Estudo de modelos financeiros de otimização de portfólios utilizando a teoria moderna de portfólios

Daniela Miray Igarashi*

Resumo

O presente trabalho apresenta a teoria de alguns modelos financeiros de gestão de portfólio conhecidos em conjunto como a teoria moderna de portfólios. Sendo estes: o modelo da média-variância, modelo de índice único, modelo de Elton-Gruber e modelo de precificação de ativos (CAPM). O objetivo do trabalho é estudar e implementar computacionalmente os modelos para um conjunto de ações, fazendo a otimização do portfólio. Contatou-se que alguns portfólios ótimos são semelhantes, mas todos os outros foram diferentes, e tiveram retornos esperados e riscos diferentes. Isso se deve à teoria, os modelos foram construídos com suposições e cálculos diferentes.

Palavras-chaves: Otimização de Portfólio. Análise de Investimentos. Markowitz. Índice Único. CAPM.

Introdução

Fazer um investimento financeiro é comprometer uma quantia de capital na expectativa de obter um ganho maior no futuro. No mercado financeiro, onde os investimentos de renda variável são a maioria, o fator da incerteza é presente em cada decisão que um investidor tem que tomar. É intuitivo que, não confiar todo o seu capital em apenas um investimento é uma forma de proteção, e dessa forma, investir em diferentes tipos de ativos é mais interessante que investir em apenas um. Seria interessante, neste caso, construir um portfólio com vários ativos diferentes.

Para a gestão de portfólios, alguns modelos financeiros surgiram já na década de 1950, mas a limitação computacional da época exigiu mais pesquisas até que fosse possível aplicar a teoria. Os principais fatores considerados no momento de construir um portfólio é o retorno esperado (ganhos) e o risco (incerteza). Markowitz (1952) propôs o modelo da média-variância, onde a ideia principal foi supor que os investidores são aversos ao risco. Sempre buscando o menor risco e o maior retorno, ponderando a participação de cada ativo de forma que o portfólio final fosse o menos arriscado possível.

O modelo de índice único proposto por Sharpe (1963) foi construído como uma simplificação do modelo de Markowitz, supondo que a movimentação dos ativos pode ser

*Universidade Federal do Paraná - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE) <mirayigarashi@gmail.com>

explicada pela variação do mercado, introduzindo do parâmetro β que indica a relação entre o ativo e o mercado.

Outro modelo proposto por Elton, Gruber e Padberg (1976) baseado nas suposições do modelo de índice único trouxe uma forma de escolher ativos para um portfólio por um nível de corte, que limitava quais ativos seriam incluídos ou não.

O último modelo estudado neste trabalho foi o modelo de precificação de ativos (conhecido também pela sua sigla inglesa CAPM). O modelo é a forma mais simples da relação de equilíbrio de mercado e explica como são formados os preços de ativos.

Vendo a diversidade de modelos criados para a gestão de portfólios, o intuito deste trabalho é a aplicação dos diferentes modelos à um conjunto de dados, construindo um portfólio ótimo sob a perspectiva de cada modelo.

Este trabalho é estruturado da seguinte forma: Na seção 1 temos uma breve revisão bibliográfica dos modelos de estudo do presente trabalho, assim como as técnicas e equações utilizadas na construção dos portfólios; Na seção 2 apresentamos os dados coletados para o estudo; Na próxima seção temos os resultados numéricos e análises realizadas e na última seção concluímos o trabalho.

1 Teoria Moderna de Portfólios

Nesta seção discutimos alguns modelos propostos à gestão de portfólios que serão aplicados aos dados de estudo. As referências utilizadas para esta seção são Elton et al. (2012) e Bodie, Kane e Marcus (2007).

1.1 Modelo de Média-Variância

O modelo proposto por Markowitz (1952) foi o pioneiro na gestão de portfólios e inspirou trabalhos futuros que, juntos, ficariam conhecidos como a teoria moderna de portfólio.

A suposição principal do modelo é que um investidor racional deseja maximizar o seu retorno esperado e minimizar a variação do retorno esperado. Isso significa que o investidor é averso ao risco, e entre dois portfólios de mesmo retorno, ele prefere o que possui menor risco. A escolha de um investimento de maior risco só será feita se o retorno também for maior.

A ideia de Markowitz foi então relacionar o retorno esperado do ativo com a média dos retornos, e a variância do retorno esperado com o risco do ativo.

O modelo se baseia em três conceitos principais: o retorno esperado, a variância e a proporção investida em cada ativo. O retorno esperado do portfólio $\overline{R_p}$ e a variância do portfólio σ_p^2 podem ser escritos matematicamente como:

$$\overline{R_p} = \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{R_i} \tag{1}$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \tag{3}$$

N	é o número de ativos do portfólio;
x_i	é a proporção investida no ativo i;
$\overline{R_i}$	é o retorno médio do ativo i;
σ_{ij}	é a covariâcia entre os ativos i e j.

