Recorrências ou Equações a Diferenças Finitas (EDF)

Uma Introdução - Parte Três

José Renato Ramos Barbosa

www.ufpr.br/~jrrb

30/01/2012-17/02/2012

Regra de Sinais de Descartes-Gauss

- O número de raízes positivas (contadas com multiplicidades) de um polinômio é limitado pelo número de mudança de sinais em seus coeficientes.

Regra de Sinais de Descartes-Gauss

- O número de raízes positivas (contadas com multiplicidades) de um polinômio é limitado pelo número de mudança de sinais em seus coeficientes.
- Exemplo: ou $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ não tem raiz positiva ou tem apenas uma raiz positiva.

Regra de Sinais de Descartes-Gauss

- O número de raízes positivas (contadas com multiplicidades) de um polinômio é limitado pelo número de mudança de sinais em seus coeficientes.
- Exemplo: ou $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ não tem raiz positiva ou tem apenas uma raiz positiva.
- De fato, $p(x) = (x-1)(x+1)^2$ tem apenas uma raiz positiva.

Demonstração da Regra de Sinais de Descartes-Gauss por Indução sobre o Grau do Polinômio $p(x)$

- Para um polinômio de grau 1 a verificação é trivial.

Demonstração da Regra de Sinais de Descartes-Gauss por Indução sobre o Grau do Polinômio $p(x)$

- Para um polinômio de grau 1 a verificação é trivial.
- Seja $p(x)$ um polinômio de grau maior que 1.

Demonstração da Regra de Sinais de Descartes-Gauss por Indução sobre o Grau do Polinômio $p(x)$

- Para um polinômio de grau 1 a verificação é trivial.
- Seja $p(x)$ um polinômio de grau maior que 1.
- Assuma, sem perda de generalidade, que o sinal do coeficiente líder é positivo.

Demonstração da Regra de Sinais de Descartes-Gauss por Indução sobre o Grau do Polinômio $p(x)$

- Para um polinômio de grau 1 a verificação é trivial.
- Seja $p(x)$ um polinômio de grau maior que 1.
- Assuma, sem perda de generalidade, que o sinal do coeficiente líder é positivo.
- O último coeficiente é $p(0)$.

Demonstração da Regra de Sinais de Descartes-Gauss por Indução sobre o Grau do Polinômio $p(x)$

- Para um polinômio de grau 1 a verificação é trivial.
- Seja $p(x)$ um polinômio de grau maior que 1.
- Assuma, sem perda de generalidade, que o sinal do coeficiente líder é positivo.
- O último coeficiente é $p(0)$.
- O número de raízes positivas (contadas com multiplicidades) deve ser par (r., ímpar) se $p(0) > 0$ (r., $p(0) < 0$), pois como $p(x)$ é positivo para x suf. grande, o gráfico de $p(x)$ deve cruzar o eixo x um número par (r., ímpar) de vezes.

Demonstração da Regra de Sinais de Descartes-Gauss por Indução sobre o Grau do Polinômio $p(x)$

- Para um polinômio de grau 1 a verificação é trivial.
- Seja $p(x)$ um polinômio de grau maior que 1.
- Assuma, sem perda de generalidade, que o sinal do coeficiente líder é positivo.
- O último coeficiente é $p(0)$.
- O número de raízes positivas (contadas com multiplicidades) deve ser par (r., ímpar) se $p(0) > 0$ (r., $p(0) < 0$), pois como $p(x)$ é positivo para x suf. grande, o gráfico de $p(x)$ deve cruzar o eixo x um número par (r., ímpar) de vezes.
- Daí o número de mudança de sinais e o número de raízes positivas devem ter a mesma paridade.

Demonstração da Regra de Sinais de Descartes-Gauss por Indução sobre o Grau do Polinômio $p(x)$

- Para um polinômio de grau 1 a verificação é trivial.
- Seja $p(x)$ um polinômio de grau maior que 1.
- Assuma, sem perda de generalidade, que o sinal do coeficiente líder é positivo.
- O último coeficiente é $p(0)$.
- O número de raízes positivas (contadas com multiplicidades) deve ser par (r., ímpar) se $p(0) > 0$ (r., $p(0) < 0$), pois como $p(x)$ é positivo para x suf. grande, o gráfico de $p(x)$ deve cruzar o eixo x um número par (r., ímpar) de vezes.
- Daí o número de mudança de sinais e o número de raízes positivas devem ter a mesma paridade.
- Suponha que $p(x)$ tem mais raízes positivas que mudança de sinais.

