Universidade Federal do Paraná

Departamento de Matemática

Manual Técnico-Didático

Álgebra Linear - CM005
Teoria Resumida e Exercícios

Autor:
Professor José Renato Ramos Barbosa
Chefe do Departamento:
Professor Manuel Jesus Cruz Barreda

2014

www.ufpr.br/~jrrb

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

O conteúdo destas Notas de Aulas (NA), que tem sido trabalhado por mais de quinze anos, ainda está incompleto e 'em construção'. Daí é provável que a ordem e/ou a redação dos exercícios, bem como a quantidade dos mesmos, variem em muitas das visitas ao endereço

www.ufpr.br/~jrrb.

Observação análoga vale para as definições e os resultados que aqui figuram. Ainda, o objetivo das Notas é servir de apoio para o curso Álgebra Linear (CM005) ministrado na UFPR.
Recomendo ainda os seguintes livros:

- VETORES E MATRIZES - Uma Introdução à Álgebra Linear (a partir da 4ª Edição - 2007) do Nathan Moreira dos Santos, publicado pela Editora Thomson.[1]

- Introdução à Álgebra Linear do Gilbert Strang, publicado pela Editora LTC a partir da 4ª Edição norte-americana.

Aqui, as notas de rodapé (ndr) tem papel importante (e DEVEM ser lidas como parte integrante do texto) para quem estiver cursando Álgebra Linear pela primeira vez. (Muitos exemplos e algumas demonstrações, bem como algumas resoluções/dicas/respostas de alguns exercícios, figuram em tais ndr.) Para quem já cursou Álgebra Linear, a leitura pode ser feita em ritmo de revisão. Daí, neste caso, a leitura de algumas destas ndr pode (e deve) ser suprimida.
Deliberadamente não incluí as demonstrações de alguns resultados pois a CM005 é (predominantemente) para cursos com caráter mais aplicado (engenharias, por exemplo). Alunos interessados em preencher tais lacunas podem recorrer à livros da área (como os previamente citados).
O pré-requisito para a leitura destas NA é um curso de Geometria Analítica. Falando em pré-requisitos, gostaria de expressar que vejo a Matemática como uma linguagem tipo Português, Inglês, Francês, etc. Assim, temos também 'Matematiquês', 'Fisiquês', 'Quimiquês', 'Informatiquês', etc. Aprender uma Língua é antes, praticamente, ser alfabetizado nela. Já nessa etapa preliminar é preciso estudá-la e praticá-la (para não cometer equívocos com a mesma). Note que não é fácil querer fazer um estudo avançado da Língua sem ter sido alfabetizado nela. Como diz o ditado: 'O avançado é fazer o básico bem feito!'. Por outro lado, para ter fluência na Língua é preciso, além do estudo e da prática, conhecer todo um jargão da área. Apenas estudar na proximidade de cada prova é perda de tempo para quase todos que assim procedem.
Sugestões para o aprimoramento e/ou a clareza das NA serão muito bem vindas.

[1] Nenhuma edição mais antiga serve, principalmente por causa dos exercícios das últimas edições!

Capítulo 2

O Espaço Vetorial $\mathbb{R}^n$

2.1 Definição e Propriedades do $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

Seja $X \in \mathbb{R}^n$, isto é, X é a n-upla ordenada $X = (x_1, \ldots, x_n)$ tal que $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.[1] Tal X é dito um *vetor* do $\mathbb{R}^n$ com *coordenadas/componentes* x_1, ..., x_n. A ordem das coordenadas é importante, isto é, se $X = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ são vetores do $\mathbb{R}^n$, então

$$X = Y \text{ significa } x_1 = y_1,\ \ldots,\ x_n = y_n.$$ [2]

Em $\mathbb{R}^n$, a *soma* de $X = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ é o vetor

$$X + Y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$ [3]

Em $\mathbb{R}^n$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $X = (x_1, \ldots, x_n)$, o vetor

$$\lambda X := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

é dito um *produto por escalar*.[4]
Para quaisquer vetores $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ e escalares $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

1. $X + Y = Y + X$;
2. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$;
3. $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ é tal que $X + 0 = X$;
4. $-X = (-1)X$ é tal que $X + (-X) = 0$;
5. $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$;
6. $(\lambda + \beta)X = \lambda X + \beta X$;
7. $(\lambda\beta)X = \lambda(\beta X)$;
8. $1X = X$.

EXERCÍCIO: Demonstre tais propriedades.

[1] Por exemplo, $X = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$.
[2] Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, $(1, 2) \neq (2, 1)$.
[3] Por exemplo, se $X = (1, 2, 3), Y = (-1, 1/2, 1) \in \mathbb{R}^3$, então $X + Y = (0, 5/2, 4) \in \mathbb{R}^3$.
[4] Por exemplo, se $\lambda = \frac{1}{3}$ e $X = (3/2, 3) \in \mathbb{R}^2$, então $\lambda X = (1/2, 1) \in \mathbb{R}^2$.

2.2 Produto Interno, Módulo e Ângulo em $\mathbb{R}^n$

Sendo $X = (x_1, \ldots, x_n)\,, Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, o número real

$$X \cdot Y := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

é dito o *produto interno/escalar* de X e Y.[5]
Para quaisquer vetores $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ e cada escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

1. $X \cdot Y = Y \cdot X$;
2. $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$;
3. $\lambda(X \cdot Y) = (\lambda X) \cdot Y = X \cdot (\lambda Y)$;
4. $X \cdot X \geq 0$ e $X \cdot X = 0$ se, e somente se, $X = 0$.

$\boxed{\text{EXERCÍCIO:}}$ Demonstre tais propriedades.

Note que $X \cdot 0 = 0$ para todo $X \in \mathbb{R}^n$. De fato, pela propriedade distributiva anterior,

$$X \cdot 0 = X \cdot (0 + 0) = X \cdot 0 + X \cdot 0.$$

Sendo $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, o número real não-negativo

$$||X|| := \sqrt{X \cdot X}$$

é dito o *módulo* (ou a *norma*) de X.[6]
Para quaisquer vetores $X, Y \in \mathbb{R}^n$ e cada escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

1. $||\lambda X|| = |\lambda|\, ||X||$;
2. $||X|| \geq 0$ e $||X|| = 0$ se, e somente se, $X = 0$; (*Não-Negatividade*)
3. $|X \cdot Y| \leq ||X||\, ||Y||$;[7] (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*)

[5]Por exemplo, se $X = \left(\ln 2, 3/\sqrt{2}, -3\right), Y = \left(-1, 1, \cos\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{R}^3$, então $X \cdot Y = \ln(1/2)$.

[6]Por exemplo, se $X = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$, então $||X|| = 5$.

[7] $\boxed{\text{DEMONSTRAÇÃO:}}$ Se $Y = 0$, ambos os lados da desigualdade se anulam. Assim, seja $Y \neq 0$. Como

$$0 \leq (X + \lambda Y) \cdot (X + \lambda Y) = X \cdot X + 2\lambda(X \cdot Y) + \lambda^2 (Y \cdot Y)$$

para todo escalar λ, em particular, se $\lambda = -\frac{X \cdot Y}{Y \cdot Y}$, temos que

$$0 \leq X \cdot X - 2\frac{(X \cdot Y)^2}{Y \cdot Y} + \frac{(X \cdot Y)^2}{Y \cdot Y} = X \cdot X - \frac{(X \cdot Y)^2}{Y \cdot Y}.$$

Assim, multiplicando esta última desigualdade por $Y \cdot Y$, temos que

$$0 \leq (X \cdot X)(Y \cdot Y) - (X \cdot Y)^2,$$

isto é,

$$|X \cdot Y|^2 \leq ||X||^2 ||Y||^2.$$

4. $||X+Y|| \leq ||X|| + ||Y||$. (*Desigualdade Triangular*)

$\boxed{\text{Exercício:}}$ Demonstre as propriedades 1, 2 e 4. (Para a 4, use a 3 e que $||X||^2 = X \cdot X \; \forall X$.)

Sejam $X, Y \in \mathbb{R}^n$ não-nulos. Daí, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz e via a Não-negatividade, temos que

$$-1 \leq \frac{X \cdot Y}{||X|| \, ||Y||} \leq 1.$$

Por outro lado, existe um único ângulo entre 0 e π cujo cosseno é igual a $\frac{X \cdot Y}{||X|| \, ||Y||}$. Denotamos tal ângulo por (X, Y); dizemos que o mesmo é o ângulo entre os vetores X e Y; definimos

$$\cos(X, Y) := \tfrac{X \cdot Y}{||X|| \, ||Y||}.$$ [8]

Note que podemos calcular o produto interno (de quaisquer vetores X e Y do $\mathbb{R}^n$) por

$$X \cdot Y = ||X|| \, ||Y|| \cos(X, Y).$$

Dizer que X e Y são *ortogonais (entre si)* significa que $X \cdot Y = 0$, isto é, um dos vetores, X ou Y, é nulo ou $(X, Y) = \frac{\pi}{2}$ radianos.[9]

2.3 Retas e Hiperplanos em $\mathbb{R}^n$

Vamos generalizar os conceitos de reta e plano já vistos na Geometria Analítica.
Considere: $P, A \in \mathbb{R}^n$ fixos, $A \neq 0$; $X \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$ variáveis. Daí:

1. $\boxed{X = P + tA}$ representa a *Reta que Passa pelo Ponto* P *na Direção do vetor* A;

2. $\boxed{A \cdot (X - P) = 0}$ representa o *Hiperplano que Passa pelo Ponto* P *com Vetor Normal* A.

Assim, sendo $P = (p_1, \ldots, p_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ e $X = (x_1, \ldots, x_n)$, tal reta e tal plano são dados respectivamente por:

1. $\boxed{x_i = p_i + ta_i, \quad i = 1, \ldots, n}$; (*Equações Paramétricas da Reta*)

2. $\boxed{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = d, \quad d = a_1p_1 + \cdots + a_np_n}$. (*Equação Geral do Hiperplano*)

Por exemplo, em $\mathbb{R}^3$, se $P = (x_0, y_0, z_0)$, $A = (a, b, c)$ e $X = (x, y, z)$, tal reta e tal plano são dados respectivamente por:

1. $x = x_0 + ta$, $y = y_0 + tb$ e $z = z_0 + tc$;

2. $ax + by + cz = d, \quad d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

(Para uma ilustração em $\mathbb{R}^3$, considere a Figura 2.1.)

[8] Por exemplo, em $\mathbb{R}^4$, sejam $X = (1, -1, 0, 2)$ e $Y = \left(-1, 1, \frac{1}{2}, -2\right)$. Daí $X \cdot Y = -6$, $||X|| = \sqrt{6}$ e $||Y|| = \frac{5}{2}$. Logo $\cos(X, Y) \approx \frac{-6}{2{,}4 \cdot 2{,}5} = 1$. Então $(X, Y) \approx \pi$ radianos.

[9] Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, $X = (1, 1)$ e $Y = (-1, 1)$ são ortogonais.

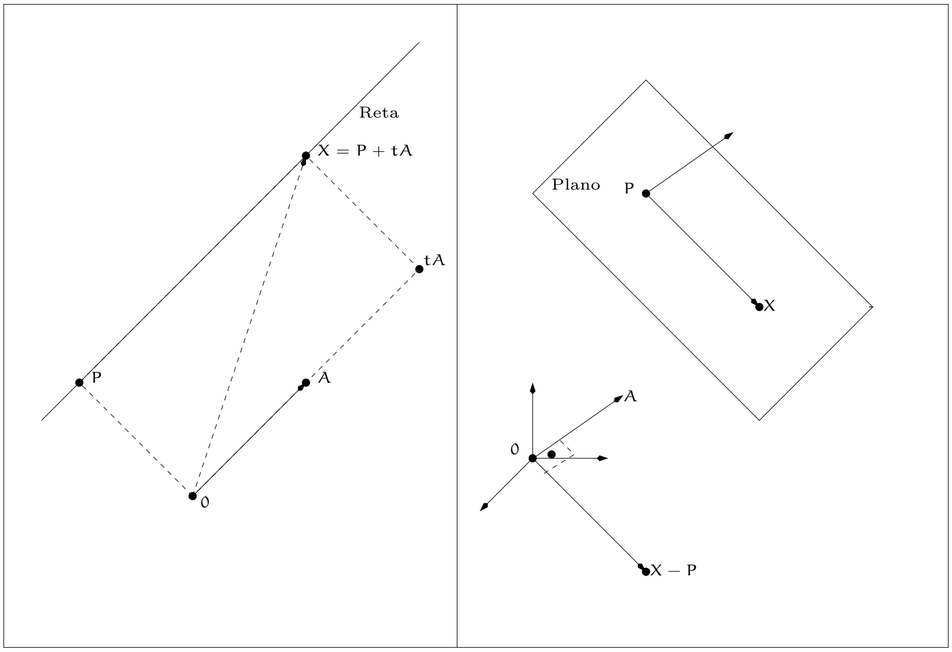

Figura 2.1: Reta e Plano em $\mathbb{R}^3$.