Dessa forma, o modelo de média-variância proposto por Markowitz é escrito como um problema de otimização:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sigma_p^2 \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

A utilização da equação (3) como restrição do problema significa que o investidor deve aplicar 100% de seu capital disponível, pois o somatório dos percentuais investidos x_i devem totalizar 1. A restrição $x_i \geq 0$ indica que não é permitido venda à descoberto.

Para modelos em que a venda à descoberto é permitida, essa restrição se torna apenas $x_i \in \mathbb{R}$, e o modelo pode ser escrito como o problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sigma_p^2 \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ & x_i \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{5}$$

Diferente de trabalhos anteriores, no modelo proposto por Markowitz os retornos e riscos de um ativo individual não devem ser comparados ao de outro ativo para tomada de decisão. Os ativos não são avaliados separadamente, mas sim em conjunto (RUBINSTEIN, 2002). Introduzindo assim, a importância da diversificação na minimização do risco.

1.1.1 Diversificação

Em seu livro, Markowitz (1959) continuou a detalhar o modelo da média-variância, e também a diversificação. É possível mostrar que o risco de uma carteira de investimentos diminui quando o número de ativos incluídos aumenta. Apesar da redução do risco, ainda não é possível eliminá-lo completamente. Então a denominação risco não sistemático vem do risco que pode ser eliminado pela diversificação e gestão do portfólio, e o risco não sistemático é o risco inerente ao mercado e proveniente da correlação entre os ativos. Na figura 1 temos essa relação ilustrada, o risco não sistemático pode ser reduzido quando o número de ativos é grande, mas o risco sistemático sempre existirá. Dessa forma, um investidor pode reduzir o risco de seu portfólio ao incluir ativos de diferentes correlações.

1.1.2 Fronteira Eficiente

Em teoria é possível representar todas as combinações de ativos e todos os diferentes portfólios em um gráfico com eixos Risco e Retorno. Este gráfico certamente produziria

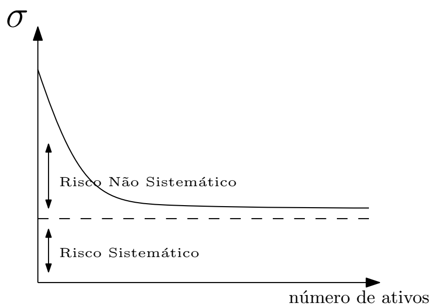

Figura 1 – Risco Sistemático e não Sistemático

uma região no espaço bidimensional, mas não é necessário considerar todos os pontos. Como já discutido, o investidor prefere maior retorno e menor risco. Portanto, ele prefere um portfólio que oferece maior retorno para um dado risco, e ele prefere um portfólio que oferece menor risco para um dado retorno. Os portfólios em tais condições são chamados de eficientes, e o gráfico que considera apenas portfólios eficientes é conhecida como fronteira eficiente.

1.1.3 Ativo sem risco

Uma suposição teórica no modelo de media-variância é a introdução de um ativo sem risco. Neste caso, é possível emprestar e tomar emprestado à uma taxa livre de risco. Supondo que é possível emprestar e pegar emprestado quantidades ilimitadas ($x_i \in \mathbb{R}$), podemos escrever a seguinte relação:

$$\overline{R_p} = R_F + \left(\frac{\overline{R_c} - R_F}{\sigma_c} \right) \sigma_p \tag{6}$$

onde R_F é o retorno do ativo sem risco, $\overline{R_c}$ é o retorno esperado e σ_c é o risco da carteira de investimentos com risco. Por se tratar de um ativo sem risco, temos que $\sigma_F = 0$.

Note que a relação (6) é uma equação de reta com intercepto no eixo dos retornos R_F, inclinação $\theta = \dfrac{\overline{R_c} - R_F}{\sigma_c}$, e o ponto $C = (\sigma_c, \overline{R_c})$ pertence à reta. A figura 2 ilustra essa relação. Todos os portfólios à esquerda do ponto C são composições entre o portfólio C e o ativo livre de risco. Todos os portfólios sobre a reta e à direita do ponto C são portfólios onde houve tomada de empréstimo à taxa livre de risco para investir no portfólio C.

Na figura 3, vemos que diferentes portfólios (A, B) poderiam ter sido escolhidos para esta análise. Mas veja que a combinação entre os ativos $R_F A$ é menos eficiente que a combinação dos ativos $R_F C$, pois oferece o maior retorno para menor risco. Desta forma, a melhor combinação entre ativo sem risco e ativo com risco ocorre quanto maior for a inclinação da reta (6), e o ponto que tangencia a fronteira eficiente do portfólio é a que possui maior retorno.