Demonstração da Regra de Sinais de Descartes-Gauss por Indução sobre o Grau do Polinômio $p(x)$

- Para um polinômio de grau 1 a verificação é trivial.
- Seja $p(x)$ um polinômio de grau maior que 1.
- Assuma, sem perda de generalidade, que o sinal do coeficiente líder é positivo.
- O último coeficiente é $p(0)$.
- O número de raízes positivas (contadas com multiplicidades) deve ser par (r., ímpar) se $p(0) > 0$ (r., $p(0) < 0$), pois como $p(x)$ é positivo para x suf. grande, o gráfico de $p(x)$ deve cruzar o eixo x um número par (r., ímpar) de vezes.
- Daí o número de mudança de sinais e o número de raízes positivas devem ter a mesma paridade.
- Suponha que $p(x)$ tem mais raízes positivas que mudança de sinais.
- Daí $p(x)$ tem pelo menos duas raízes positivas a mais que mudança de sinais.

Demonstração da Regra de Sinais de Descartes-Gauss por Indução sobre o Grau do Polinômio $p(x)$

- Para um polinômio de grau 1 a verificação é trivial.
- Seja $p(x)$ um polinômio de grau maior que 1.
- Assuma, sem perda de generalidade, que o sinal do coeficiente líder é positivo.
- O último coeficiente é $p(0)$.
- O número de raízes positivas (contadas com multiplicidades) deve ser par (r., ímpar) se $p(0) > 0$ (r., $p(0) < 0$), pois como $p(x)$ é positivo para x suf. grande, o gráfico de $p(x)$ deve cruzar o eixo x um número par (r., ímpar) de vezes.
- Daí o número de mudança de sinais e o número de raízes positivas devem ter a mesma paridade.
- Suponha que $p(x)$ tem mais raízes positivas que mudança de sinais.
- Daí $p(x)$ tem pelo menos duas raízes positivas a mais que mudança de sinais.
- Daí, como $p'(x)$ tem pelo menos uma raiz entre cada duas raízes de $p(x)$, $p'(x)$ tem pelo menos uma raiz positiva a mais que mudança de sinais de $p(x)$.

Demonstração da Regra de Sinais de Descartes-Gauss por Indução sobre o Grau do Polinômio $p(x)$

- Para um polinômio de grau 1 a verificação é trivial.
- Seja $p(x)$ um polinômio de grau maior que 1.
- Assuma, sem perda de generalidade, que o sinal do coeficiente líder é positivo.
- O último coeficiente é $p(0)$.
- O número de raízes positivas (contadas com multiplicidades) deve ser par (r., ímpar) se $p(0) > 0$ (r., $p(0) < 0$), pois como $p(x)$ é positivo para x suf. grande, o gráfico de $p(x)$ deve cruzar o eixo x um número par (r., ímpar) de vezes.
- Daí o número de mudança de sinais e o número de raízes positivas devem ter a mesma paridade.
- Suponha que $p(x)$ tem mais raízes positivas que mudança de sinais.
- Daí $p(x)$ tem pelo menos duas raízes positivas a mais que mudança de sinais.
- Daí, como $p'(x)$ tem pelo menos uma raiz entre cada duas raízes de $p(x)$, $p'(x)$ tem pelo menos uma raiz positiva a mais que mudança de sinais de $p(x)$.
- Por indução o número de raízes positivas de $p'(x)$ é limitado pelo número de suas mudanças de sinais.

Demonstração da Regra de Sinais de Descartes-Gauss por Indução sobre o Grau do Polinômio $p(x)$

- Para um polinômio de grau 1 a verificação é trivial.
- Seja $p(x)$ um polinômio de grau maior que 1.
- Assuma, sem perda de generalidade, que o sinal do coeficiente líder é positivo.
- O último coeficiente é $p(0)$.
- O número de raízes positivas (contadas com multiplicidades) deve ser par (r., ímpar) se $p(0) > 0$ (r., $p(0) < 0$), pois como $p(x)$ é positivo para x suf. grande, o gráfico de $p(x)$ deve cruzar o eixo x um número par (r., ímpar) de vezes.
- Daí o número de mudança de sinais e o número de raízes positivas devem ter a mesma paridade.
- Suponha que $p(x)$ tem mais raízes positivas que mudança de sinais.
- Daí $p(x)$ tem pelo menos duas raízes positivas a mais que mudança de sinais.
- Daí, como $p'(x)$ tem pelo menos uma raiz entre cada duas raízes de $p(x)$, $p'(x)$ tem pelo menos uma raiz positiva a mais que mudança de sinais de $p(x)$.
- Por indução o número de raízes positivas de $p'(x)$ é limitado pelo número de suas mudanças de sinais.
- Daí $p'(x)$ tem mais mudanças de sinais que $p(x)$! ABSURDO!