2.4 Subespaços do $\mathbb{R}^n$

São subconjuntos S do $\mathbb{R}^n$ tais que:

1. $0 \in S$;
2. $\lambda X \in S$ para cada escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ e qualquer vetor $X \in S$;
3. $X + Y \in S$ para quaisquer vetores $X, Y \in S$.

Por exemplo, a reta (que passa pela origem)

$$S = \left\{ X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = x \right\}$$

é um subespaço do $\mathbb{R}^2$. De fato, primeiramente note que $0 = (0,0) \in S$ pois as coordenadas de tal vetor (nulo) satisfazem a equação $y = x$, isto é, $0 = 0$. Sejam agora $\lambda \in \mathbb{R}$ e $X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2) \in S$, isto é,

$$\begin{cases} y_1 &= x_1; \\ y_2 &= x_2. \end{cases}$$

Daí, por um lado, $\lambda X = (\lambda x_1, \lambda y_1) \in S$ pois, claramente,

$$\lambda y_1 = \lambda x_1.$$

Por outro lado, $X + Y = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in S$ pois, claramente,

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$

Outro exemplo, o plano (que passa pela origem)

$$S = \left\{ X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\}$$

é um subespaço do $\mathbb{R}^3$. De fato, primeiramente note que $0 = (0,0,0) \in S$ pois as coordenadas de tal vetor (nulo) satisfazem a equação $x+y+z=0$, isto é, $0+0+0=0$. Sejam agora $\lambda \in \mathbb{R}$ e $X = (x_1, y_1, z_1)\,, Y = (x_2, y_2, z_2) \in S$, isto é,

$$\begin{cases} x_1 & + & y_1 & + & z_1 & = & 0; \\ x_2 & + & y_2 & + & z_2 & = & 0. \end{cases}$$

Daí, por um lado, $\lambda X = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \in S$ pois

$$\lambda x_1 + \lambda y_1 + \lambda z_1 = \lambda\,(x_1 + y_1 + z_1) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Por outro lado, $X + Y = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in S$ pois

$$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2) = x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2 = x_1+y_1+z_1+x_2+y_2+z_2 = 0+0 = 0.$$

Mais um exemplo:

$$S = \left\{X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - y = 0 \text{ e } z = 0\right\}$$

é um subespaço do $\mathbb{R}^3$. De fato, a reta (que passa pela origem)

$$S = \left\{X = t(1,1,0) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$$

representa a interseção dos planos (que passam pela origem) $x - y = 0$ e $z = 0$.[10] Note que S é a reta do exemplo dado anteriormente, só que agora tal reta está sendo representada como um subconjunto do $\mathbb{R}^3$.
Assim como nos três exemplos anteriores, de modo geral, em $\mathbb{R}^n$, pode ser demonstrado que (veja exercício seguinte): qualquer hiperplano que passa pela origem é um subespaço do $\mathbb{R}^n$; interseções de hiperplanos que passam pela origem (inclusive retas que passam pela origem) são subespaços do $\mathbb{R}^n$.

PERGUNTA: Quando $S \subset \mathbb{R}^n$ não é um subespaço do $\mathbb{R}^n$?

RESPOSTA: Quando ocorrer o seguinte:

- $0 \notin S$ e/ou
- $\lambda X \notin S$ para algum escalar real λ e algum vetor X de S e/ou
- $X + Y \notin S$ para algum par de vetores X e Y de S.

Por exemplo, $S = \left\{X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 1\right\}$ não é um subespaço do $\mathbb{R}^3$.[11]

$\boxed{\text{EXERCÍCIO:}}$ Em cada item seguinte, verifique que S é um subespaço do $\mathbb{R}^n$, sendo A, A_1, ..., A_r vetores não nulos fixados:

1. $S = \{0\}$; (*Subespaço Trivial*)
2. $S = \mathbb{R}^n$; (*Subespaço Trivial*)
3. $S = \{X = tA \,|t \in \mathbb{R}\}$; (*Reta que Passa pela Origem na Direção do Vetor* A)

[10] Verifique!
[11] De fato, considere, por exemplo, $\lambda = -1$, $X = (1,0,0)$ e $Y = (0,1,0)$. Note ainda que $0 \notin S$.

4. $S = \{X \mid A \cdot X = 0\}$; (*Hiperplano que Passa pela Origem com Vetor Normal* A)

5. $S = \{X \mid A_1 \cdot X = 0, \ldots, A_r \cdot X = 0\}$; (*Interseção de* r *Hiperplanos que Passam pela Origem com Vetores Normais* $A_1, \ldots, A_r$)

6. Considere r vetor(es) do $\mathbb{R}^n$, A_1, ..., A_r, e r escalar(es), c_1, ..., c_r. A soma

$$c_1A_1 + \cdots + c_rA_r$$

é dita uma *combinação linear* (*CL*) de A_1, ..., A_r.[12]
Seja $S = \{X \mid X \text{ é CL de } A_1, \ldots, A_r\}$.[13] (*Subespaço Gerado por* A_1, ..., A_r)

Para o subespaço gerado por A_1, ..., A_r, afirmar que $\{A_1, \ldots, A_r\}$ é uma *base* de S significa que, além de gerarem S, os vetores A_1, ..., A_r são *linearmente independentes* (*LI*), isto é, a única solução da equação

$$x_1A_1 + \cdots + x_rA_r = 0$$

é a *trivial*

$$x_1 = \cdots = x_r = 0.$$

(Caso a solução trivial não seja a única solução, dizemos que os r vetores são *LD*.)[14]

EXERCÍCIO: Para cada item do exercício 4 da seção **Exercícios** (deste capítulo), verifique que S é um subespaço do $\mathbb{R}^n$ obtendo vetores LI que gerem S.

Seja S um subespaço do $\mathbb{R}^n$. Demonstra-se que:

- S é gerado por r vetores;
- qualquer base de S tem o mesmo número de vetores, isto é, para duas bases quaisquer de S, uma com r_1 vetores e a outra com r_2 vetores, temos necessariamente que

$$r_1 = r_2.$$

Neste caso, o número de elementos comum de qualquer uma das bases de S é dito a

dimensão de S ($\dim S$).

Por exemplo, se $E_1 = (1,0,0,0)$, $E_2 = (0,1,0,0)$, $E_3 = (0,0,1,0)$ e $E_4 = (1,0,0,0)$, então é fácil ver que $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ e $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. Agora, ainda em $\mathbb{R}^4$, considere o subespaço S gerado por $A_1 = (1,1,0,0)$, $A_2 = (0,1,1,0)$ e $A_3 = (0,0,1,1)$, isto é, cada

[12]Em $\mathbb{R}^4$, se $c_1 = -1$, $A_1 = (1,-1,2,3)$, $c_2 = 2$, $A_2 = \left(1,0,-1,\frac{1}{2}\right)$, $c_3 = \frac{3}{4}$ e $A_3 = \left(\frac{1}{3},1,-1,-2\right)$, então $c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = \left(\frac{5}{4},\frac{7}{4},-\frac{19}{4},-\frac{7}{2}\right)$ é uma CL de A_1, A_2 e A_3. Agora, se $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ e $c_3 = -3$, então $c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = \left(-1,-4,6,\frac{17}{2}\right)$ é uma outra CL de A_1, A_2 e A_3. Assim, existem infinitas CL's de A_1, A_2 e A_3. Em particular, além das duas anteriores, note que A_1 é uma CL de A_1, A_2 e A_3: considere $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$! Analogamente, A_2 e A_3 são CL's de A_1, A_2 e A_3.

[13]Para o exemplo da nota de rodapé anterior, os vetores A_1, A_2, A_3, $\left(\frac{5}{4},\frac{7}{4},-\frac{19}{4},-\frac{7}{2}\right)$ e $\left(-1,-4,6,\frac{17}{2}\right)$, bem como todas as outras CL's de A_1, A_2 e A_3, representam os elementos de S.

[14]Por exemplo, em $\mathbb{R}^3$, os vetores $A_1 = (1,-1,1)$, $A_2 = (-1,1,2)$ e $A_3 = (0,0,3)$ são LD pois a equação $x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 = 0$ admite, por exemplo, a solução não trivial $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_3 = -1$!

elemento de S pode ser escrito como $c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3$ com c_1, c_2 e c_3 em $\mathbb{R}$. Note que A_1, A_2 e A_3 são LI pois

$$\begin{aligned} x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 = 0 &\Leftrightarrow (x_1, x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0. \end{aligned}$$

Assim, S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$, $\{A_1, A_2, A_3\}$ é uma base de S e $\dim S = 3$.
Por outro lado, note que, se considerarmos agora $A_1 = (1, 1, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 1, 0)$ e $A_3 = (1, 2, 1, 0)$, então $\{A_1, A_2, A_3\}$ não é uma base de um subespaço do $\mathbb{R}^4$ pois A_1, A_2 e A_3 são LD. De fato, $x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 = 0$ admite (além da solução trivial), por exemplo, a solução $x_1 = x_2 = 1$ e $x_3 = -1$.

$\boxed{\text{EXERCÍCIO:}}$ Em $\mathbb{R}^n$, sejam

$$E_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0),\ E_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0),\ \dots,\ E_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1).$$

Demonstre que $\dim \mathbb{R}^n = n$ pois $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.[15]

Seja S um subespaço do $\mathbb{R}^n$. Dizer que $\{A_1, \dots, A_r\} \subset S$ é uma base *ortogonal* de S significa que os r vetores desta base são ortogonais entre si. Dizer que tal base é *ortonormal* significa que a mesma, além de ser ortogonal, tem r vetores *unitários*, isto é, cada um deles têm módulo 1.[16]

$\boxed{\text{EXERCÍCIO:}}$ Seja $\{A_1, \dots, A_r\} \subset S$ uma base ortogonal de S. Demonstre que

$$\{A_1/||A_1||, \dots, A_r/||A_r||\}$$

é uma base ortonormal de S.[17]
Agora, para encerrar este capítulo, sejam S_1 e S_2 subespaços de $\mathbb{R}^n$ com $S_1 \subset S_2$. Neste caso, é dito que S_1 *é um subespaço de* S_2.[18]

[15] Dita base *canônica* de $\mathbb{R}^n$.
[16] Por exemplo, a base canônica de $\mathbb{R}^n$ é ortonormal.
[17] Basta demonstrar que cada vetor da segunda base tem módulo 1.
[18] Por exemplo, em $\mathbb{R}^3$, considere que S_1 é uma reta que passa pela origem e S_2 é um plano que contenha tal reta.

2.5 Exercícios

1. Determine $X, Y \in \mathbb{R}^4$ tais que as coordenadas de X são todas iguais, a última coordenada de Y é igual a 1 e $X + Y = (2, 3, 4, 5)$.

2. Se $X = (1, 2, 3)$, $Y = (4, 5, 0)$ e $Z = (6, 0, 0)$, determine escalares x, y e z tais que $xX + yY + zZ = (41/2, , 11, 1/2)$.

3. Obtenha: a equação geral do hiperplano do $\mathbb{R}^4$ que passa pelos pontos $P_1 = (1, -1, , 1, 0)$, $P_2 = (0, -1, 2, 0)$, $P_3 = (1, 0, -2, 2)$ e $P_4 = (1, 0, 0, 0)$; os pontos da reta que passa por P_1 e é perpendicular a tal hiperplano que distam de P_1 uma unidade de comprimento.[19]

4. Em cada item seguinte, demonstre que S é um subespaço do $\mathbb{R}^n$; apresente uma base de S e sua dimensão.

   (a) $n = 3$ e $S = \{X = (x_1, x_2, x_3) \,|\, ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\}$ o plano que passa pela origem com vetor normal $A = (a, b, c) \neq 0$;[20]

   (b) $n = 4$ e:

      i. $S = \{X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_2 = 2x_1, x_3 = 3x_1, x_4 = 4x_1\}$ uma reta que passa pela origem;

      ii. $S = \{X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_3 = x_1 + 2x_2, x_4 = x_1 - x_2\}$ um plano que passa pela origem;

      iii. $S = \{X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_4 = x_1 + 2x_2 + 3x_3\}$.

   tem Justifique porque S não é um subespaço do $\mathbb{R}^2$ se:

   (a) $S = \left\{X = (x_1, x_2) \,|\, x_2 = x_1^2\right\}$;

   (b) $S = \{X = (x_1, x_2) \,|\, x_2 = 1\}$.

5. Demonstre as afirmações que se seguem:

---

[19] $\boxed{\text{Sugestões e Respostas:}}$ $ax + by + cz + dw = e$ é a equação geral do hiperplano a ser determinada. Daí, sendo (a, b, c, d) ortogonal a $P_1 - P_4$, $P_2 - P_4$ e $P_3 - P_4$, obtenha que $x + y + z + w = 1$ é a equação de tal hiperplano. Então, via a equação vetorial da reta $X = P_1 + t(1, 1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, e observando que procuramos pontos X tais que

$$\|X - P_1\| = \|(t, t, t, t)\| = 1,$$

obtemos os pontos $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ que distam uma u.c. de P_1.