Dessa forma, quando é possível emprestar e tomar emprestado à uma taxa livre de risco, a solução do problema de minimização do risco é simplificado a encontrar a reta de maior inclinação. O problema pode ser escrito como o seguinte problema de otimização:

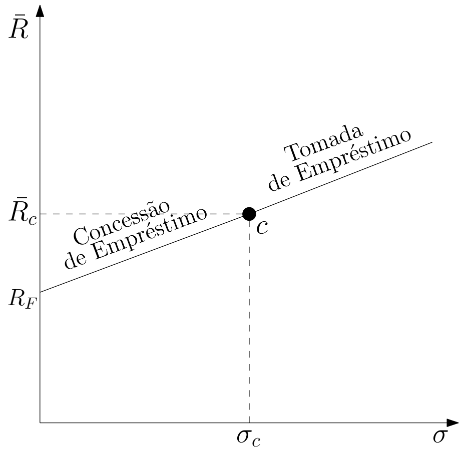

Figura 2 – Concessão e tomada de crédito à taxa sem risco

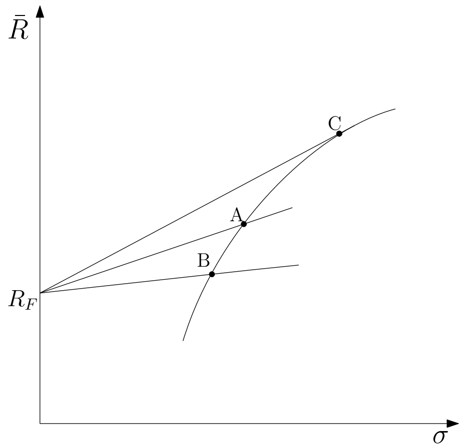

Figura 3 – Combinação do ativo sem risco com portfólios de risco

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & \theta(x) \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
& x_i \in \mathbb{R}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Como feito por Elton et al. (2012), é possível encontrar a solução do problema anterior por uma fórmula fechada, ao resolver o sistema linear dado por:

$$
\begin{aligned}
\overline{R_1} - R_F &= \sigma_1^2 z_1 + \sigma_{12} z_2 + \cdots + \sigma_{1N} z_N \\
\overline{R_2} - R_F &= \sigma_{12} z_1 + \sigma_2^2 z_2 + \cdots + \sigma_{2N} z_N \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\overline{R_N} - R_F &= \sigma_{1N} z_1 + \sigma_{2N} z_2 + \cdots + \sigma_N^2 z_N
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Após a solução do sistema linear, as proporções do portfólio ótimo são dados por:

$$x_i = \frac{z_i}{\sum z_j}$$

1.2 Modelo de Índice Único

A implementação do modelo proposto por Markowtiz, naquela época, exigia complexo esforço computacional, o que dificultava a aplicação do modelo em grandes portfólios. Dessa forma, os próximos desenvolvimentos na área buscaram simplificar o modelo de média-variância. Sharpe (1963) seguiu a publicação de Markowitz, e propôs uma simplificação conhecido como modelo de índice único.

A ideia do modelo de índice único vem da influência do mercado na variação dos ativos. Geralmente quando há uma alta no mercado, a maioria das ações tendem à ter uma alta nos preços, e quando o mercado tem uma baixa, a maioria das ações tendem a cair. O modelo sugere que a variação dos ativos pode ser explicada pela variação que ocorre no mercado, havendo uma correlação entre o ativo e o mercado. Tal variação poderia ser estimada por um índice β, então o modelo de índice único.

O retorno R_i de um ativo é escrito separado em duas partes: uma componente que depende do mercado e outra que depende apenas do ativo individual.

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$$

Onde α_i e e_i são as componentes independentes do mercado e medem apenas as variações do ativo i, α_i é uma constante e e_i representa os eventos aleatórios relacionados ao ativo i. A componente βR_m é relacionada ao mercado, onde β_i é uma constante que mede a mudança esperada em R_i quando há variação em R_m e R_m é a taxa de retorno do mercado. Como e_i e R_m são variáveis aleatórias, também possuem variância que denotaremos por σ_{ei}^2 e σ_m^2.

Uma das hipóteses principais do modelo é que e_i não tem correlação com e_j, ou seja, dois pares de ativos i e j não influenciam um ao outro, e o único motivo para se moverem juntas (altas ou baixas) é a variação do próprio mercado. Então podemos escrever a variância de um ativo como:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{ei}^2$$

Vemos que o risco de um ativo depende de duas componentes também. A primeira é a variância atribuída à incerteza do mercado. É o risco sistemático medido por σ_m^2, e a sensibilidade do ativo é dada por β_i. A outra componente σ_{ei}^2 é independente do mercado e mede apenas as variações do ativo individual.

Dos resultados das deduções baseados no modelo da média-variância e das hipóteses simplificadores do modelo de índice único, temos as relações de retorno médio $\overline{R_i}$, variância σ_i^2 e covariância entre os ativos σ_{ij}:

$$\overline{R_i} = \alpha_i + \beta_i \overline{R_m}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{ei}^2$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$$

1.2.1 Portfólio

Para um portfólio, escreveremos o β_p e α_p como uma média ponderada dos β_i e α_i dos ativos com os pesos da distribuição do portfólio.

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i$$

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i$$

Então o retorno esperado e variância podem ser escritos como:

$$\overline{R_p} = \alpha_p + \beta_p \overline{R_m}$$

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_{ei}^2$$

1.2.2 Beta

O beta é o parâmetro fundamental nos modelos de índice único e CAPM. Ele representa a sensibilidade de um ativo às variações do mercado, e podemos interpretar o comportamento do ativo em relação ao mercado.