Corolário da Regra de Sinais de Descartes-Gauss

- Se $c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1}x - c_k$ é não negativo, isto é, os c_i's não são negativos e $c_k > 0$, então $c(x)$ tem apenas uma raiz positiva (e esta é simples).

Corolário da Regra de Sinais de Descartes-Gauss

- Se $c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1}x - c_k$ é não negativo, isto é, os c_i's não são negativos e $c_k > 0$, então $c(x)$ tem apenas uma raiz positiva (e esta é simples).
- Demonstração:

Corolário da Regra de Sinais de Descartes-Gauss

- Se $c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1}x - c_k$ é não negativo, isto é, os c_i's não são negativos e $c_k > 0$, então $c(x)$ tem apenas uma raiz positiva (e esta é simples).
- Demonstração:
  - $c(x)$ tem apenas uma mudança de sinais.

Corolário da Regra de Sinais de Descartes-Gauss

- Se $c(x) = x^k - c_1x^{k-1} - \cdots - c_{k-1}x - c_k$ é não negativo, isto é, os c_i's não são negativos e $c_k > 0$, então $c(x)$ tem apenas uma raiz positiva (e esta é simples).
- Demonstração:
  - $c(x)$ tem apenas uma mudança de sinais.
  - Como $c(0) = -c_k < 0$ e $\lim_{x\to+\infty} c(x) = +\infty$, o Teorema do Valor Intermediário garante que $c(x)$ tem pelo menos uma raiz.

A Raiz Positiva de Um Polinômio Não Negativo (PNN) é Dominante Simples

- Lema do PNN:

A Raiz Positiva de Um Polinômio Não Negativo (PNN) é Dominante Simples

- Lema do PNN:
  - Sendo λ_0 a raiz positiva do polinômio não negativo
  $$c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1}x - c_k,$$
  $c(x)$ muda de negativo para positivo em $x = \lambda_0$;

A Raiz Positiva de Um Polinômio Não Negativo (PNN) é Dominante Simples

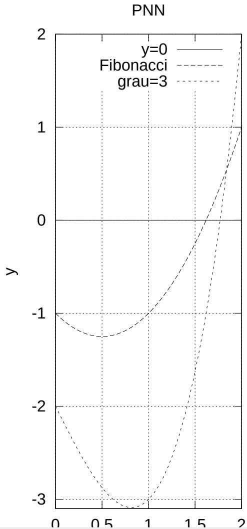
- Lema do PNN:
  - Sendo λ_0 a raiz positiva do polinômio não negativo
  $$c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1}x - c_k,$$
  $c(x)$ muda de negativo para positivo em $x = \lambda_0$;
  - $c'(x) > 0$ para todo $x > \lambda_0$;

A Raiz Positiva de Um Polinômio Não Negativo (PNN) é Dominante Simples

- Lema do PNN:
  - Sendo λ_0 a raiz positiva do polinômio não negativo
  $$c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1} x - c_k,$$
  $c(x)$ muda de negativo para positivo em $x = \lambda_0$;
  - $c'(x) > 0$ para todo $x > \lambda_0$;
  - Para $x > 0$, $\boxed{c(x) > 0 \Leftrightarrow x > \lambda_0}$.

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

Gráficos de $f(x) = x^2 - x - 1$ e $c(x) = x^3 - 2x - 2$:



A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Demonstração do Lema do PNN:

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Demonstração do Lema do PNN:
    - Parte 1:

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Demonstração do Lema do PNN:
  - Parte 1:
    - O gráfico de $c(x)$ intercepta o semi-eixo positivo dos x apenas em $x = \lambda_0$;

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Demonstração do Lema do PNN:
  - Parte 1:
    - O gráfico de $c(x)$ intercepta o semi-eixo positivo dos x apenas em $x = \lambda_0$;
    - Daí, como $c(x)$ é contínua, os valores de $c(x)$ mudam de negativo para positivo em $x = \lambda_0$ (pois $c(0) = -c_k < 0$ e $\lim_{x \to +\infty} c(x) = +\infty$).