[20] $\boxed{\text{Resolução:}}$ Pelo exercício 6 da página 12, S é um subespaço do $\mathbb{R}^3$ se é gerado por r vetores. Vamos verificar que $r = 2$ vetores geram S e são LI, o que garante que são uma base de S e $\dim S = 2$. Assim, note primeiramente que, $(a, b, c) \neq 0$ tem alguma coordenada nula. Suponha, sem perda de generalidade, $c \neq 0$. Então, por um lado, como

$$\begin{aligned} S \ni X &= \left(x_1, x_2, -\frac{a}{c}x_1 - \frac{b}{c}x_2\right) \\ &= x_1\left(1, 0, -\frac{a}{c}\right) + x_2\left(0, 1, -\frac{b}{c}\right), \end{aligned}$$

temos que $A_1 = \left(1, 0, -\frac{a}{c}\right)$ e $A_2 = \left(0, 1, -\frac{b}{c}\right)$ geram S pois todo $X \in S$ é CL de A_1 e A_2. Por outro lado, A_1 e A_2 são LI pois $X = 0$ apenas quando $x_1 = x_2 = 0$.

(a) Nenhuma base de um subespaço do $\mathbb{R}^n$ pode conter o vetor nulo (0) pois é LD qualquer conjunto finito de vetores do $\mathbb{R}^n$ que contenha 0.[21]

(b) Nenhum vetor pode ter coordenadas distintas numa mesma base, isto é, se $\{A_1, \ldots, A_r\}$ é uma base de um subespaço S do $\mathbb{R}^n$ e $X \in S$ é tal que

$$X = c_1A_1 + \cdots + c_rA_r = c_1'A_1 + \cdots + c_r'A_r,$$

então $c_1 = c_1'$, ..., $c_r = c_r'$.[22]

(c) Se os r vetores de $\{A_1, \ldots, A_r\} \subset \mathbb{R}^n$ são não-nulos e ortogonais entre si, então são LI.[23]

(d) Sendo S um subespaço do $\mathbb{R}^n$ e $\{A_1, \ldots, A_r\}$ uma base ortonormal de S, as coordenadas de $X = c_1A_1 + \cdots + c_rA_r$ são dadas por

$$c_1 = X \cdot A_1, \ldots, c_r = X \cdot A_r.$$[24]

6. Demonstre que $\left\{A_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), A_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$. Quais as coordenadas de $X = (1, 2) = E_1 + 2E_2$, sendo $E_1 = (1, 0)$ e $E_2 = (0, 1)$, na base $\{A_1, A_2\}$?

7. Demonstre que

$$\left\{A_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), A_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), A_3 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right\}$$

é uma base ortonormal de um subespaço S (de dimensão 3) do $\mathbb{R}^4$. Quais as coordenadas de $X = (1, 3, 1, 1) = E_1 + 3E_2 + E_3 + E_4$,[25] sendo $E_1 = (1, 0, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $E_4 = (0, 0, 0, 1)$, na base $\{A_1, A_2, A_3, \}$?

---

[21] RESOLUÇÃO: Em $\mathbb{R}^n$, considere que $A_i = 0$ é um dos vetores entre A_1, A_2, ..., A_r. Tais vetores são LD. De fato, para termos uma CL nula

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_rA_r = 0$$

não trivial, basta considerarmos que c_i é o único escalar não nulo. Por exemplo, se $c_i = 1$, então

$$0 \cdot A_1 + \cdots + 0 \cdot A_{i-1} + 1 \cdot A_i + 0 \cdot A_{i+1} + \cdots + 0 \cdot A_r = 0.$$

[22] Os escalares c_1, ..., c_r são ditos as *coordenadas* de X.

[23] RESOLUÇÃO: Seja A_i um entre os vetores A_1, A_2, ..., A_r. Multiplique ambos os membros da CL nula

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_rA_r = 0$$

por A_i. Daí temos que

$$c_1A_1 \cdot A_i + \cdots + c_{i-1}A_{i-1} \cdot A_i + c_iA_i \cdot A_i + c_{i+1}A_{i+1} \cdot A_i + \cdots + c_rA_r \cdot A_i = 0 \cdot A_i.$$

Segue da ortogonalidade entre os r vetores que é nulo o produto escalar de quaisquer dois tais vetores com índices diferentes. Então a igualdade anterior é simplesmente

$$c_iA_i \cdot A_i = 0.$$

Assim, como $A_i \neq 0$, a última igualdade só é válida para $c_i = 0$. Por fim, sendo i arbitrário, concluímos que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$$

e daí os r vetores são LI.

[24] DICA: Faça como na resolução anterior!

[25] $X \in S$. De fato, veja **Exemplo 4.13** da p. 106 do livro do Professor Natan M. dos Santos citado na Introdução destas NA!

8. O processo de Gram-Schmidt utiliza uma base $B = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ de um subespaço S do $\mathbb{R}^n$ para obter uma base ortogonal $B' = \{A_1', A_2', \ldots, A_r'\}$ de S. Por exemplo, se $r = 4$ e $n \geq 4$, define-se

$$\begin{aligned} A_1' &:= A_1; \\ A_2' &:= A_2 - \frac{A_2 \cdot A_1'}{A_1' \cdot A_1'} A_1'; \\ A_3' &:= A_3 - \frac{A_3 \cdot A_1'}{A_1' \cdot A_1'} A_1' - \frac{A_3 \cdot A_2'}{A_2' \cdot A_2'} A_2'; \\ A_4' &:= A_4 - \frac{A_4 \cdot A_1'}{A_1' \cdot A_1'} A_1' - \frac{A_4 \cdot A_2'}{A_2' \cdot A_2'} A_2' - \frac{A_4 \cdot A_3'}{A_3' \cdot A_3'} A_3'. \end{aligned}$$

Demonstre que $B' = \{A_1', A_2', A_3', A_4'\}$ é ortogonal.

9. Obtenha uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ via a base $\{(1, 2), (3, 4)\}$.

10. Dê um exemplo de uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$ que contenha o vetor $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

11. O *complemento ortogonal* $S^\perp$ do subespaço S do $\mathbb{R}^n$ é constituído pelos vetores do $\mathbb{R}^n$ que são ortogonais a todos os vetores de S, isto é, é composto por cada vetor $Y \in \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $X \in S$, $X \cdot Y = 0$.

    (a) Demostre que $S^\perp$ é subespaço do $\mathbb{R}^n$.[26]

    (b) Determine $S^\perp$ se:

    i. $n = 2$ e $\{(1, 1)\}$ é uma base de S;

    ii. $n = 3$ e $\{(1, 1, 1)\}$ é uma base de S;

    iii. $n = 3$ e $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ é uma base de S;

    iv. $n = 4$ e $\{(1, 1, 1, 1)\}$ é uma base de S;

    v. $n = 4$ e $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$ é uma base de S;

    vi. $n = 4$ e $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ é uma base de S.

    DICA: Para determinar $S^\perp$, basta determinar uma de suas bases. Para isto, note que, se $Y \in S^\perp$ é perpendicular a todo vetor de S e é dada uma base de S, então Y é perpendicular a todo vetor desta base.

---

[26] RESOLUÇÃO: Vamos verificar que as condições 1., 2. e 3. da página 10 (com $S^\perp$ no lugar de S) são satisfeitas:
1. $0 \in S^\perp$ pois $X \cdot 0 = 0$ para todo $X \in S$;
2. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $Y \in S^\perp$, isto é, $X \cdot Y = 0$ para todo $X \in S$. Daí $\lambda Y \in S^\perp$ pois, para todo $X \in S$, temos que

$$\begin{aligned} X \cdot (\lambda Y) &= \lambda (X \cdot Y) \\ &= \lambda \cdot 0 \\ &= 0; \end{aligned}$$

3. Sejam $Y_1, Y_2 \in S^\perp$, isto é, $X \cdot Y_1 = 0 = X \cdot Y_2$ para todo $X \in S$. Daí $Y_1 + Y_2 \in S^\perp$ pois, para todo $X \in S$,

$$\begin{aligned} X \cdot (Y_1 + Y_2) &= X \cdot Y_1 + X \cdot Y_2 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Capítulo 3

O Espaço Vetorial $\mathbb{K}^n$

3.1 Definição e Propriedades do $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$

3.1.1 Pequena Revisão de $\mathbb{C}$, o Corpo dos Números Complexos

1. Define-se o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos por:

   (a) $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = x + yi$ com $x, y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$;[1]

   (b) $z = w$ com $z = x + yi$ e $w = u + vi \Leftrightarrow x = u$ e $y = v$.[2]

2. Sendo $0i = 0$, considera-se $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.[3]

3. Sendo $z = x + yi$ e $w = u + vi$, define-se a adição e a multiplicação em $\mathbb{C}$ por:

   (a) $z + w = (x + u) + (y + v)i$;[4]

   (b) $zw = (xu - yv) + (xv + yu)i$.[5]

4. Tais operações são comutativas e associativas; 0 é o elemento neutro aditivo e 1 é o multiplicativo; A adição é distributiva em relação a multiplicação; $-z = -x - yi$ é o inverso aditivo de z e $z^{-1} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$ é o inverso multiplicativo de $z \neq 0$.[6]

5. $\bar{z} = x - yi$ e $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.[7]

6. Para a potenciação e a radiciação em $\mathbb{C}$, bem como para interpretar geometricamente a adição e a multiplicação complexas, confira um bom livro sobre números complexos.

3.1.2 Corpo $\mathbb{K}$

Vamos generalizar o conceito de escalar e o escopo das coordenadas dos vetores. (Além de $\mathbb{R}$, outros subconjuntos de $\mathbb{C}$ podem ter seus elementos como escalares e coordenadas de vetores.) Assim, dizer que um subconjunto $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ é um *corpo* (*de escalares*) significa que:

---

[1] Por exemplo, $1 + 2i, 3 + 0i, 0 + 4i, -\frac{1}{\sqrt{2}} + (\ln 3)i \in \mathbb{C}$.

[2] Por exemplo, $2 + 3i \neq 3 + 2i$.

[3] Por exemplo, $3 + 0i = 3$.

[4] Por exemplo, $(1 + 2i) + (3 + 4i) = 4 + 6i$.

[5] Por exemplo, $(1 + i)(1 - i) = 2$.

[6] Por exemplo, se $z = 1 + i$, então $-z = -1 + i$ e $z^{-1} = \frac{1-i}{2}$.

[7] Por exemplo, se $z = 1 + i$, então $\bar{z} = 1 - i$, $|z| = \sqrt{2}$ e $z^{-1} = \frac{1-i}{2}$.

1. $0, 1 \in \mathbb{K}$;

2. $k_1, k_2 \in \mathbb{K} \Rightarrow k_1 + k_2, k_1k_2 \in \mathbb{K}$;

3. $k \in \mathbb{K} \Rightarrow -k \in \mathbb{K}$ e, se $k \neq 0$, então $k^{-1} \in \mathbb{K}$.

$\boxed{\text{Exemplos de Corpos:}}$ $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. (Embora existam outros exemplos de corpos $\mathbb{K}$,[8] a partir do próximo capítulo, sem perda de generalidade, podemos considerar apenas $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.)
$\boxed{\text{Contra-Exemplos:}}$ $\mathbb{K} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ não são corpos. De fato, se $k = 2$, por exemplo, então $-k \notin \mathbb{N}$ e $k^{-1} \notin \mathbb{Z}$.

3.1.3 Espaço $\mathbb{K}^n$

As definições de vetor, multiplicação de escalar por vetor e soma de vetores em $\mathbb{R}^n$, bem como as propriedades decorrentes destas, são generalizadas se substituirmos $\mathbb{R}$ por qualquer outro corpo $\mathbb{K}$ e $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{K}^n$.
Assim, seja $X \in \mathbb{K}^n$, isto é, a n-upla ordenada $X = (x_1, \ldots, x_n)$ com $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$.[9] Tal X é dito um *vetor* do $\mathbb{K}^n$ com *coordenadas/componentes* x_1, ..., x_n. A ordem das coordenadas é importante, isto é, se $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, então

$$X = Y \text{ significa } x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n.$$ [10]

Em $\mathbb{K}^n$, o vetor *soma* de $X = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ é definido por

$$X + Y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$ [11]

Em $\mathbb{K}^n$, sendo $\lambda \in \mathbb{K}$ e $X = (x_1, \ldots, x_n)$, o vetor

$$\lambda X := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

é dito um *produto por escalar*.[12]
Assim como para o $\mathbb{R}^n$, valem as seguintes propriedades em $\mathbb{K}^n$:

1. $X + Y = Y + X$;

2. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$;

3. $0 = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{K}^n$ é tal que $X + 0 = X$;

4. $-X = (-1)X$ é tal que $X + (-X) = 0$;

5. $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$;

6. $(\lambda + \beta)X = \lambda X + \beta X$;

[8] Por exemplo, verifique que

$$\mathbb{K} = \left\{x + y\sqrt{2} \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\right\}$$

é um corpo. (Denotamos $\mathbb{K} = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$.)

[9] Por exemplo, $X = (1, i, 1 + i, 1 - i) \in \mathbb{C}^4$.

[10] Por exemplo, em $\mathbb{C}^2$, $(1, i) \neq (i, 1)$.