O mercado possui $\beta = 1$. Quando $\beta < 1$ o ativo não é muito volátil, varia menos que o mercado, e é considerado um ativo defensivo e de menor risco. Quando $\beta > 1$, temos um ativo volátil, tem mais variações que o mercado, é um ativo de maior risco, e é agressivo pois possui retornos maiores que o mercado.

Para estimação do β geralmente utiliza-se a regressão linear entre as variáveis de retorno e o índice do mercado. A relação entre as variáveis pode ser escrita como

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{m,t} + e_{i,t}$$

onde t é o período da série temporal.

Podemos então escrever a expressão do beta,

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

.

1.3 Modelo de Elton-Gruber

Segundo Elton, Gruber e Padberg (1976), a implementação do modelo de Markowitz era complexa devido à: dificuldade de estimar os dados de entrada (principalmente a matriz de covariâncias), o tempo e custo necessários para encontrar um portfólio ótimo (resolver o problema de programação quadrática) e a dificuldade dos investidores aplicarem a relação retorno-risco para a escolha do portfólio. Eles então publicaram um modelo que contornava tais obstáculos, mostrando uma forma de compor carteiras ótimas sem a necessidade de programação matemática.

A ideia do modelo é criar uma métrica que classifica quais ativos devem compor o portfólio ótimo, feito por meio de um índice de corte. Além disso, também calcula-se a proporção que deve ser investida em cada ativo. Por sua simplicidade e eficiência computacional, além da interpretação intuitiva, Elton, Gruber e Padberg (1976) esperavam que o modelo pudesse ser utilizado pelos investidores da época.

Para aplicação do modelo de Elton-Gruber, algumas hipóteses também precisam ser consideradas. É necessário que um ativo sem risco esteja disponível ao investidor, e que o modelo de índice único seja válido e seja a melhor forma de descrever as movimentações do mercado.

Uma medida intuitiva para classificar os ativos que deveriam compor o portfólio é a razão entre seu retorno excedente e beta. O retorno excedente indica o quanto um ativo é superior ao ativo sem risco, ou seja, o que estamos ganhando ao investir nele. E a razão sobre beta é para quantificar o retorno excedente por unidade de risco que não pode ser diversificado. Formalmente, escrevemos o retorno excedente sobre beta como:

$$\frac{\overline{R_i} - R_F}{\beta_i}$$

onde $\overline{R_i}$ é o retorno esperado do ativo i, R_F é o retorno esperado do ativo sem risco e β_i é a variação do retorno do ativo i quando há variação no mercado.

Quanto maior for o valor do retorno excedente sobre beta, é intuitivo que, maior é a desejabilidade de ter este ativo no portfólio final. Se um ativo está na composição ótima, todos os ativos que possuem retorno excedente sobre beta maior deverão estar no portfólio ótimo também. Os ativos devem ser classificados por ordem decrescente de retorno excedente sobre beta e deve existir um ativo que delimita quais são os ativos do portfólio final. A razão que determina quais ativos fazem parte da carteira ou não será chamado de índice de corte, denotado por C^*.

A determinação do portfólio ótimo é então feita por meio do cálculo de C^* e comparação com o retorno excedente sobre beta de cada ativo. Se os retornos forem maiores ou iguais a C^* eles serão incluídos no portfólio.

1.3.1 Cálculo do limite de corte C^*

Com os ativos ordenados de forma decrescente, do maior para o menor retorno excedente/beta, o cálculo de C^* será feito como se todos os ativos fizessem parte do portfólio. Primeiro calcula-se o C_1; em seguida calcula-se C_2 como se o primeiro e segundo ativo fizessem parte do portfólio; em seguida, calcula-se C_3 como se o primeiro, segundo e terceiro ativo fizessem parte do portfólio; e assim em diante. Todos estes C_i são candidatos à C^*. O C_i ótimo é aquele que é menor do que todos os retornos excedente/beta dos ativos que estão no portfólio, e é maior que todos os retornos excedente/beta dos ativos que não estão no portfólio. Sendo calculado da seguinte forma:

$$C_i = \frac{\sigma_m^2 \sum_{j=1}^{i} \frac{(\overline{R_j} - R_F)\beta_j}{\sigma_{ej}^2}}{1 + \sigma_m^2 \sum_{j=1}^{i} \left(\frac{\beta_j^2}{\sigma_{ej}^2} \right)}$$

onde σ_m^2 é a variância do retorno do mercado i e σ_{ej}^2 é a variância de um ativo que não depende do mercado, conhecido também como risco não sistemático.

1.3.2 Portfólio

Após determinar quais ativos estão no portfólio, a proporção investida em cada ativo é escrita como

$$x_i = \frac{z_i}{\sum z_j}$$

onde

$$z_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{ei}^2}\left(\frac{\overline{R_i} - R_F}{\beta_i} - C^*\right) \tag{9}$$

O cálculo de z_i e $\sum z_j$ é feito apenas para os ativos que compõem o portfólio.