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Demonstração do Lema do PNN:
  - Parte 1:
    - O gráfico de $c(x)$ intercepta o semi-eixo positivo dos x apenas em $x = \lambda_0$;
    - Daí, como $c(x)$ é contínua, os valores de $c(x)$ mudam de negativo para positivo em $x = \lambda_0$ (pois $c(0) = -c_k < 0$ e $\lim_{x\to+\infty} c(x) = +\infty$).
  - Parte 2:

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Demonstração do Lema do PNN:
  - Parte 1:
    - O gráfico de $c(x)$ intercepta o semi-eixo positivo dos x apenas em $x = \lambda_0$;
    - Daí, como $c(x)$ é contínua, os valores de $c(x)$ mudam de negativo para positivo em $x = \lambda_0$ (pois $c(0) = -c_k < 0$ e $\lim_{x \to +\infty} c(x) = +\infty$).
  - Parte 2:
    - $c'(x) = kq(x)$, sendo
$$q(x) = x^{k-1} - \frac{(k-1)c_1}{k} x^{k-2} - \cdots - \frac{2c_{k-2}}{k} x - \frac{c_{k-1}}{k}$$
um polinômio não negativo.

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Demonstração do Lema do PNN:
  - Parte 1:
    - O gráfico de $c(x)$ intercepta o semi-eixo positivo dos x apenas em $x = \lambda_0$;
    - Daí, como $c(x)$ é contínua, os valores de $c(x)$ mudam de negativo para positivo em $x = \lambda_0$ (pois $c(0) = -c_k < 0$ e $\lim_{x\to+\infty} c(x) = +\infty$).
  - Parte 2:
    - $c'(x) = kq(x)$, sendo
    $$q(x) = x^{k-1} - \frac{(k-1)c_1}{k}x^{k-2} - \cdots - \frac{2c_{k-2}}{k}x - \frac{c_{k-1}}{k}$$
    um polinômio não negativo.
    - Daí $c'(0) = -c_{k-1} < 0$, $c'(x)$ tem apenas uma raiz positiva, digamos $c'(x_0) = 0$, e os valores de $c'(x)$ mudam de negativo para positivo em $x = x_0$ pela parte 1.

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Demonstração do Lema do PNN:
  - Parte 1:
    - O gráfico de $c(x)$ intercepta o semi-eixo positivo dos x apenas em $x = \lambda_0$;
    - Daí, como $c(x)$ é contínua, os valores de $c(x)$ mudam de negativo para positivo em $x = \lambda_0$ (pois $c(0) = -c_k < 0$ e $\lim_{x \to +\infty} c(x) = +\infty$).
  - Parte 2:
    - $c'(x) = kq(x)$, sendo
    $$q(x) = x^{k-1} - \frac{(k-1)c_1}{k} x^{k-2} - \cdots - \frac{2c_{k-2}}{k} x - \frac{c_{k-1}}{k}$$
    um polinômio não negativo.
    - Daí $c'(0) = -c_{k-1} < 0$, $c'(x)$ tem apenas uma raiz positiva, digamos $c'(x_0) = 0$, e os valores de $c'(x)$ mudam de negativo para positivo em $x = x_0$ pela parte 1.
    - Daí, como $c'(x) < 0$ para todo x num intervalo contendo 0 e $c'(x) > 0$ para todo x num intervalo contendo λ_0 pela parte 1, segue que $x_0 \in (0, \lambda_0)$ e $c'(x) > 0$ para todo $x > \lambda_0$.