[11] Por exemplo, se $X = (1, i, 1 + i), Y = (-1, 1, 1 - i) \in \mathbb{C}^3$, então $X + Y = (0, 1 + i, 2) \in \mathbb{C}^3$.

[12] Por exemplo, se $\lambda = \frac{1}{i}$ e $X = (i/2, -1/i) \in \mathbb{C}^2$, então $\lambda X = (1/2, 1) \in \mathbb{C}^2$.

7. $(\lambda\beta)X = \lambda(\beta X)$;

8. $1X = X$.

Em $\mathbb{K}^n$, conceitos e resultados relativos a produto interno, norma, subespaço, base, dimensão, etc, são análogos aqueles válidos para o $\mathbb{R}^n$. Contudo, algumas adaptações são necessárias (como ilustra os exercícios seguintes).

3.2 Exercícios

1. Sejam:

   - $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ um corpo;
   - $X = (x_1, \ldots, x_n)\,, Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$;
   - $X \cdot Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.

   Para quaisquer $X, Y, Z \in \mathbb{K}^n$ e $c \in \mathbb{K}$, é fácil ver que:

   (a) $X \cdot Y = Y \cdot X$;

   (b) $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$;

   (c) $c(X \cdot Y) = (cX) \cdot Y = X \cdot (cY)$;

   (d) se $\mathbb{K}$ contém somente números reais,[13] então:

   - $X \cdot X \geq 0$;
   - $X \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

   Se $\mathbb{K}$ contém algum número complexo com parte imaginária não nula,[14] em geral, a propriedade (d) não é satisfeita.[15] Assim, para $\|X\| = \sqrt{X \cdot X}$ ser bem definido, seja

   $$X \cdot Y := x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}. \qquad (*)$$

   Com $\mathbb{K}^n$ munido do produto interno $(*)$:

   - Verifique que (d) é satisfeita para qualquer corpo $\mathbb{K}$;
   - Como ficam as propriedades (a) e (c)?[16]

2. Considere $\mathbb{C}^3$ munido de $(*)$. Via Gram-Schmidt, obtenha uma base ortonormal a partir da base $\{(i, i, i), (0, i, i), (0, 0, i)\}$.

3. Obtenha uma base ortonormal do subespaço de $\mathbb{C}^3$ gerado por $(1, i, 0)$ e $(1, 2, 1 - i)$.

---

[13] Por exemplo, considere $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

[14] Por exemplo, seja $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

[15] Por exemplo: $\boxed{X = (2i, 1) \Rightarrow X \cdot X = -3 < 0}$; $\boxed{X = (i, 1) \Rightarrow X \cdot X = 0}$.

[16] $\boxed{\text{RESPOSTA:}}$ (a) $X \cdot Y = \overline{Y \cdot X}$; (c) $c(X \cdot Y) = (cX) \cdot Y = X \cdot (\overline{c}Y)$.

Capítulo 4

O Espaço Vetorial $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

4.1 Definição e Propriedades do $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$

$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ representa a *matriz*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

com entradas/elementos em $\mathbb{K}$, isto é,

$$A_{11}, \ldots, A_{1n}, \ldots, A_{m1}, \ldots, A_{mn} \in \mathbb{K}.$$ [1]

Em $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$, temos:

1. Seja A uma matriz $m \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$. Daí:

   (a) A_{ij} representa a entrada da linha i e da coluna j de A (com $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$);[2]

   (b) A_i representa a i-*ésima linha de* A, isto é, o vetor

   $$A_i = (A_{i1}, \ldots, A_{in}) \in \mathbb{K}^n, \quad i = 1, \ldots, m;$$ [3]

   (c) A^j representa *a* j-*ésima coluna de* A, isto é, o vetor

   $$A^j = (A_{1j}, \ldots, A_{mj}) \in \mathbb{K}^m, \quad j = 1, \ldots, n.$$ [4]

2. Em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, dizer que as matrizes A e B são *iguais* ($A = B$) significa que

---

[1] Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ 0 & 1+i & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{C})$.

[2] Por exemplo, em $\mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{C})$, se $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1-i & 0 \\ -1+i & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, então $A_{11} = -A_{12} = A_{22} = A_{33} = 1$, $A_{13} = A_{24} = A_{32} = 0$, $A_{14} = -A_{21} = A_{34} = 2$ e $A_{23} = -A_{31} = 1 - i$.

[3] Por exemplo, para o exemplo anterior, $A_1 = (1, -1, 0, 2)$, $A_2 = (-2, 1, 1 - i, 0)$ e $A_3 = (-1 + i, 0, 1, 2)$ são vetores do $\mathbb{C}^4$.

[4] Por exemplo, para o penúltimo exemplo anterior, $A^1 = (1, -2, -1 + i)$, $A^2 = (-1, 1, 0)$, $A^3 = (0, 1 - i, 1)$ e $A^4 = (2, 0, 2)$ são vetores do $\mathbb{C}^3$.

$$A_{ij} = B_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.^5$$

3. Em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a *soma* das matrizes A e B é definida como a matriz $A + B$ cuja entrada da linha i e da coluna j é dada por

$$(A + B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.^6$$

4. Em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, para $\lambda \in \mathbb{K}$, o *produto por escalar* λA é definido como a matriz cuja entrada da linha i e da coluna j é dada por

$$(\lambda A)_{ij} := \lambda A_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.^7$$

5. Assim como para o $\mathbb{R}^n$ e o $\mathbb{K}^n$, valem as seguintes propriedades em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:
   (a) $A + B = B + A$;
   (b) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
   (c) $0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é tal que $A + 0 = A$;
   (d) $-A = (-1)A$ é tal que $A + (-A) = 0$;
   (e) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
   (f) $(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A$;
   (g) $(\lambda\beta)A = \lambda(\beta A)$;
   (h) $1A = A$.

   EXERCÍCIO: Demonstre tais propriedades.

   Em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, temos conceitos e resultados análogos aos de $\mathbb{K}^n$, tais como subespaço, base, dimensão, etc, como ilustra os exercícios 2 e 10 deste capítulo.

6. Em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, escreve-se $A + (-B) := A - B$.

7. A *transposta* de $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é definida como a matriz $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.^8$$

8. Para matrizes $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, a entrada da linha i e coluna j do *produto* $AB \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ é dada pelo produto interno da i-ésima linha de A, A_i, pela j-ésima coluna de B, B^j, isto é,

[5] Por exemplo, em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,00001 \end{bmatrix}$.

[6] Por exemplo, em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2\sqrt{2} \\ \pi & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \pi & 1,1 \end{bmatrix}$.

[7] Por exemplo, em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $2\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$.

[8] Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ 0 & 1+i & i \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1+i \\ 1-i & i \end{bmatrix}$.

$$(AB)_{ij} = A_i \cdot B^j = A_{i1}B_{1j} + \cdots + A_{in}B_{nj}, \qquad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,p.^9$$

(Note que o produto interno considerado, embora possa resultar num número complexo, é aquele dado na página 8.)

$$\therefore \qquad AB = \begin{bmatrix} A_1\cdot B^1 & A_1\cdot B^2 & \cdots & A_1\cdot B^p \\ A_2\cdot B^1 & A_2\cdot B^2 & \cdots & A_2\cdot B^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_m\cdot B^1 & A_m\cdot B^2 & \cdots & A_m\cdot B^p \end{bmatrix}.$$

9. Em geral, o produto de matrizes não é comutativo.[10]

10. Em sendo possível calcular os produtos de matrizes dados a seguir, as seguintes propriedades são satisfeitas:

    (a) $A(B+C) = AB + AC$;

    (b) $(A+B)C = AC + BC$;

    (c) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ com $\lambda \in \mathbb{K}$;

    (d) $(AB)C = A(BC)$;

    (e) $(AB)^t = B^t A^t$.

    Duas dessas propriedades são trabalhadas nos exercícios 3, 4 e 5 dados a seguir.

[9] Veja exemplos nos exercícios 3 e 4 dados a seguir!

[10] Por exemplo, se A é 2×3 e B é 3×4, AB é 2×4 mas BA nem está definida!

4.2 Exercícios

1. Determine o valor de t para que

$$\begin{bmatrix} t^2-1 & t^2-t \\ t^3-1 & t^2-3t+2 \end{bmatrix}$$

iguale a matriz nula de ordem dois.

2. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

em $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Determine:

(a) a CL $A + 2B - C$;

(b) a CL $\alpha A + \beta B - C$ cuja primeira coluna é nula;[11]

(c) se A e B são LI.[12]

3. Este exercício exemplifica a seguinte propriedade distributiva para matrizes com entradas num corpo $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$:

$$\boxed{(A+B)C = AC + BC \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \text{ e } \forall C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}).}$$

Assim, para $m = p = 2$, $n = 3$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & -i \\ 2i & 2+3i & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1-i & i & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ -i & 2-3i \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

calcule:

(a) $A + B$;

(b) $(A+B)C$;

(c) AC;

(d) BC;

(e) $AC + BC$.

4. Este exercício exemplifica a seguinte propriedade de transposição para matrizes com entradas num corpo $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$:

$$\boxed{(AB)^t = B^t A^t \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \text{ e } \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}).}$$

---

[11] $\boxed{\text{SUGESTÃO:}}$ Obtenha escalares α e β tais que $\alpha A^1 + \beta B^1 - C^1$ seja o vetor nulo.

[12] $\boxed{\text{RESOLUÇÃO:}}$ Suponha que A e B são LD. Daí existe escalar λ tal que $A = \lambda B$. Então, examinando a última entrada da última linha de cada matriz, temos $0 = \lambda \cdot (-1)$, isto é, $\lambda = 0$. Logo $A = 0$! Obviamente, A dada no enunciado deste exercício não é a matriz nula e a suposição inicial sobre a dependência linear das matrizes é, assim, falsa.

Assim, para $m = p = 2$, $n = 3$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & -i \\ 2i & 2+3i & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ -i & 2-3i \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

calcule:

(a) AB;

(b) $(AB)^t$;

(c) B^t;

(d) A^t;

(e) B^tA^t.

5. Demonstre as propriedades enunciadas nos dois exercícios anteriores.
SUGESTÃO: Para as matrizes $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $N \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, a entrada da linha i e coluna j do produto $MN \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ é dada pelo produto interno da i-ésima linha de M (aqui denotada por M_i) pela j-ésima coluna de N (aqui denotada por N^j), isto é,

$$(MN)_{ij} = M_i \cdot N^j.$$

Agora, sendo M uma matriz, a entrada da linha i e coluna j de M^t é tal que $(M^t)_{ij} = M_{ji}$.

6. Demonstre cada afirmação que se segue.

(a) Se a matriz quadrada A possui inversa a direita e inversa a esquerda (isto é, existem matrizes B e C de mesma ordem de A tais que $AB = I = CA$)[13], então $B = C$.
COMENTÁRIO: Denotamos tal $B = C$ por A^{-1}; A é dita *invertível* e A^{-1} é dita a *inversa* de A.

(b) Seja A invertível. Daí:

i. A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

ii. A^t é invertível e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

(c) Sejam A e B invertíveis e de mesma ordem. Daí AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

7. Este exercício exemplifica o anterior. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \text{ isto é, } A^t = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}.$$

Verifique que:

(a) $AB = \begin{bmatrix} 2+3i & 3+i \\ 2-i & 1-2i \end{bmatrix}$ e $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 1-2i & -3-i \\ -2+i & 2+3i \end{bmatrix}$;

(b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix}$, $(A^t)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ -1 & 1+i \end{bmatrix}$;

(c) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

[13] I é a matriz identidade de mesma ordem de A; as entradas da diagonal principal de I são todas iguais a 1 e as outras entradas são nulas.

8. Sendo A_1, A_2, A_3 os vetores-linha e A^1, A^2, A^3 os vetores-coluna de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

   (a) verifique que $A_3 = 2A_2 - A_1$ e $A^3 = 2A^2 - A^1$;
   (b) escreva A^1 e A^2 como combinações lineares de A_1 e A_2;[14]
   (c) escreva A_1 e A_2 como combinações lineares de A^1 e A^2;[15]
   (d) conclua (a partir dos itens anteriores) que os vetores-linha e os vetores-coluna de A geram o mesmo plano (subespaço de dimensão 2) de $\mathbb{R}^3$.[16]

9. Verifique que os vetores-coluna de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

geram um subespaço (de dimensão 2) de $\mathbb{R}^3$ diferente daquele gerado por seus vetores-linha.

10. Seja $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. A dimensão de $\mathcal{M}$ é 4. De fato, uma base de $\mathcal{M}$, dita *canônica*, é composta pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pois toda matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$ é uma CL das matrizes A, B, C e D, isto é,

$$aA + bB + cC + dD = M,$$

e M é a matriz nula apenas quando $a = b = c = d = 0$, confirmando que A, B, C e D são LI.