1.3.3 Vendas a descoberto

Quando vendas a descoberto são permitidas, os ativos são ordenados de forma decrescente pela razão retorno excedente sobre beta da mesma forma. Mas como todos os ativos estão no portfólio, o C^* é calculado considerando a soma de todos os ativos (não é necessário calcular diferentes candidatos C_i) , pois todos os ativos influenciam o nível de corte. Todos os z_i também são calculados. Neste caso, os ativos que possuem retorno excedente sobre beta acima de C^* estão em posição comprada e os ativos que possuem retorno excedente sobre beta abaixo são vendidas a descoberto.

1.3.4 Títulos com Índice Adquirível

Se um investidor desejar investir em um portfólio que é usado como índice, por exemplo a BOVESPA, ou investir em um fundo atrelado a um índice, então é possível simplificar mais o modelo. Temos que

$$z_i = \frac{\alpha_i'}{\sigma_{ei}^2}$$

$$\alpha_i' = \overline{R_i} - \Big[R_F + \beta_i(\overline{R_m} - R_F)\Big]$$

Para saber a proporção a investir em cada ativo é preciso dividir cada z_i pela soma dos z_i. O α_i' tem um a interpretação diferente, se $\alpha_i' > 0$ o ativo i fica em posição comprado, se $\alpha_i' < 0$ fica em posição vendido.

1.4 Modelo de precificação de ativos (CAPM)

O modelo de precificação de ativos, ou em inglês Capital Asset Pricing Model (CAPM), foi desenvolvido por Treynor, Sharpe, Lintner e Mossin na década de 1960 a partir da teoria de carteiras de Markowitz. Com as hipóteses do modelo de média-variância e mais algumas suposições, o CAPM pode ser utilizado para estudar o comportamento dos investidores, como são fixados os preços e é o mais simples modelo de equilíbrio de mercado.

As hipóteses tomadas para a construção do modelo são bem rígidas, mas essas suposições é que permitiram o desenvolvimento do modelo mais simples. A partir deste, outros autores puderam desenvolver teorias mais realistas. Apresentamos algumas hipóteses simplificadoras do modelo.

1. Os investidores não influenciam os preços dos ativos com suas transações individuais. Mas os investidores em conjunto podem influenciar o preço dos ativos com suas ações.
2. Todos os investidores consideram um mesmo período relevante.
3. Os investidores têm acesso à qualquer ativo, todos os ativos do mercado são negociáveis, e qualquer montante pode ser negociado. São permitidas vendas a descoberto ilimitadas. É possível emprestar e tomar emprestado quantidades ilimitadas do ativo livre de risco.
4. Os investidores não pagam imposto de renda ou custos de transação.
5. Os investidores constroem uma fronteira eficiente baseada na média e variância dos retornos. Ou seja, tomam decisões da mesma forma discutida na seção 1.1.
6. Todos os investidores analisam o mercado da mesma forma. Isso significa, dado a taxa livre de risco, todos os investidores calculam da mesma forma o retorno esperado, desvio padrão e correlações. Essa suposição é conhecida como homogeneidade das expectativas.

Na seção 1.1.3 discutimos como é a fronteira eficiente no caso em que consideramos a disponibilidade de um ativo sem risco. A fronteira eficiente é encontrada quando o coeficiente de inclinação da reta de retorno do ativo sem risco é máxima. Se todos os investidores têm expectativas homogêneas e consideram a mesma tava livre de risco, todos os investidores terão a mesma fronteira eficiente. Então todos terão o mesmo portfólio de risco, e em equilíbrio, este será o portfólio de mercado.

Dessa forma, sabemos que todos os investidores terão combinações de dois portfólios: o portfólio de mercado e o ativo sem risco. Chamaremos a equação que conecta o ativo sem risco e o portfólio de risco de linha de mercado de capital, dada por:

$$\overline{R_e} = R_F + \frac{\overline{R_M} - R_F}{\sigma_M}\sigma_e$$

onde o índice e significa eficiente.

O termo $\frac{\overline{R_M} - R_F}{\sigma_M}$ é considerado o preço de mercado do risco para os portfólios eficientes. É o retorno extra que pode se ganhar aumentando o nível de risco.

A noção de equilíbrio de mercado vem do fato que todas as carteiras de investimento têm de se situar sobre uma linha de mercado. Se qualquer investimento estiver acima ou abaixo dessa linha existirá um ativo de menor ou maior retorno, e teremos uma oportunidade para arbitragem sem risco. Ou seja, o investidor pode vender a descoberto um ativo de menor retorno para comprar outro de maior retorno, sem correr riscos. Essa arbitragem continuará até que todos os investimentos convergissem para a linha.

Podemos definir a equação de linha de mercado de um ativo i como:

$$\overline{R_i} = R_F + \beta_i(\overline{R_M} - R_F) \tag{10}$$

Essa equação mostra que o retorno esperado e o beta possuem uma relação linear, quanto maior o beta maior será o retorno esperado. Quando o portfólio é bem diversificado, a única componente importante na determinação dos retornos é o beta.