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Demonstração do Lema do PNN:
  - Parte 1:
    - O gráfico de $c(x)$ intercepta o semi-eixo positivo dos x apenas em $x = \lambda_0$;
    - Daí, como $c(x)$ é contínua, os valores de $c(x)$ mudam de negativo para positivo em $x = \lambda_0$ (pois $c(0) = -c_k < 0$ e $\lim_{x \to +\infty} c(x) = +\infty$).
  - Parte 2:
    - $c'(x) = kq(x)$, sendo
    $$q(x) = x^{k-1} - \frac{(k-1)c_1}{k} x^{k-2} - \cdots - \frac{2c_{k-2}}{k} x - \frac{c_{k-1}}{k}$$
    um polinômio não negativo.
    - Daí $c'(0) = -c_{k-1} < 0$, $c'(x)$ tem apenas uma raiz positiva, digamos $c'(x_0) = 0$, e os valores de $c'(x)$ mudam de negativo para positivo em $x = x_0$ pela parte 1.
    - Daí, como $c'(x) < 0$ para todo x num intervalo contendo 0 e $c'(x) > 0$ para todo x num intervalo contendo λ_0 pela parte 1, segue que $x_0 \in (0, \lambda_0)$ e $c'(x) > 0$ para todo $x > \lambda_0$.
    - Daí, para $x > 0$, $c(x) > 0$ se e somente se $x > \lambda_0$.

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Teorema do PNN:

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Teorema do PNN:
  - Sendo λ_0 a raiz positiva do polinômio não negativo
  $$c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1}x - c_k,$$
  λ_0 é autovalor dominante de C.

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Teorema do PNN:
  - Sendo λ_0 a raiz positiva do polinômio não negativo
  $$c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1}x - c_k,$$
  λ_0 é autovalor dominante de C.
- Demonstração do Teorema do PNN:

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Teorema do PNN:
  - Sendo λ_0 a raiz positiva do polinômio não negativo
$$c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1}x - c_k,$$
λ_0 é autovalor dominante de C.
- Demonstração do Teorema do PNN:
  - $c(\lambda) = 0 \Rightarrow$

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Teorema do PNN:
  - Sendo λ_0 a raiz positiva do polinômio não negativo
  $$c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1} x - c_k,$$
  λ_0 é autovalor dominante de C.
- Demonstração do Teorema do PNN:
  - $c(\lambda) = 0 \Rightarrow$
  - $\lambda^k = c_1 \lambda^{k-1} + c_2 \lambda^{k-2} + \cdots + c_k \Rightarrow$

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Teorema do PNN:
  - Sendo λ_0 a raiz positiva do polinômio não negativo
    $$c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1} x - c_k,$$
    λ_0 é autovalor dominante de C.
- Demonstração do Teorema do PNN:
  - $c(\lambda) = 0 \Rightarrow$
  - $\lambda^k = c_1 \lambda^{k-1} + c_2 \lambda^{k-2} + \cdots + c_k \Rightarrow$
  - $|\lambda|^k = |\lambda^k| \leq |c_1 \lambda^{k-1}| + |c_2 \lambda^{k-2}| + \cdots + |c_k| = c_1 |\lambda|^{k-1} + c_2 |\lambda|^{k-2} + \cdots + c_k \Rightarrow$

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Teorema do PNN:
  - Sendo λ_0 a raiz positiva do polinômio não negativo
  $$c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1}x - c_k,$$
  λ_0 é autovalor dominante de C.
- Demonstração do Teorema do PNN:
  - $c(\lambda) = 0 \Rightarrow$
  - $\lambda^k = c_1\lambda^{k-1} + c_2\lambda^{k-2} + \cdots + c_k \Rightarrow$
  - $|\lambda|^k = |\lambda^k| \leq |c_1\lambda^{k-1}| + |c_2\lambda^{k-2}| + \cdots + |c_k| = c_1|\lambda|^{k-1} + c_2|\lambda|^{k-2} + \cdots + c_k \Rightarrow$
  - $c(|\lambda|) = |\lambda|^k - c_1|\lambda|^{k-1} - c_2|\lambda|^{k-2} - \cdots - c_k \leq 0 \overset{\text{Lema do PNN}}{\Longrightarrow}$

A Raiz Positiva de Um PNN é Dominante Simples

- Teorema do PNN:
  - Sendo λ_0 a raiz positiva do polinômio não negativo
$$c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1}x - c_k,$$
    λ_0 é autovalor dominante de C.
- Demonstração do Teorema do PNN:
  - $c(\lambda) = 0 \Rightarrow$
  - $\lambda^k = c_1\lambda^{k-1} + c_2\lambda^{k-2} + \cdots + c_k \Rightarrow$
  - $|\lambda|^k = |\lambda^k| \leq |c_1\lambda^{k-1}| + |c_2\lambda^{k-2}| + \cdots + |c_k| = c_1|\lambda|^{k-1} + c_2|\lambda|^{k-2} + \cdots + c_k \Rightarrow$
  - $c(|\lambda|) = |\lambda|^k - c_1|\lambda|^{k-1} - c_2|\lambda|^{k-2} - \cdots - c_k \leq 0 \overset{\text{Lema do PNN}}{\Longrightarrow}$
  - $|\lambda| \leq \lambda_0$.