   (a) Seja $\mathcal{T}_S$ o subconjunto de $\mathcal{M}$ das matrizes triangulares superiores. Verifique que $\mathcal{T}_S$ é um subespaço de dimensão 3 de $\mathcal{M}$, gerado por A, B e D;
   (b) Seja $\mathcal{D}$ o subconjunto de $\mathcal{T}_S$ das matrizes diagonais. Verifique que $\mathcal{D}$ é um subespaço de dimensão 2 de $\mathcal{T}_S$, gerado por A e D;
   (c) Seja $\mathcal{I}$ o subconjunto de $\mathcal{D}$ das matrizes que são multíplos da matriz identidade I. Verifique que $\mathcal{I}$ é um subespaço de dimensão 1 de $\mathcal{D}$, gerado por I;

---

[14] SOLUÇÃO: $A^1 = \frac{11}{3}A_1 - \frac{2}{3}A_2$ e $A^2 = \frac{10}{3}A_1 - \frac{1}{3}A_2$.

[15] SOLUÇÃO: $A_1 = -\frac{1}{3}A^1 + \frac{2}{3}A^2$ e $A_2 = -\frac{10}{3}A^1 + \frac{11}{3}A^2$.

[16] RESOLUÇÃO: Denote por S_l o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores A_1, A_2 e A_3. Denote por S_c o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores A^1, A^2 e A^3. Por um lado, tanto A_1 e A_2 como A^1 e A^2 não são colineares, isto é, tanto A_1 e A_2 como A^1 e A^2 são LI. Daí o item (a) estabelece que $\{A_1, A_2\}$ é uma base de S_l e $\{A^1, A^2\}$ é uma base de S_c. Por outro lado, o item (b) nos diz que, como cada vetor da base de S_c pertence a S_l, qualquer vetor de S_c pertence a S_l, isto é, $S_c \subset S_l$. Analogamente, $S_l \subset S_c$ pelo item (c). Assim, $S_l = S_c$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão dois, isto é, $S_l = S_c$ é um plano em $\mathbb{R}^3$.

(d) Descreva um subespaço de $\mathcal{M}$ que contém A mas não $-\mathsf{D}$.

(e) Se um subespaço de $\mathcal{M}$ contém A e $-\mathsf{D}$, deve conter I?

(f) Uma matriz quadrada é dita simétrica quando iguala a sua transposta. Seja $\mathcal{S}$ o subconjunto de $\mathcal{M}$ das matrizes simétricas. Verifique que $\mathcal{S}$ é um subespaço de dimensão 3 de $\mathcal{M}$, gerado por A, D e $\mathsf{B}+\mathsf{C}$.

Capítulo 5

Escalonamento

5.1 Escalonamento, Sistemas Lineares e Inversas

Note que podemos escrever o sistema linear 3×4

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x & + & \sqrt{2}y & - & \frac{3\sqrt{2}}{2}z & & & = & 2\sqrt{2} \\ 2x & + & 4y & - & 6z & & & = & 8 \\ & & y & - & z & + & w & = & -1 \end{cases}$$

da forma

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Em geral, podemos escrever o sistema linear $m \times n$

$$\begin{cases} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & \cdots & + & A_{1n}x_n & = & b_1 \\ A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & \cdots & + & A_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \cdots & & & & \\ A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & \cdots & + & A_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

da forma

$$AX = B \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Caso $B = 0$, o sistema é dito *homogêneo*. A é dita a *matriz (de coeficientes) do sistema* $AX = B$ e, enquanto que os A_{ij}'s e os b_i's são escalares, X é dito o *vetor(-coluna) de* n *variáveis*. Caso tais variáveis possam ser substituidas por escalares, dizer que o vetor $X = X_0$ daí obtido é uma *solução* de $AX = B$ significa que $AX_0 = B$. Por exemplo, o sistema homogêneo ($AX = 0$) tem (pelo menos) a solução *(nula)* $X_0 = 0$. Agora, via o sistema 3×4 anterior, vamos antecipar o *processo/método de eliminação de Gauss-Jordan* (ou *escalonamento*) pelo qual podemos obter as soluções de sistemas lineares ou garantir a não existência das mesmas. Assim, considere a *matriz aumentada do sistema* $AX = B$ dada por

$$[A|B] = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 & 0 & | & 2\sqrt{2} \\ 2 & 4 & -6 & 0 & | & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}.$$

Via *operações elementares sobre as linhas* de tal matriz,[1] obtemos a (matriz) escalonada reduzida de $[A|B]$ dada por

$$[R|S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & | & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Tal matriz é a matriz aumentada do sistema $RX = S$ dado por

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & - & z & - & 2w & = & 6 \\ & y & - & z & + & w & = & -1 \end{array} \right.,$$

isto é,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & = & z & + & 2w & + & 6 \\ y & = & z & - & w & - & 1 \end{array} \right..$$

Daí, denotando $z = r$ e $w = s$, cada solução de ambos os sistemas, $AX = B$ e $RX = S$, é da forma

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r + 2s + 6 \\ r - s - 1 \\ r \\ s \end{bmatrix} \\ &= r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por exemplo, para $r = -1$ e $s = -2$, temos que $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ satisfaz tanto a $RX = S$ quanto a $AX = B$.

Em cada item seguinte, detalharemos tais procedimentos e resultados.

- Seja A uma matriz com entradas num corpo $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$. Aplicar uma *operação elementar (sobre as linhas)* de A significa obter uma matriz $e(A)$ com as mesmas linhas de A, excetuando-se a linha r e talvez a linha s, satisfazendo apenas um dos seguintes itens:

  1. $[e(A)]_r = cA_r$ com $c \in \mathbb{K}$ não nulo;[2]
  2. $[e(A)]_r = A_r + cA_s$ com $c \in \mathbb{K}$;[3]
  3. $[e(A)]_r = A_s$ e $[e(A)]_s = A_r$.[4]

[1] Tais operações elementares serão apresentadas a seguir!

[2] A linha r de $e(A)$ é o produto do escalar não nulo c pela linha r de A.

[3] A linha r de $e(A)$ é a soma da linha r de A com c vezes a linha s de A.

[4] As linhas r e s de $e(A)$ são, respectivamente, as linhas s e r de A.

(A menos dos casos anômalos ($c = 1$ para 1. e $c = 0$ para 2.), $e(A) \neq A$.)
No lugar de A, podemos aplicar tais operações elementares numa matriz aumentada $\mathbf{A} := [A|B]$. Assim, considere o exemplo anterior. Daí:

$$\mathbf{A} = [A|B] = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 & 0 & | & 2\sqrt{2} \\ 2 & 4 & -6 & 0 & | & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\xrightarrow{\quad}}_{[e(\mathbf{A})]_1 = \sqrt{2}\mathbf{A}_1}$$

$$\mathbf{A}' := e(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & | & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 0 & | & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\xrightarrow{\quad}}_{[e(\mathbf{A}')]_2 = \mathbf{A}'_2 - 2\mathbf{A}'_1}$$

$$\mathbf{A}'' := e(\mathbf{A}') = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\xrightarrow{\quad}}_{[e(\mathbf{A}'')]_2 = \mathbf{A}''_3,\, [e(\mathbf{A}'')]_3 = \mathbf{A}''_2}$$

$$\mathbf{A}''' := e(\mathbf{A}'') = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\xrightarrow{\quad}}_{[e(\mathbf{A}''')]_1 = \mathbf{A}'''_1 - 2\mathbf{A}'''_2}$$

$$\mathbf{A}'''' := e(\mathbf{A}''') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & | & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} = [R|S]\,.$$

$\boxed{\text{Observação:}}$ Por abuso de notação, para qualquer sistema linear, $\mathbf{A} = [A|0] = A$ é a matriz aumentada do sistema $AX = 0$, dito *sistema homogêneo associado a* $AX = B$.
Por exemplo, modificando os segundos membros das equações do sistema 3×4 anterior para 0, temos

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \frac{\sqrt{2}}{2}x & + & \sqrt{2}y & - & \frac{3\sqrt{2}}{2}z & & & = & 0 \\ 2x & + & 4y & - & 6z & & & = & 0 \\ & & y & - & z & + & w & = & 0 \end{array} \right.$$

Assim, repetindo o processo anterior, as últimas colunas das matrizes aumentadas não mudam: todas são nulas! Daí escrevemos simplesmente

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\xrightarrow{\quad}}_{[e(A)]_1 = \sqrt{2}A_1}$$

$$A' := e(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\xrightarrow{\quad}}_{[e(A')]_2 = A'_2 - 2A'_1}$$

$$A'' := e(A') = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\xrightarrow{\quad}}_{[e(A'')]_2 = A''_3,\, [e(A'')]_3 = A''_2}$$

$$A''' := e(A'') = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\xrightarrow{\quad}}_{[e(A''')]_1 = A'''_1 - 2A'''_2}$$

$$A'''' := e(A''') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

Tal R é a matriz aumentada do sistema $RX = 0$ dado por

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & - & z & - & 2w & = & 0 \\ & y & - & z & + & w & = & 0 \end{array}\right. ,$$

isto é,

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & z & + & 2w \\ y & = & z & - & w \end{array}\right. .$$

Daí, denotando $z = r$ e $w = s$, cada solução de ambos os sistemas, $AX = 0$ e $RX = 0$, é da forma

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r+2s \\ r-s \\ r \\ s \end{bmatrix} \\ &= r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

- Denote a solução geral de $AX = B$ por X_{NH} e a solução geral do seu sistema homogêneo associado $AX = 0$ por X_{H}. Denote uma solução particular de $AX = B$ por X_{P}. Daí

$$X_{\mathrm{NH}} = X_{\mathrm{H}} + X_{\mathrm{P}}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} AX_{\mathrm{NH}} &= A\left(X_{\mathrm{H}} + X_{\mathrm{P}}\right) \\ &= AX_{\mathrm{H}} + AX_{\mathrm{P}} \\ &= 0 + B \\ &= B. \end{aligned}$$

Assim, para o exemplo 3×4 anterior, sendo r e s escalares reais quaisquer, temos que

$$\begin{aligned} X_{\mathrm{NH}} &= \begin{bmatrix} r+2s+6 \\ r-s-1 \\ r \\ s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r+2s \\ r-s \\ r \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= X_{\mathrm{H}} + X_{\mathrm{P}}. \end{aligned}$$

- Duas matrizes, digamos A e A', são *equivalentes (por linhas)* quando uma delas pode ser obtida da outra, digamos A' obtida de A, via a aplicação de uma sequência finita de operações elementares a partir desta outra.
  Por exemplo, para o sistema não homogêneo 3×4 anterior, as matrizes aumentadas $\mathbf{A} = [A|B]$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$, $\mathbf{A}'''$ e $\mathbf{A}'''' = [R|S]$ são equivalentes entre si; para o sistema homogêneo 3×4 anterior, as matrizes A, A', A'', A''' e $A'''' = R$ são equivalentes entre si.

- Uma matriz R é *escalonada reduzida* quando as condições seguintes são satisfeitas:

  - A primeira entrada não-nula de cada linha não-nula de R, dita um *pivô*, é 1;
  - A partir da segunda linha de R, o pivô de uma linha (não-nula) está mais a direita em relação ao pivô da linha anterior;
  - Uma coluna de R que contenha um pivô tem as outras entradas nulas;
  - Possíveis linhas nulas de R estão abaixo das não-nulas.

  Por exemplo, para as matrizes obtidas no exemplo do sistema homogêneo 3×4 anterior, R é escalonada reduzida enquanto que A, A', A'' e A''' não são.
  Outro exemplo de uma escalonada reduzida é

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 8 & 9 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Para uma matriz A, existe uma única escalonada reduzida R equivalente a A. Neste caso, os sistemas homogêneos $AX = 0$ e $RX = 0$ têm as mesmas soluções.[5]

- $AX = B$ não ter solução significa $[A|B]$ ser equivalente (por linhas) a uma matriz que tem alguma linha da forma $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & | & c \end{bmatrix}$ com $c \neq 0$. Tal linha representa a equação $0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = c \neq 0$, isto é, $0 \neq 0$!
  Por exemplo, o sistema $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ - & x & - & y & - & z & = & -2 \\ & & - & y & + & 2z & = & -2 \end{array} \right.$ não tem solução pois

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ -1 & -1 & -1 & | & -2 \\ 0 & -1 & 2 & | & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 \\ 0 & -1 & 2 & | & -2 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix},$$

  cuja terceira linha, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$, representa $0 = -1$!

Agora vamos conhecer as matrizes *elementares*. Tais matrizes possibilitam interpretar o processo de escalonamento como um produto das mesmas; além disso, podemos calcular a inversa de qualquer matriz (invertível) como produto de matrizes elementares. Assim, considere os seguintes itens:

[5] Por exemplo, veja o sistema homogêneo 3×4 anterior!

- Sendo I uma matriz identidade, a matriz

$$\mathsf{E} = e(\mathrm{I})$$

(obtida via a aplicação de uma operação elementar sobre I) é dita *elementar*.

$\boxed{\text{EXERCÍCIO:}}$ Apresente todas as matrizes elementares 2×2.