A equação (10) representa o modelo de precificação de ativos.

2 Seleção de ativos

Para a realização deste trabalho, os ativos de renda variável escolhidos são as ações pertencentes à carteira teórica da Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA). Os dados foram coletados da base do site InfoMoney. Os ativos foram divididos por setores de atuação, e foram selecionadas as dez ações mais representativas de cada segmento.

Na Tabela 1 temos as ações que compõem a carteira do presente trabalho, juntamente com o peso que representam na carteira da BOVESPA e respectivos segmentos.

Tabela 1 – Ativos de renda variável selecionados para estudo

Sigla	Empresa	Peso (%)	Setor
ITUB4	Itaú Unibanco	10,846	Financeiro
VALE3	Vale	9,04	Mineração
BBDC4	Bradesco	8,485	Financeiro
ABEV3	Ambev SA	7,039	Consumo e Varejo
PETR4	Petrobras	4,883	Petróleo e Gás
ITSA4	Itaúsa	3,384	Holding
KROT3	KROTON	2,214	Outros
VIVT4	Telefônica Brasil	1,712	Telecomunicações
CCRO3	CCR	1,653	Transporte e Logística
RADL3	RaiaDrogasil	1,257	Saúde

Note que duas ações do setor financeiro foram escolhidas (Itaú Unibanco e Bradesco). Isso se deve ao fato de que uma das ações escolhidas na primeira coleta de dados teve retorno médio negativo, e decidimos desconsiderá-la. Não existem restrições no modelo dizendo que devemos ignorar ações com retorno negativo, e esta foi uma decisão do analista. Assim o ativo Bradesco foi incluído para substituição, por ser o próximo ativo da lista com maior peso na composição da BOVESPA.

Para o ativo de renda fixa consideremos um CDB (Certificado de Depósito Bancário) que retorne 100% da taxa do CDI. Existem diferentes tipos de CDBs, e tomaremos um com a taxa de 100% do CDI apenas para efeito de estudo. Os dados foram coletados na base de dados online do Banco Central do Brasil .

Apesar de grandes bancos (mais seguros) raramente oferecerem um CDB nessas condições, é possível encontrar tal investimento em bancos de médio ou pequeno porte. Em bancos menores esse investimento se torna mais arriscado, mas é segurado pelo Fundo Garantidor de Crédito (FGC) em caso de falência do banco, que cobre investimentos de até R$ 250 mil. De forma geral, ainda é considerado um investimento de baixo risco, e no decorrer do trabalho, é conhecido também como o ativo sem risco, ou ativo livre de risco.

Tomaremos a Bolsa de Valores de São Paulo como o mercado do presente estudo. Todos dados referentes ao mercado serão calculados com base nos dados de retornos da BOVESPA.

A coleta de dados dos retornos dos ativos foi efetuada do período entre 1º de novembro de 2016 à 31 de outubro de 2017. Compreendendo o período de um ano com 251 observações diárias.

Na coleta e organização dos dados, e cálculos foi utilizada a planilha eletrônica Microsoft Excel, para cálculos e resolução dos problemas de otimização utilizamos o software

MATLAB. Todos os cálculos foram efetuados conforme a revisão teórica da seção 1, ou de outra forma explicitada no momento da análise.

3 Resultados

Nesta seção apresentamos os portfólios ótimos determinados por cada modelo estudado.

3.1 Modelo de Média-Variância

3.1.1 Sem venda a descoberto

Escrevendo o modelo em sua forma matricial, temos:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & x^T Q x \\ \text{sujeito a} & x^T e = 1 \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{11}$$

onde Q é a matriz de covariâncias dos retornos e $x \in \mathbb{R}^{10}$ é a proporção investida nos dez ativos escolhidos.

Resolvendo o problema de programação quadrática, obtemos o portfólio ótimo dado na Tabela 2 :

Tabela 2 – Portfólio ótimo - média-variância

Sigla	Ativo	x_i
ITUB4	1	0.0000
VALE3	2	0.1169
ABEV3	3	0.0021
PETR4	4	0.0000
ITSA4	5	0.0000
KROT3	6	0.0000
VIVT4	7	0.4338
CCRO3	8	0.3270
BBDC4	9	0.0000
RADL3	10	0.1202

Onde o retorno esperado ótimo é $\overline{R_p} = 0.094039$ e $\sigma_p = 0.104105$. Com este portfólio, nosso retorno esperado é de $0,094\%$ ao dia, e o risco (variação) de $0,104\%$ ao dia.

Os ativos 1, 4, 5, 6 e 9 tiveram valores de x_i muito pequenos, e pelo arredondamento seriam considerados como zero. Ou seja, não devemos investir capital nesses ativos. Dessa forma, segundo o modelo de média-variância devemos investir $43,38\%$ do capital em ações da Telefônicas Brasil, $32,70\%$ em ações da CCR, $12,02\%$ em ações da RaiaDrogasil e assim por diante.