A Raiz Positiva de Um PNN Primitivo é Estritamente Dominante Simples

- Sendo:

A Raiz Positiva de Um PNN Primitivo é Estritamente Dominante Simples

- Sendo:
  - $c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1}x - c_k$ um polinômio não negativo primitivo, isto é,
$$\text{mdc}\{i \in \{1, \ldots, k\} \;/\; c_i \neq 0\} = 1,$$

A Raiz Positiva de Um PNN Primitivo é Estritamente Dominante Simples

- Sendo:
  - $c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1}x - c_k$ um polinômio não negativo primitivo, isto é,
  $$\text{mdc}\,\{i \in \{1, \ldots, k\} \;/\; c_i \neq 0\} = 1,$$
  - λ_0 a raiz positiva de $c(x)$,

A Raiz Positiva de Um PNN Primitivo é Estritamente Dominante Simples

- Sendo:
  - $c(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1}x - c_k$ um polinômio não negativo primitivo, isto é,
$$\text{mdc}\,\{i \in \{1, \ldots, k\} \;/\; c_i \neq 0\} = 1,$$
  - λ_0 a raiz positiva de $c(x)$,
- λ_0 é o autovalor estritamente dominante simples de C.

Estimativa da Raiz $\lambda_0 > 0$ de Um PNN para o "Chute" Inicial de Algum Método Numérico (Método de Newton, Bisecção, etc.) para o Cálculo de λ_0

- Sendo $S = c_1 + \cdots + c_k$:

Estimativa da Raiz $\lambda_0 > 0$ de Um PNN para o "Chute" Inicial de Algum Método Numérico (Método de Newton, Bisecção, etc.) para o Cálculo de λ_0

- Sendo $S = c_1 + \cdots + c_k$:
  - $S = 1 \Rightarrow \lambda_0 = 1$;

Estimativa da Raiz $\lambda_0 > 0$ de Um PNN para o "Chute" Inicial de Algum Método Numérico (Método de Newton, Bisecção, etc.) para o Cálculo de λ_0

- Sendo $S = c_1 + \cdots + c_k$:
    - $S = 1 \Rightarrow \lambda_0 = 1$;
    - $S > 1 \Rightarrow 1 < \lambda_0 < S$;

Estimativa da Raiz $\lambda_0 > 0$ de Um PNN para o "Chute" Inicial de Algum Método Numérico (Método de Newton, Bisecção, etc.) para o Cálculo de λ_0

- Sendo $S = c_1 + \cdots + c_k$:
  - $S = 1 \Rightarrow \lambda_0 = 1$;
  - $S > 1 \Rightarrow 1 < \lambda_0 < S$;
  - $S < 1 \Rightarrow S < \lambda_0 < 1$.

Demonstração da Estimativa para $\lambda_0 > 0$

- Sendo $c(1) = 1 - S$:

Demonstração da Estimativa para $\lambda_0 > 0$

- Sendo $c(1) = 1 - S$:
  - λ_0 é a única raiz positiva de $c(x) \Rightarrow$

Demonstração da Estimativa para $\lambda_0 > 0$

- Sendo $c(1) = 1 - S$:
  - λ_0 é a única raiz positiva de $c(x) \Rightarrow$
  - $\lambda_0 = 1 \Leftrightarrow S = 1$.

Demonstração da Estimativa para $\lambda_0 > 0$

- Sendo $c(1) = 1 - S$:
    - λ_0 é a única raiz positiva de $c(x) \Rightarrow$
    - $\lambda_0 = 1 \Leftrightarrow S = 1$.
    - Sendo $\lambda_0 \neq 1$:

Demonstração da Estimativa para $\lambda_0 > 0$

- Sendo $c(1) = 1 - S$:
  - λ_0 é a única raiz positiva de $c(x) \Rightarrow$
  - $\lambda_0 = 1 \Leftrightarrow S = 1$.
  - Sendo $\lambda_0 \neq 1$:
    - $\lambda_0 > 1 \overset{\text{Lema do PNN}}{\Longleftrightarrow} c(1) < 0 \Leftrightarrow S > 1$.