- Aplicar uma operação elementar em $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é equivalente a aplicar a mesma operação elementar em $\mathrm{I} \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ e multiplicar a matriz elementar $e(\mathrm{I})$ obtida a esquerda de A. Simbolicamente:

$$\boxed{A \to e(A) = e(\mathrm{I})A}.$$

$\boxed{\text{EXEMPLO:}}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que aplicamos a mesma operação elementar em $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$[e(A)]_1 = A_1 - A_2 \quad \text{e} \quad [e(\mathrm{I})]_1 = \mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2,$$

isto é, em ambas as matrizes, no lugar da primeira linha, colocamos a primeira linha menos a segunda.

- Toda matriz elementar é invertível.

$\boxed{\text{EXERCÍCIO:}}$ Verifique a invertibilidade de todas matrizes elementares 2×2.

- Como o produto de matrizes invertíveis (de mesma ordem) é invertível, então o produto de matrizes elementares (de mesma ordem) é invertível.

- R é a escalonada reduzida equivalente a A se, e somente se,

$$R = E_k \cdots E_2 E_1 A$$

com E_1, E_2, $\ldots$, E_k elementares. Neste caso, se A é quadrada e $R = \mathrm{I}$, A é invertível com

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1.$$

$\boxed{\text{EXEMPLO:}}$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = A \to \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = E_1 A \\
\to \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = E_2 E_1 A \\
\to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3 E_2 E_1 A = \mathrm{I};
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_3E_2E_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A^{-1}.
\end{aligned}
$$

Temos então o seguinte método para obter A^{-1}, caso A seja invertível, ou afirmar que A^{-1} não existe, caso A não seja invertível:

- A partir de $[A|I]$, após uma sequência de k operações elementares, obtenha $[R|A']$;[6]
- Considere R. Daí:
  - $R = I \Leftrightarrow A' = A^{-1}$;
  - $R \neq I \Leftrightarrow A^{-1}$ não existe.

$\boxed{\text{Exercício:}}$ Usando o método anterior, responda qual/quais das seguintes matrizes

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}
$$

têm inversa(s) e apresente a(s) inversa(s).

[6]Temos o seguinte:

$$
[A|I] \to [E_1A|E_1I] \to [E_2E_1A|E_2E_1] \to \cdots \to [E_k\cdots E_2E_1A|E_k\cdots E_2E_1] = [R|A'].
$$

5.2 Exercícios

1. Considere o sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = a; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b; \\ 5x_2 - x_3 = c. \end{cases}$

   (a) Para que valores de a, b e c tal sistema tem solução?

   (b) Determine todas as soluções do sistema.

   $\boxed{\text{Resolução:}}$
   Escalonando a matriz aumentada do sistema, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 5 & -1 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & 5 & -1 & b-2a \\ 0 & 5 & -1 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & 5 & -1 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 2a-b+c \end{array}\right].$$

   Logo, o sistema tem solução se, e somente se, $2a - b + c = 0$. Assim, continuando a escalonar a última matriz com a última linha nula, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & 5 & -1 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{b-2a}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{a+2b}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{b-2a}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

   Daí, para $x_3 = t$ arbitrário, a solução do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3t+a+2b}{5} \\ \frac{t+b-2a}{5} \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a+2b}{5} \\ \frac{b-2a}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

   com a, b e c constantes tais que $2a - b + c = 0$.

2. Para que valores de b_1, b_2 e b_3 o sistema linear com matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_2 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & b_3 \end{array}\right]$$

   tem solução.[7] Daí, obtenha a solução de tal sistema.

[7] $\boxed{\text{Resposta:}}$ $b_1 + b_2 = b_3$.

3. Para quais três números a, o processo de Gauss-Jordan aplicado a

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

falha, isto é, A não é invertível?[8]

4. Para quais três números c,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & c & c \\ c & c & c \\ 8 & 7 & c \end{bmatrix}$$

não é invertível (e por que)?

5. Prove que

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

é invertível se $a \neq 0$ e $a \neq b$.[9]

6. Se R é a escalonada reduzida equivalente por linhas a

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

obtenha matrizes elementares E_1, E_2, $\ldots$, E_k tais que $E_k \cdots E_2 E_1 A = R$.
Idem para $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -i \\ -1 & 3 & i \\ -i & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Tal A é invertível?

7. Para o vetor-coluna $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, considere $X' := (x_1, \ldots, x_n)$. A partir daí, demonstre que o conjunto

$$S = \left\{ X' \,\middle|\, AX = 0 \right\}$$

das soluções de um sistema homogêneo $AX = 0$ (qualquer) é um subespaço do $\mathbb{R}^n$.

8. Que relação existe entre o exercício anterior e o exercício 5 da página 11?

---

[8] $\boxed{\text{RESPOSTA:}}$ $a = 2$ (colunas iguais); $a = 4$ (linhas iguais); $a = 0$ (coluna/linha nula).

[9] $\boxed{\text{SUGESTÃO:}}$ Via Gauss-Jordan, obtenha

$$A^{-1} = \frac{1}{a(a-b)} \begin{bmatrix} a & 0 & -b \\ -a & a & 0 \\ 0 & -a & a \end{bmatrix}.$$

Capítulo 6

Operadores, Autovalores e Autovetores

6.1 Funções Lineares

Queremos estudar funções L definidas em $\mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^m$ que generalizam a função (real de uma variável real) linear $f(x) = ax$ com coeficiente angular a. Para tal função, temos $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para quaisquer reais x, y e α. Esta propriedade serve para definir L.

Na maior parte desse capítulo, por abuso de notação, o vetor $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é representado como o vetor-coluna n-dimensional $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Os itens seguintes fazem o estudo das funções lineares e de algumas de suas consequências.

- Seja $L_A(X) := AX$ o produto das matrizes reais A e X de tamanhos $m \times n$ e $n \times 1$, respectivamente.

  $\boxed{\text{Afirmação 1:}}$ $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função linear (isto é, $L(X+Y) = L(X) + L(Y)$ e $L(\alpha X) = \alpha L(X)$ para quaisquer $X, Y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$) se, e somente se, existe A tal que $L = L_A$.

  $\boxed{\text{Demonstração:}}$ Por um lado, $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é claramente linear (isto é, $L_A(X+Y) = L_A(X) + L_A(Y)$ e $L_A(\alpha X) = \alpha L_A(X)$ para quaisquer $X, Y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$). Por outro lado, sendo A^j a j-ésima coluna de uma matriz A qualquer,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

  e

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

temos que

$$\begin{aligned}
L_A(X) &= AX \\
&= \begin{bmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n \end{bmatrix} \\
&= x_1 \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \vdots \\ A_{mn} \end{bmatrix} \\
&= x_1 A^1 + x_2 A^2 + \cdots + x_n A^n.
\end{aligned}$$

Agora, seja E^j a matriz $n \times 1$ que representa o j-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$, isto é, E^j é a j-ésima coluna da matriz identidade $n \times n$; seja A^j a imagem de E^j pela função L, isto é,

$$L(E^j) := A^j.$$

Daí, via a linearidade de L, segue que

$$\begin{aligned}
L(X) &= L(x_1E^1 + x_2E^2 + \cdots + x_nE^n) \\
&= x_1L(E^1) + x_2L(E^2) + \cdots + x_nL(E^n) \\
&= x_1A^1 + x_2A^2 + \cdots + x_nA^n \\
&= AX \\
&= L_A(X).
\end{aligned}$$

Assim, além de ter concluído a demonstração da AFIRMAÇÃO 1, acabamos de estabelecer que, calculando-se $L(E^j)$, obtemos cada coluna A^j de A tal que $L = L_A$. Tal A é dita a *matriz que representa* L *(nas bases canônicas).*

EXERCÍCIO: Verificar a linearidade das funções definidas por:

1. $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad \forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$;
2. (ROTAÇÃO DE ÂNGULO θ EM TORNO DA ORIGEM)
$R_\theta(x_1, x_2) = (x_1 \cos\theta - x_2 \operatorname{sen}\theta, x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
3. (SEMELHANÇA DE RAZÃO $k \in \mathbb{R} - \{0\}$)
$S_k(X) = kX \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$;
4. (REFLEXÕES EM TORNO DOS EIXOS x E y)
$R_x(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ e $R_y(x_1, x_2) = (-x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
5. (PROJEÇÕES ORTOGONAIS SOBRE OS EIXOS x E y)
$P_x(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ e $P_y(x_1, x_2) = (0, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
6. (PROJEÇÃO ORTOGONAL SOBRE O SUBESPAÇO S DE $\mathbb{R}^n$ COM BASE ORTONORMAL $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$)

$$P_S(X) = (X \cdot A_1)A_1 + \cdots + (X \cdot A_r)A_r \quad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$[1]

- $\boxed{\text{AFIRMAÇÃO 2:}}$ Sejam A e B as matrizes que representam as funções lineares $L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $L_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, respectivamente, isto é, $L_1 = L_A$ e $L_2 = L_B$. Daí

$$L_2 \circ L_1 = L_{BA},$$

isto é, BA é a matriz que representa a função (linear) composta $L_2 \circ L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. De fato,

$$\begin{aligned}(L_2 \circ L_1)(X) &= L_2(L_1(X)) \\ &= L_2(L_A(X)) \\ &= L_2(AX) \\ &= BAX \\ &= L_{BA}(X).\end{aligned}$$

$\boxed{\text{EXERCÍCIO:}}$

- Considerando $n = p = 2$, $m = 3$, $X = (x_1, x_2) \mapsto L_1(X) = (x_2, x_1, x_1 + x_2)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3) \mapsto L_2(Y) = (y_1 + y_2, y_2 + y_3)$, determine A e B.
- Sem usar a AFIRMAÇÃO 2, obtenha a matriz C que representa $L_2 \circ L_1$, sendo $X = (x_1, x_2) \mapsto L_2(L_1(X))$, e verifique que, de fato, $C = BA$.
- Considerando rotações no plano, é fácil ver (geometricamente) que

$$R_{\theta_1+\theta_2} = R_{\theta_2} \circ R_{\theta_1}.$$

(De fato, considere a Figura 6.1.) Por outro lado, sendo as matrizes que representam

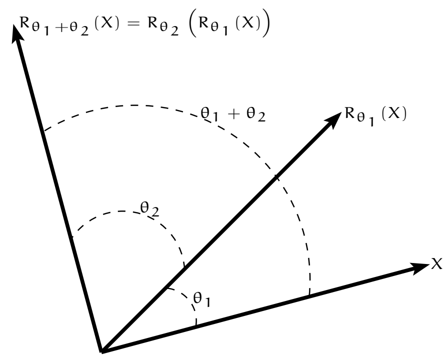

Figura 6.1: $R_{\theta_1+\theta_2} = R_{\theta_2} \circ R_{\theta_1}$.

R_{θ_1}, R_{θ_2} e $R_{\theta_1+\theta_2}$ dadas, respectivamente, por

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix},$$

[1]Note que, se $X' := P_S(X)$ e $X'' := X - X'$, então $X'' \in S^\perp$ pois

$$\begin{aligned}X'' \cdot X' &= [X - (X \cdot A_1)A_1 - \cdots - (X \cdot A_r)A_r] \cdot [(X \cdot A_1)A_1 + \cdots + (X \cdot A_r)A_r] \\ &= (X \cdot A_1)^2 + \cdots + (X \cdot A_r)^2 - (X \cdot A_1)^2 - \cdots - (X \cdot A_r)^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Assim, como $X = X' + X'' \in \mathbb{R}^n$ com $X' \in S$ e $X'' \in S^\perp$, o nome PROJEÇÃO ORTOGONAL se justifica!

desconsiderando a demonstração anterior, verifique a validade da AFIRMAÇÃO 2, para este exemplo, mostrando que $C = BA$.

- NÚCLEO E IMAGEM:
Considere a função linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e a matriz A, $m \times n$, que a representa (nas bases canônicas). O *Núcleo* e a *Imagem* de A (ou L) são, respectivamente, os seguintes conjuntos:

(i) $N = \{X \in \mathbb{R}^n \,|\, L(X) = 0\}$, o conjunto de todo vetor do domínio cuja imagem é o vetor nulo do contra-domínio;

(ii) $\mathrm{Im}\, L = \{Y \in \mathbb{R}^m \,|\, \text{existe } X \in \mathbb{R}^n \text{ com } Y = L(X)\}$, o conjunto de cada vetor do contra-domínio que é imagem de algum vetor do domínio.

AFIRMAÇÃO 3: N é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e $\mathrm{Im}\, L$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$.

DEMONSTRAÇÃO: Em primeiro lugar, note que, como $L(0) = A0 = 0$, tanto N quanto $\mathrm{Im}\, L$ são não vazios. Agora, para **(i)**, note que

$$N = \{X \in \mathbb{R}^n \,|\, AX = 0\}$$

é o subespaço das soluções do sistema homogêneo $AX = 0$. Para **(ii)**, note que

$$\mathrm{Im}\, L = \{Y \in \mathbb{R}^m \,|\, \text{existe } X \in \mathbb{R}^n \text{ com } Y = AX\}$$

é o *Subespaço Gerado pelas Colunas* de A. De fato, como vimos na demonstração da AFIRMAÇÃO 1, se

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

então

$$Y = AX = x_1 A^1 + x_2 A^2 + \cdots + x_n A^n,$$

sendo A^j a j-ésima coluna de A, $j = 1, 2, \ldots, n$.