Apenas para fins de comparação, a figura 4 ilustra o portfólio de mínima variância (MV) resultante do processo de otimização nos eixos risco e retorno. Além do portfólio ótimo, estão presentes no gráfico, os portfólios construídos quando se é investido 100% do capital em uma única ação, resultando em dez portfólios diferentes pois temos 10 ações.

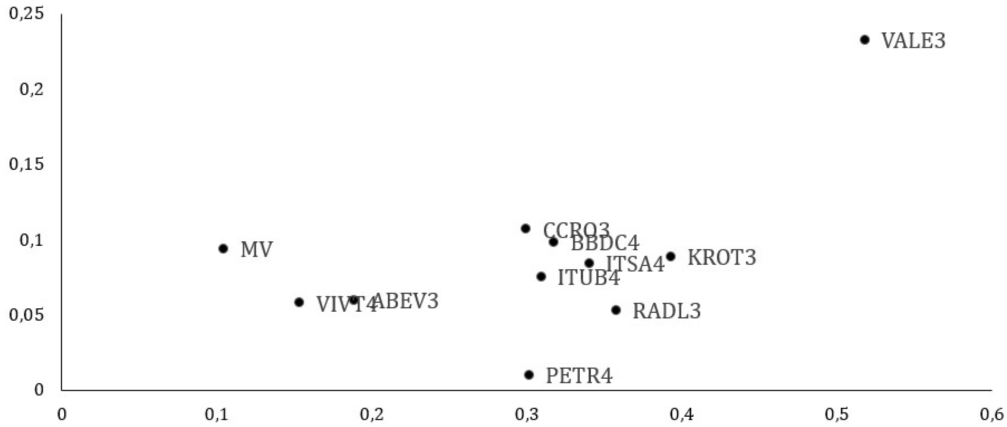

Figura 4 – Portfólio de mínimo risco e demais portfólios no eixo risco-retorno

Vemos que o portfólio MV realmente possui o menor risco quando comparado aos portfólios restantes, e seu retorno é até maior que alguns deles. Podemos ver também pela figura 4 o conceito de portfólio eficiente comparando alguns portfólios. Por exemplo, o portfólio composto apenas pelo ativo CCRO3 é eficiente em relação ao ativo ITUB4 e PETR4, pois possui retorno superior para quase o mesmo nível de risco. Observamos também que o ativo VALE3 possui retorno médio superior à todos os outros portfólios, mas também é o que possui maior risco.

3.1.2 Com venda a descoberto

O modelo de média variância considerando venda a descoberto é semelhante ao caso anterior, com a mudança da última restrição do modelo.

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x^T Q x \\ \text{sujeito a} & x^T e = 1 \\ & x \in \mathbb{R}^{10} \end{array} \tag{12}$$

onde Q é a matriz de covariâncias dos retornos, x é a proporção investida nos ativos.

Resolvendo o problema de programação quadrática obtemos o portfólio ótimo conforme a Tabela 3.

Tabela 3 – Portfólio ótimo - média variância com venda a descoberto

Sigla	Ativo	x_i
ITUB4	1	0.3937
VALE3	2	0.1132
ABEV3	3	0.2133
PETR4	4	-0.1260
ITSA4	5	-0.7872
KROT3	6	0.1135
VIVT4	7	0.5598
CCRO3	8	0.4263
BBDC4	9	0.0604
RADL3	10	0.0330

Onde o retorno esperado ótimo é $\overline{R_p} = 0.097315$ e $\sigma_p = 0.060184$. Com este portfólio, nosso retorno esperado é de $0,097\%$ ao dia, e o risco (variação) de $0,060\%$ ao dia.

Os ativos ABEV3 e PETR4 seriam vendidos a descoberto. O portfólio final seria obtido investindo $55,98\%$ do capital em ações da Telefônicas Brasil, $42,63\%$ em ações da CCR, $39,37\%$ em ações do Itaú Unibanco e assim por diante. No portfólio sem venda a descoberto, as ações da CCR e Telefônica Brasil também foram as mais colocadas no portfólio.

Comparando estes resultados com o portfólio ótimo sem venda a descoberto, tivemos um retorno maior ($0,097\%$ contra $0,094\%$) e um risco menor ($0,060\%$ contra $0,104\%$) ao permitir venda a descoberto.

3.1.3 Ativo livre de risco

Considerando a disponibilidade de um ativo sem risco, e que é possível emprestar e tomar emprestado à taxa sem risco. O modelo é escrito como

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \theta(x) = \frac{\overline{R_p} - R_F}{\sigma_p} \\ \text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ & x_i \in \mathbb{R} \end{array} \tag{13}$$

Considerando a taxa sem risco $R_F = 0.0419$. Podemos calcular o portfólio ao resolver o sistema de equações lineares dado por:

$$Qz = \overline{R_i} - R_F e$$

onde Q é a matriz de covariâncias, $\overline{R_i}$ é vetor de retorno médio esperado. Depois fazemos $x_i = \frac{z_i}{\sum z_i}$.