Demonstração da Estimativa para $\lambda_0 > 0$

- Sendo $c(1) = 1 - S$:
  - λ_0 é a única raiz positiva de $c(x) \Rightarrow$
  - $\lambda_0 = 1 \Leftrightarrow S = 1$.
  - Sendo $\lambda_0 \neq 1$:
    - $\lambda_0 > 1 \overset{\text{Lema do PNN}}{\Longleftrightarrow} c(1) < 0 \Leftrightarrow S > 1$.
    - $c(S) = S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_{k-1} S - c_k =$

Demonstração da Estimativa para $\lambda_0 > 0$

- Sendo $c(1) = 1 - S$:
  - λ_0 é a única raiz positiva de $c(x) \Rightarrow$
  - $\lambda_0 = 1 \Leftrightarrow S = 1$.
  - Sendo $\lambda_0 \neq 1$:
    - $\lambda_0 > 1 \overset{\text{Lema do PNN}}{\Longleftrightarrow} c(1) < 0 \Leftrightarrow S > 1$.
    - $c(S) = S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_{k-1} S - c_k =$
    - $(S - c_1)S^{k-1} - c_2 S^{k-2} - \cdots - c_{k-1} S - c_k =$

Demonstração da Estimativa para $\lambda_0 > 0$

- Sendo $c(1) = 1 - S$:
  - λ_0 é a única raiz positiva de $c(x) \Rightarrow$
  - $\lambda_0 = 1 \Leftrightarrow S = 1$.
  - Sendo $\lambda_0 \neq 1$:
    - $\lambda_0 > 1 \overset{\text{Lema do PNN}}{\Longleftrightarrow} c(1) < 0 \Leftrightarrow S > 1$.
    - $c(S) = S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_{k-1} S - c_k =$
    - $(S - c_1) S^{k-1} - c_2 S^{k-2} - \cdots - c_{k-1} S - c_k =$
    - $(c_2 + c_3 + \cdots + c_{k-1} + c_k) S^{k-1} - c_2 S^{k-2} - \cdots - c_{k-1} S - c_k =$

Demonstração da Estimativa para $\lambda_0 > 0$

- Sendo $c(1) = 1 - S$:
  - λ_0 é a única raiz positiva de $c(x) \Rightarrow$
  - $\lambda_0 = 1 \Leftrightarrow S = 1$.
  - Sendo $\lambda_0 \neq 1$:
    - $\lambda_0 > 1 \overset{\text{Lema do PNN}}{\Longleftrightarrow} c(1) < 0 \Leftrightarrow S > 1$.
    - $c(S) = S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_{k-1} S - c_k =$
    - $(S - c_1) S^{k-1} - c_2 S^{k-2} - \cdots - c_{k-1} S - c_k =$
    - $(c_2 + c_3 + \cdots + c_{k-1} + c_k) S^{k-1} - c_2 S^{k-2} - \cdots - c_{k-1} S - c_k =$
    - $c_2 S^{k-2}(S-1) + c_3 S^{k-3}(S^2 - 1) + \cdots + c_{k-1} S(S^{k-2} - 1) + c_k(S^{k-1} - 1)$.

Demonstração da Estimativa para $\lambda_0 > 0$

- Sendo $c(1) = 1 - S$:
  - λ_0 é a única raiz positiva de $c(x) \Rightarrow$
  - $\lambda_0 = 1 \Leftrightarrow S = 1$.
  - Sendo $\lambda_0 \neq 1$:
    - $\lambda_0 > 1 \overset{\text{Lema do PNN}}{\Longleftrightarrow} c(1) < 0 \Leftrightarrow S > 1$.
    - $c(S) = S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_{k-1} S - c_k =$
    - $(S - c_1)S^{k-1} - c_2 S^{k-2} - \cdots - c_{k-1} S - c_k =$
    - $(c_2 + c_3 + \cdots + c_{k-1} + c_k)S^{k-1} - c_2 S^{k-2} - \cdots - c_{k-1} S - c_k =$
    - $c_2 S^{k-2}(S-1) + c_3 S^{k-3}(S^2 - 1) + \cdots + c_{k-1} S(S^{k-2} - 1) + c_k(S^{k-1} - 1)$.
    - $\therefore S > 1 \Leftrightarrow c(S) > 0 \overset{\text{Lema do PNN}}{\Longleftrightarrow} S > \lambda_0$.