EXEMPLO: Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Note que, $x_4 = t$ acarreta

$$N \ni X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Note ainda que

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

é uma base de N. Daí $\dim N = 1$.

(ii) Note que

$$\operatorname{Im} L \ni Y = AX = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note ainda que, como

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

uma base de $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^3$ é a canônica e $\dim \operatorname{Im} L = 3$.

AFIRMAÇÃO 4: As dimensões de N e $\operatorname{Im} L$ são chamadas, respectivamente, de *nulidade* e *posto* de A (ou L). Demonstra-se que

$$\text{nulidade} + \text{posto} = n.$$

Por exemplo, no exemplo anterior, temos que

$$\text{nulidade} + \text{posto} = 1 + 3 = 4 = n.$$

MÉTODO PRÁTICO PARA DETERMINAR N E $\operatorname{Im} L$:
Já sabemos como determinar uma base de N: Basta obter R, a matriz escalonada reduzida de A. (De fato, X é solução de $AX = 0$ se, e somente se, é solução de $RX = 0$.)[2] Agora, para determinar uma base de $\operatorname{Im} L$, podemos seguir os dois passos seguintes:

(P1) Determinamos que colunas de R contêm os seus pivôs. Digamos, as colunas $R^{j_1}, \ldots, R^{j_k}$ contêm os pivôs de R;

(P2) Para obter uma base de $\operatorname{Im} L$, basta coletar as *Colunas Pivôs* $A^{j_1}, \ldots, A^{j_k}$ de A.[3]

EXEMPLO: Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, primeiramente, escalonamos A, isto é,

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

[2] A nulidade de A é o número de vetores de uma base do espaço solução de $AX = 0$.

[3] O posto de A é o número de colunas pivôs de A.

Daí, como R^1 e R^2 são as colunas pivôs de R, segue que as colunas pivôs de A, isto é, $\{A^1, A^2\}$, formam uma base de $\operatorname{Im} L$. A razão disso é simples: Por um lado, note que as outras colunas de R são combinações lineares de R^1 e R^2, isto é,

$$R^3 = 3R^1 + R^2, \quad R^4 = -R^1 + 0R^2 \quad \text{e} \quad R^5 = 2R^1 + R^2.$$

Agora, por outro lado, note que as outras colunas de A reproduzem tais combinações lineares, só que agora, em relação as colunas A^1 e A^2. De fato,

$$A^3 = 3A^1 + A^2, \quad A^4 = -A^1 + 0A^2 \quad \text{e} \quad A^5 = 2A^1 + A^2.$$

Então, $\{A^1, A^2\}$ é base pois gera $\operatorname{Im} L$ e é LI.
Vamos obter agora uma base para N: Como $RX = 0$ representa o sistema

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ \quad\quad x_2 + x_3 \quad\quad + x_5 = 0, \end{cases}$$

se $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ e $x_5 = \gamma$ são números reais quaisquer, então

$$\begin{aligned} N \ni X = &\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \\ = &\alpha \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, uma base para N é dada por

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Note ainda que

$$\text{nulidade} + \text{posto} = 3 + 2 = 5 = n.$$

$\boxed{\text{EXERCÍCIO:}}$ Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 5 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

- Determine a matriz escalonada reduzida R obtida de A. Que colunas de R não contêm pivôs? Escreva cada uma destas colunas como uma combinação linear das colunas pivôs de R.
- Que colunas de A correspondem as colunas pivôs de R, isto é, quais são as colunas pivôs de A? Estas colunas formam uma base para o espaço gerado pelas colunas de A. Escreva cada uma das colunas restantes de A como combinação linear das colunas de tal base.

– Qual a dimensão do núcleo de A, isto é, qual a nulidade de A?

$\boxed{\text{Exercício:}}$ Para quais números c e d a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & d & 2 \end{bmatrix}$ tem posto 2 e porque?

- $\boxed{\text{Bases de Subespaços:}}$
Como obter uma base de um subespaço do $\mathbb{R}^n$ gerado por m vetores? Por exemplo, dados 4 vetores em $\mathbb{R}^6$, como determinar uma base para o subespaço gerado por tais vetores? Vamos estabelecer dois modos de responder tal questão. O primeiro deles é uma aplicação do item anterior.
Primeiro Modo: Considere a matriz 6×4, A, cujas colunas são os quatro vetores dados. Determine as colunas pivôs de A;
Segundo Modo: Considere a matriz 4×6, A, cujas linhas são os quatro vetores dados. Determine as linhas não nulas da escalonada reduzida, R, de A.[4]

$\boxed{\text{Exercício:}}$ Utilizando os dois modos anteriores, determine duas bases para o subespaço do $\mathbb{R}^6$ gerado por $(1, 2, -1, 0, 1, -1)$, $(-1, 1, 0, -2, -1, 2)$, $(0, 3, -1, -2, 0, 1)$ e $(2, 1, -1, 2, 2, -3)$.

- $\boxed{\text{Representação de L em outras Bases:}}$
Além da matriz A que representa a função linear $L = L_A$ nas bases canônicas, L pode ser representada por outras matrizes $m \times n$ em outras bases. De fato, sejam $B = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e $B' = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Define-se a matriz $[L]_{B'}^{B}$, que representa L nas bases B e B' por:

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \text{ se } L(X_j) = L_{1j}Y_1 + L_{2j}Y_2 + \cdots + L_{mj}Y_m, \text{ então}$$

$$L^j = \begin{bmatrix} L_{1j} \\ L_{2j} \\ \vdots \\ L_{mj} \end{bmatrix}$$

representa a j-ésima coluna de $[L]_{B'}^{B}$. (Caso $n = m$ e $B' = B$, $[L]_{B'}^{B}$ é denotada simplesmente por $[L]_B$.)

$\boxed{\text{Exercício:}}$ Se $m = n = 2$, B é a base canônica, $B' = \{Y_1 = (1, 1), Y_2 = (1, -1)\}$ e $L(X) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ para cada $X = (x_1, x_2)$, determine $[L]_{B'}^{B}$, $[L]_{B}^{B'}$, $[L]_B$ e $[L]_{B'}$.
$\boxed{\text{Solução:}}$ Como

$$\begin{cases} L(X_1) &= (1, 1) &= 1 \cdot Y_1 + 0 \cdot Y_2, \\ L(X_2) &= (-1, 1) &= 0 \cdot Y_1 - 1 \cdot Y_2, \end{cases}$$

temos que

$$[L]_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

[4] De fato, por um lado, as linhas não nulas de R contêm os pivôs. Daí nenhuma delas é combinação linear das demais. Por outro lado, as linhas de R e A geram o mesmo espaço.(Por que?)

Devido a

$$\begin{cases} L(Y_1) = (0,2) = 0 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2, \\ L(Y_2) = (2,0) = 2 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2, \end{cases}$$

segue que

$$[L]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\begin{cases} L(X_1) = (1,1) = 1 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2, \\ L(X_2) = (-1,1) = -1 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2, \end{cases}$$

segue que

$$A = [L]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Devido a

$$\begin{cases} L(Y_1) = (0,2) = 1 \cdot Y_1 - 1 \cdot Y_2, \\ L(Y_2) = (2,0) = 1 \cdot Y_1 + 1 \cdot Y_2, \end{cases}$$

temos que

$$A' = [L]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- $\boxed{\text{POR QUE } [L]_{B'}^{B} \text{ REPRESENTA } L?}$
Pode ser demonstrado que $X \mapsto L(X)$ pode ser representada por

$$[X]_B \mapsto [L(X)]_{B'} = [L]_{B'}^{B} [X]_B,$$

onde $[X]_B$ e $[L(X)]_{B'}$ são matrizes $n \times 1$ e $m \times 1$, respectivamente, que representam os vetores X e $L(X)$ nas respectivas bases.

$\boxed{\text{EXERCÍCIO:}}$ Com as mesmas hipóteses do exercício anterior, verifique a validade de $[L(X)]_{B'} = [L]_{B'}^{B} [X]_B$ para $X = (1,2)$.

$\boxed{\text{SOLUÇÃO:}}$ Por um lado, $L(X) = (-1,3) = 1 \cdot Y_1 - 2Y_2$ implica que $[L(X)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Por outro lado, temos que $[L]_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $[X]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{EXERCÍCIO:}}$ Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linear tal que

$$[L]_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

com $B = \{(0,1),(1,-1)\}$ e $B' = \{(1,2,3),(1,0,-1),(0,0,2)\}$. Se $X = (-1,2)$ na base canônica, obtenha as coordenadas de $L(X)$ na base B', isto é, determine $[L(X)]_{B'}$.

- $\boxed{\text{COMO } A = [L]_B \text{ E } A' = [L]_{B'} \text{ ESTÃO RELACIONADAS ?}}$
Primeiramente, note que existe uma única função linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \overset{T}{\mapsto} & Y_1; \\ X_2 & \overset{T}{\mapsto} & Y_2; \\ & \vdots & \\ X_n & \overset{T}{\mapsto} & Y_n. \end{array}$$

De fato, é fácil ver que tal T é linear; quanto a unicidade, seja $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função linear tal que $X_j \overset{S}{\mapsto} Y_j$ para cada índice $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Daí $S(X_j) = T(X_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Então, para todo $X \in \mathbb{R}^n$, pela linearidade de S e T, temos que

$$\begin{aligned} S(X) &= S\left(x_1X_1 + x_2X_2 + \cdots + x_nX_n\right) \\ &= x_1S\left(X_1\right) + x_2S\left(X_2\right) + \cdots + x_nS\left(X_n\right) \\ &= x_1T\left(X_1\right) + x_2T\left(X_2\right) + \cdots + x_nT\left(X_n\right) \\ &= T\left(x_1X_1 + x_2X_2 + \cdots + x_nX_n\right) \\ &= T(X), \end{aligned}$$

sendo os x_j's as coordenadas de X na base B.

$\boxed{\text{NOTAÇÃO:}}$ $P = [T]_B$.

Note que T é invertível, isto é, bijetora, com inversa T^{-1} dada por

$$T^{-1}\left(Y_i\right) = X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Pode ser demonstrado que:

- $P^{-1} = \left[T^{-1}\right]_{B'}$;
- $A' = P^{-1}AP$.

Neste caso, dizemos que as duas matrizes A e A' (que representam a função linear L) são *semelhantes*.

$\boxed{\text{EXERCÍCIO:}}$ Com as mesmas hipóteses dos dois exercícios anteriores, verifique a validade de $A' = P^{-1}AP$.

$\boxed{\text{EXERCÍCIO:}}$ Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear tal que

$$A = [L]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com $B = \{X_1 = (1, 1, 1), X_2 = (1, 0, 2), X_3 = (0, 1, 0)\}$. Determine $A' = [L]_{B'}$ com $B' = \{Y_1 = (1, 0, 0), Y_2 = (0, 1, 0), Y_3 = (0, 0, 1)\}$.

$\boxed{\text{SOLUÇÃO:}}$ Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função linear tal que

$$\begin{aligned} X_1 &\overset{T}{\mapsto} Y_1; \\ X_2 &\overset{T}{\mapsto} Y_2; \\ X_3 &\overset{T}{\mapsto} Y_3. \end{aligned}$$

Daí $A' = P^{-1}AP$ com $P = [T]_B$. Para obter P considere

$$(\bullet) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 \overset{T}{\mapsto} T_{11}X_1 + T_{21}X_2 + T_{31}X_3 = Y_1; \\ X_2 \overset{T}{\mapsto} T_{12}X_1 + T_{22}X_2 + T_{32}X_3 = Y_2; \\ X_2 \overset{T}{\mapsto} T_{13}X_1 + T_{23}X_2 + T_{33}X_3 = Y_3. \end{array} \right.$$

Daí

$$P = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

e devemos determinar todos tais T_{ij}'s. Assim, sendo $M = \begin{bmatrix} X^1 & X^2 & X^3 \end{bmatrix}$ a matriz de cada um dos três sistemas de ($\bullet$) e resolvendo por escalonamento, simultaneamente, cada um destes sistemas, obtemos

$$\begin{aligned} [M|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] &\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ &\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ &\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] = [I|P]\,. \end{aligned}$$

Note ainda que, concomitantemente, determinamos $P^{-1} = M$. Agora, para obter A', basta proceder a multiplicação $P^{-1}AP$:

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- $\boxed{\text{AUTOVALORES E AUTOVETORES:}}$

Considere, a partir de agora, uma função linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e a matriz A, $n \times n$, que a representa (na base canônica). O escalar λ ser um *autovalor* de A (ou L) significa existir um vetor não-nulo X tal que

$$L(X) = AX = \lambda X.$$

Neste caso, X é dito um *autovetor* de A (ou L) associado a λ.[5]
Sendo I a matriz identidade $n \times n$, note que a condição $AX = \lambda X$ pode ser reescrita como

$$(A - \lambda I)\, X = 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\Leftrightarrow AX - \lambda X = 0 \\ &\Leftrightarrow AX - \lambda IX = 0 \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I)\, X = 0. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{CALCULANDO AUTOVALORES:}}$

Para que $(A - \lambda I)\, X = 0$ admita solução X não-nula, $A - \lambda I$ não pode ser invertível pois, caso contrário, isto é, em existindo $(A - \lambda I)^{-1}$, temos que

$$X = IX = (A - \lambda I)^{-1} (A - \lambda I)\, X = (A - \lambda I)^{-1}\, 0 = 0.$$

[5]Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, então $\lambda_1 = 3$ é autovalor de A associado a $X_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ pois $AX_1 = \begin{bmatrix} -12 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda_1 X_1$. Analogamente, $\lambda_2 = -2$ é autovalor de A associado a $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pois $AX_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \lambda_2 X_2$.

