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2} + 3^n, \;\; s_0 = 0, \; s_1 = 1$

- $c(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow$
  $\lambda_1 = 2, \; m_1 = 2.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = (a_1 n + a_2)2^n}, \; a_1, a_2 \in \mathbb{C};$
  - $\delta = 0$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$ (pois $p(x) = 1$) $\Rightarrow \boxed{p_n = 3^n a}.$

Exemplo: $s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2} + 3^n,\ \ s_0 = 0,\ s_1 = 1$

- $c(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow$
  $\lambda_1 = 2,\ m_1 = 2.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = (a_1 n + a_2)2^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;
  - $\delta = 0$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$ (pois $p(x) = 1$) $\Rightarrow$ $\boxed{p_n = 3^n a}$.
- Como $p_n = 4p_{n-1} - 4p_{n-2} + 3^n$,
  $$3^n a = 4 \cdot 3^{n-1} a - 4 \cdot 3^{n-2} a + 3^n.$$

Exemplo: $s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2} + 3^n, \; s_0 = 0, \; s_1 = 1$

- $c(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow$
  $\lambda_1 = 2, \; m_1 = 2.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = (a_1 n + a_2)2^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;
  - $\delta = 0$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$ (pois $p(x) = 1$) $\Rightarrow$ $\boxed{p_n = 3^n a}$.
- Como $p_n = 4p_{n-1} - 4p_{n-2} + 3^n$,
$$3^n a = 4 \cdot 3^{n-1} a - 4 \cdot 3^{n-2} a + 3^n.$$
- Dividindo por 3^{n-2},
$$9a = 12a - 4a + 9.$$

Exemplo: $s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2} + 3^n, \;\; s_0 = 0, \; s_1 = 1$

- $c(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow$
  $\lambda_1 = 2, \; m_1 = 2.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = (a_1 n + a_2)2^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;
  - $\delta = 0$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$ (pois $p(x) = 1$) $\Rightarrow$ $\boxed{p_n = 3^n a}$.
- Como $p_n = 4p_{n-1} - 4p_{n-2} + 3^n$,

$$3^n a = 4 \cdot 3^{n-1} a - 4 \cdot 3^{n-2} a + 3^n.$$

- Dividindo por 3^{n-2},

$$9a = 12a - 4a + 9.$$

- $\therefore a = 9.$

Exemplo: $s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2} + 3^n, \ \ s_0 = 0, \ s_1 = 1$

- $c(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow$
  $\lambda_1 = 2, \ m_1 = 2.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = (a_1 n + a_2)2^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;
  - $\delta = 0$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$ (pois $p(x) = 1$) $\Rightarrow$ $\boxed{p_n = 3^n a}$.
- Como $p_n = 4p_{n-1} - 4p_{n-2} + 3^n$,
  $$3^n a = 4 \cdot 3^{n-1} a - 4 \cdot 3^{n-2} a + 3^n.$$
- Dividindo por 3^{n-2},
  $$9a = 12a - 4a + 9.$$
- $\therefore a = 9.$
- Como $s_n = h_n + p_n = (a_1 n + a_2)2^n + 3^{n+2}$, temos:

Exemplo: $s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2} + 3^n, \ \ s_0 = 0, \ s_1 = 1$

- $c(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow$
  $\lambda_1 = 2, \ m_1 = 2.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = (a_1 n + a_2)2^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;
  - $\delta = 0$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$ (pois $p(x) = 1$) $\Rightarrow$ $\boxed{p_n = 3^n a}$.
- Como $p_n = 4p_{n-1} - 4p_{n-2} + 3^n$,
$$3^n a = 4 \cdot 3^{n-1} a - 4 \cdot 3^{n-2} a + 3^n.$$
- Dividindo por 3^{n-2},
$$9a = 12a - 4a + 9.$$
- $\therefore a = 9$.
- Como $s_n = h_n + p_n = (a_1 n + a_2)2^n + 3^{n+2}$, temos:
  - $0 = s_0 = a_2 + 9$ e $1 = s_1 = 2a_1 + 2a_2 + 27$, i.e., $a_1 = -4$ e $a_2 = -9$;

Exemplo: $s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2} + 3^n, \;\; s_0 = 0, \; s_1 = 1$

- $c(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow$
  $\lambda_1 = 2, \; m_1 = 2.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = (a_1 n + a_2)2^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;
  - $\delta = 0$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$ (pois $p(x) = 1$) $\Rightarrow$ $\boxed{p_n = 3^n a}$.
- Como $p_n = 4p_{n-1} - 4p_{n-2} + 3^n$,

$$3^n a = 4 \cdot 3^{n-1} a - 4 \cdot 3^{n-2} a + 3^n.$$

- Dividindo por 3^{n-2},

$$9a = 12a - 4a + 9.$$

- $\therefore a = 9.$
- Como $s_n = h_n + p_n = (a_1 n + a_2)2^n + 3^{n+2}$, temos:
  - $0 = s_0 = a_2 + 9$ e $1 = s_1 = 2a_1 + 2a_2 + 27$, i.e., $a_1 = -4$ e $a_2 = -9$;
  - $\boxed{s_n = (-4n - 9)2^n + 3^{n+2}}$.

Exemplo: $s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2} + 3^n, \ \ s_0 = 0, \ s_1 = 1$

- $c(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow$
  $\lambda_1 = 2, \ m_1 = 2.$
- Daí:
  - $\boxed{h_n = (a_1 n + a_2)2^n}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;
  - $\delta = 0$ e $q(x) = a \in \mathbb{C}$ (pois $p(x) = 1$) $\Rightarrow$ $\boxed{p_n = 3^n a}$.
- Como $p_n = 4p_{n-1} - 4p_{n-2} + 3^n$,
  $$3^n a = 4 \cdot 3^{n-1} a - 4 \cdot 3^{n-2} a + 3^n.$$
- Dividindo por 3^{n-2},
  $$9a = 12a - 4a + 9.$$
- $\therefore a = 9.$
- Como $s_n = h_n + p_n = (a_1 n + a_2)2^n + 3^{n+2}$, temos:
  - $0 = s_0 = a_2 + 9$ e $1 = s_1 = 2a_1 + 2a_2 + 27$, i.e., $a_1 = -4$ e $a_2 = -9$;
  - $\boxed{s_n = (-4n - 9)2^n + 3^{n+2}}$.
- Teste: $s_2 = -68 + 81 = 13 = 4 - 0 + 9 = 4s_1 - 4s_0 + 3^2$!