Como uma matriz quadrada não é invertível se, e somente se, o determinante desta matriz é nulo, segue que, os autovalores de A são as raízes do seu *polinômio característico*, definido como

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda I).$$

EXEMPLO: Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

CÁLCULO DO(S) AUTOVALOR(ES):

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-1-\lambda) - (-4)(-1) \\ &= \lambda^2 - \lambda - 6 \\ &= (\lambda - 3)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Assim $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$ são os autovalores de A.

CALCULANDO AUTOVETORES:

Após ter determinado λ, para calcular algum autovetor de A (associado a tal λ), temos que obter alguma solução não-nula $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ do sistema $(A - \lambda I)X = 0$. O conjunto solução de tal sistema, denotado por S_λ, é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ dito *subespaço característico de* A *(ou* L*) associado a* λ.

EXEMPLO: Considere o exemplo anterior. Seja $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Assim:

– CÁLCULO DOS AUTOVETORES X ASSOCIADOS A $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{aligned} (A - 3I)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow x_1 + 4x_2 = 0. \end{aligned}$$

Assim, $x_2 = t$ e $x_1 = -4x_2 = -4t$ determinam os autovetores

$$X = t \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Note que $\left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base para S_{λ_1}.

– CÁLCULO DOS AUTOVETORES X ASSOCIADOS A $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{aligned} (A + 2I)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0. \end{aligned}$$

Assim, $x_1 = x_2 = t$ determina os autovetores

$$X = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Note que $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para S_{λ_2}.

$\boxed{\text{EXEMPLO:}}$ Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$.

<u>CÁLCULO DO(S) AUTOVALOR(ES):</u>

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\begin{bmatrix} 5-\lambda & 8 & 16 \\ 4 & 1-\lambda & 8 \\ -4 & -4 & -11-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda+3)^2. \end{aligned}$$

Daí $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$ são autovalores de A com multiplicidades 1 e 2, respectivamente.
Seja agora $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Assim:

– <u>CÁLCULO DOS AUTOVETORES X ASSOCIADOS A $\lambda_1 = 1$:</u>

$$\begin{aligned} (A - I)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 4 & 0 & 8 \\ -4 & -4 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow x_1 + 2x_3 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 + x_3 = 0. \end{aligned}$$

Assim, $x_3 = t$, $x_1 = -2t$ e $x_2 = -t$ determinam os autovetores

$$X = t\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Note que $\left\{X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para S_{λ_1}.

– <u>CÁLCULO DOS AUTOVETORES X ASSOCIADOS A $\lambda_2 = -3$:</u>

$$\begin{aligned} (A + 3I)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & 8 & 16 \\ 4 & 4 & 8 \\ -4 & -4 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{aligned}$$

Assim, $x_3 = t$, $x_2 = s$ e $x_1 = -s - 2t$ determinam os autovetores

$$X = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Note que $\left\{ X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base para S_{λ_2}.

- $\boxed{\text{Avisos Importantes:}}$

  - Além de reais, autovalores e autovetores podem ser complexos;
  - A dimensão de S_λ é $\leq$ multiplicidade de λ (como raiz de $p(\lambda) = 0$);
  - As técnicas usadas nos exemplos são práticas para matrizes 2×2 e 3×3. Mas para matrizes $n \times n$ com n grande, são usadas outras técnicas, tais como métodos iterativos!

$\boxed{\text{Exercício:}}$ Quais os autovalores e autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$?

$\boxed{\text{Resolução:}}$

Os autovalores $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{6}$ são as raízes da equação

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 23 = 0.$$

Os autovetores associados a $\lambda_1 = -1 + 2\sqrt{6}$ são múltiplos de

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3-2\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & 5 \\ 3 & -4-\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2\sqrt{6} & 5 \\ 3 & -\left(3+2\sqrt{6}\right) \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3-2\sqrt{6}} \\ 3 & -\left(3+2\sqrt{6}\right) \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3-2\sqrt{6}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os autovetores associados a $\lambda_2 = -1 - 2\sqrt{6}$ são múltiplos de

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3+2\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & 5 \\ 3 & -4-\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2\sqrt{6} & 5 \\ 3 & -\left(3-2\sqrt{6}\right) \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3+2\sqrt{6}} \\ 3 & -\left(3-2\sqrt{6}\right) \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3+2\sqrt{6}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $\boxed{\text{DIAGONALIZAÇÃO:}}$
  A (ou L) ser *diagonálizável* significa existir uma base $B = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ composta de autovetores de L. Neste caso, escrevendo, por abuso de notação, tais autovetores como matrizes $n \times 1$, temos

$$X_i \mapsto L(X_i) = AX_i = \lambda_i X_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Daí obtemos a seguinte matriz diagonal:

$$[L]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \underbrace{=}_{\text{NOTAÇÃO}} D,$$

onde as entradas de D que estão na diagonal principal são nulas e foram suprimidas. (Note ainda que a diagonal principal de D é composta dos autovalores de A!)

$\boxed{\text{POR QUE } A \text{ É DIAGONÁLIZÁVEL?}}$
Como vimos, sendo A e D representações de L (na base canônica e na base B, respectivamente), existe uma matriz invertível P tal que

$$P^{-1}AP = D.$$

Assim, mesmo que A não seja uma matriz diagonal, A é *diagonalizável*.

$\boxed{\text{AFIRMAÇÃO 5:}}$
X_i é a i-ésima coluna de P, $i = 1, 2, \cdots, n$, isto é, $P = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{EXERCÍCIO:}}$

No exemplo anterior, temos $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e que $P^{-1}AP = D$.

$\boxed{\text{EXERCÍCIO:}}$
Diagonalize a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$$

para obter A^{100}, considerando $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ como sendo zero.

$\boxed{\text{RESOLUÇÃO:}}$
Note que, obter A^{100} sem diagonalização significa proceder do modo seguinte:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}}^{A}, \overbrace{\begin{bmatrix} 0,70 & 0,45 \\ 0,30 & 0,55 \end{bmatrix}}^{A^2=AA}, \overbrace{\begin{bmatrix} 0,650 & 0,525 \\ 0,350 & 0,475 \end{bmatrix}}^{A^3=AA^2}, \ldots, \overbrace{\begin{bmatrix} 0,6 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 \end{bmatrix}}^{A^{100}=AA^{99}}.$$

Existe um custo computacional com tal procedimento. Contudo, para A diagonalizável, $A = PDP^{-1}$, $A^2 = AA = PD^2P^{-1}$, $A^3 = AA^2 = PD^3P^{-1}$, $\cdots$, $A^{100} = PD^{100}P^{-1}$ com $D^{100} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{100} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{100} \end{bmatrix}$, λ_1 e λ_2 autovalores de A. Estes são obtidos via

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{4}{5} - \lambda & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Para obter um autovetor X_1 de A associado a $\lambda_1 = 1$, resolvemos o sistema $(A - I)X_1 = 0$ via o escalonamento

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para obter um autovetor X_2 de A associado a $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, resolvemos o sistema $\left(A - \frac{1}{2}I\right) X_1 = 0$ via o escalonamento

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, para $X_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ e $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, por exemplo, temos $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ e

$$\begin{aligned} A^{100} &= P \begin{bmatrix} 1^{100} & 0 \\ 0 & (1/2)^{100} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &\approx P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &\approx \begin{bmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 2/5 & 2/5 \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 0,6 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

EXERCÍCIO:

Sabendo-se que $V_1 = (-4, -4, -1)$, $V_2 = (5, 4, 1)$ e $V_3 = (5, 3, 1)$ são autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1/3 & -5/6 & 20/3 \\ -2/3 & -1/6 & 16/3 \\ -1/6 & -1/6 & 11/6 \end{bmatrix},$$

resolva os seguintes itens:

- Sem obter o polinômio característico, obtenha os autovalores correspondentes a estes autovetores.
- A é diagonalizável? Justifique.

- MATRIZES ORTOGONAIS E DIAGONALIZAÇÃO:

  Uma matriz invertível P com entradas reais e tal que $P^{-1} = P^t$ é dita *ortogonal*.

EXEMPLO: $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ são ortogonais.

AFIRMAÇÃO 6: P é ortogonal $\Leftrightarrow \{P_1, \ldots, P_n\}$ (respectivamente, $\left\{P^1, \ldots, P^n\right\}$) é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLO: Veja as duas matrizes do exemplo anterior!

Vamos demonstrar apenas o caso das linhas de P, já que o das colunas é análogo. Assim, como $PP^t = \begin{bmatrix} P_1 \cdot P_1 & \cdots & P_1 \cdot P_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_n \cdot P_1 & \cdots & P_n \cdot P_n \end{bmatrix}$, temos que

$$PP^t = I \quad \Leftrightarrow \quad \text{para cada } i, j = 1, \ldots, n, \quad P_i \cdot P_j = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j, \\ 0 \text{ se } i \neq j, \end{cases}$$

isto é, $\{P_1, \ldots, P_n\}$ é ortonormal.

AFIRMAÇÃO 7: Seja A uma matriz com entradas reais. Demonstra-se que:

1. A é *ortogonalmente diagonalizável* (isto é, existe uma matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP = P^tAP = D$ é diagonal) $\Leftrightarrow A$ é *simétrica* (isto é, $A^t = A$).[6]

2. São reais os autovalores de uma matriz simétrica A qualquer.[7]

3. São ortogonais os autovetores associados a autovalores distintos de uma matriz

[6]Note que a implicação $\Rightarrow$ segue de $A = PDP^t = PD^tP^t = \left(PDP^t\right)^t = A^t$.

[7]De fato, se $AX = \lambda X$, considerando propriedades de conjugação complexa e de transposição de matrizes, temos:

$$\begin{aligned} \lambda \overline{X}^t X &= \overline{X}^t \lambda X \\ &= \overline{X}^t A X \\ &= \overline{X}^t A^t X \\ &= \left(A\overline{X}\right)^t X \\ &= \left(\overline{A}\,\overline{X}\right)^t X \\ &= \left(\overline{AX}\right)^t X \\ &= \left(\overline{\lambda X}\right)^t X \\ &= \left(\overline{\lambda}\,\overline{X}\right)^t X \\ &= \overline{\lambda}\,\overline{X}^t X. \end{aligned}$$

Daí $\left(\lambda - \overline{\lambda}\right) \overline{X}^t X = 0$ e, como $X \neq 0$, temos então $\lambda - \overline{\lambda} = 0$, isto é, $\lambda = \overline{\lambda}$. Assim $\lambda \in \mathbb{R}$.

simétrica A qualquer.[8]

$\boxed{\text{Exemplo:}}$ Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Para obter os autovalores de A, devemos encontrar as raízes de $\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$, isto é, $(\lambda - 7)(\lambda - 1)^2 = 0$. Assim, tais autovalores são $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Agora, por um lado, resolvendo o sistema $(A - 7I)X = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} X = 0$, obtemos, por exemplo, o autovetor $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ associado a $\lambda_1 = 7$. Por outro lado, resolvendo $(A - I)X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} X = 0$, obtemos, por exemplo, os autovetores $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ associados a $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Logo, normalizando X_1 e aplicando Gram-Schmidt em X_2 e X_3, obtemos

$$X_1' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_3' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, considerando $P = \begin{bmatrix} X_1' & X_2' & X_3' \end{bmatrix}$, temos $P^t A P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$.

[8] Sejam $AX_1 = \lambda_1 X_1$ e $AX_2 = \lambda_2 X_2$. Daí

$$\begin{aligned} \lambda_1 X_1 \cdot X_2 &= AX_1 \cdot X_2 \\ &= X_2^t A X_1 \\ &= X_2^t A^t X_1 \\ &= (AX_2)^t X_1 \\ &= X_1 \cdot AX_2 \\ &= X_1 \cdot \lambda_2 X_2 \\ &= \lambda_2 X_1 \cdot X_2. \end{aligned}$$

Daí $(\lambda_1 - \lambda_2) X_1 \cdot X_2 = 0$ e, como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos $X_1 \cdot X_2 = 0$.

6.2 Exercícios

1. Se possível, diagonalize as seguintes matrizes:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;[9]

   (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -12 \\ 0 & -13 & 30 \\ 0 & -9 & 20 \end{bmatrix}$;[10]

   (c) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.[11]

[9] Em relação a A, verifique que: $(-1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$ são autovetores associados ao autovalor -1; $(1, 1, 1)$ é autovetor associado ao autovalor 2.

[10] Em relação a A, verifique que -1, 2 e 5 são seus autovalores.

[11] Em relação a A, verifique que 3, 6 e 9 são seus autovalores.