Desse modo, a tabela 4 mostra o portfólio construído:

Tabela 4 – Portfólio ótimo - média variância com ativo livre de risco

Sigla	Ativo	x_i
ITUB4	1	-1.0011
VALE3	2	0.3517
ABEV3	3	0.4376
PETR4	4	-0.0073
ITSA4	5	0.1158
KROT3	6	0.2975
VIVT4	7	-0.3146
CCRO3	8	0.6686
BBDC4	9	0.1983
RADL3	10	0.2537

Onde o retorno esperado ótimo é $\overline{R_p} = 0.154706$ e $\sigma_p = 0.085880$. Com este portfólio, nosso retorno esperado é de $0,157\%$ ao dia, e o risco (variação) de $0,085\%$ ao dia.

Os ativos ITUB4, ABEV3 e KROT3 seriam vendidos a descoberto. O portfólio final seria obtido investindo $66,86\%$ do capital em ações da CCR, $43,76\%$ em ações da Ambev, $35,17\%$ em ações da Vale e assim por diante.

O retorno esperado do portfólio foi o maior comparado aos portfólios sem o ativo livre de risco, o que significa que a inclusão do ativo sem risco colaborou no aumento do retorno do portfólio, mas como o retorno é maior, o risco também é.

Uma parte da fronteira eficiente neste modelo é a reta de coeficiente angular θ, dada por:

$$\overline{R_p} = R_F + \theta\sigma_p$$

$$\overline{R_p} = 0.0419 + 1.3132\sigma_p \tag{14}$$

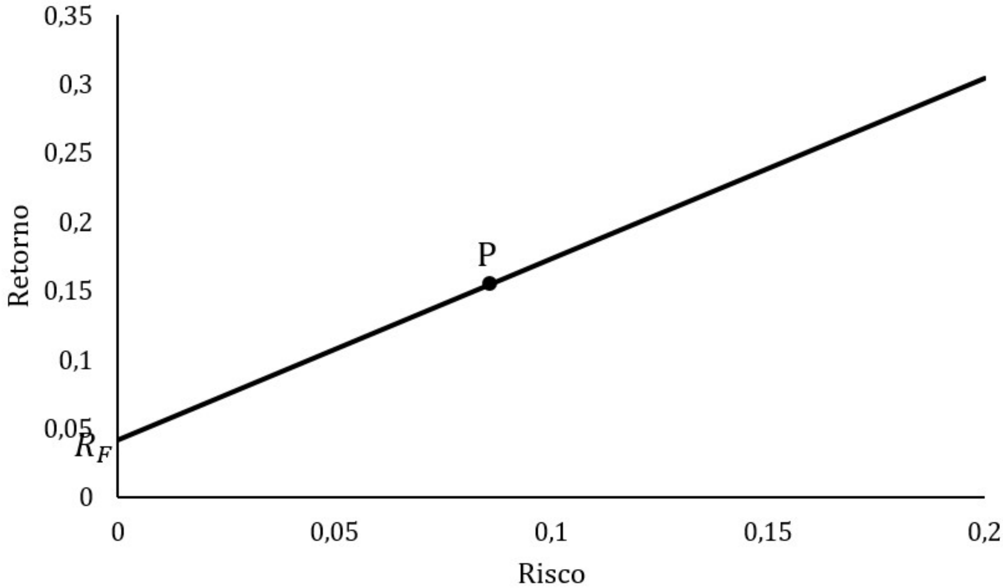

Figura 5 – Fronteira eficiente e portfólio ótimo

A figura 5 mostra a reta de equação 14 e o ponto P representa o portfólio ótimo que tangencia a fronteira eficiente do modelo de média-variância.

3.2 Modelo de Índice Único

No modelo de índice único é necessário a consideração de um ativo livre de risco, assim como dados de retornos do próprio mercado. O ativo sem risco será o mesmo da análise anterior, e os dados de retorno considerados vêm do portfólio da BOVESPA.

Na seção 1.2, apresentamos como são calculados os dados do modelo, agora mostramos os resultados. Na tabela 5, temos os retornos esperados, α, β, risco e variação do erro para cada ativo.

3.2.1 Sem venda a descoberto

Escrevendo o modelo para o caso em que não é permitido a venda a descoberto, temos:

Tabela 5 – Dados do modelo de índice único

Sigla	Ativo	R_i	α_i	β_i	σ_i	σ^2_{ei}
ITUB4	1	0.0757	-0.0380	1.5616	0.3088	0.0231
VALE3	2	0.2326	0.1684	0.8822	0.5178	0.2450
ABEV3	3	0.0600	0.0072	0.7258	0.1884	0.0199
PETR4	4	0.0101	-0.0728	1.1396	0.3012	0.0522
ITSA4	5	0.0843	-0.0405	1.7142	0.3398	0.0284
KROT3	6	0.0887	-0.0120	1.3835	0.3925	0.0974
VIVT4	7	0.0583	0.0161	0.5791	0.1533	0.0136
CCRO3	8	0.1071	0.0866	0.2814	0.2994	0.0873
BBDC4	9	0.0984	-0.0144	1.5501	0.3173	0.0295
RADL3	10	0.0532	0.0305	0.3128	0.3572	0.1247

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sigma_p^2 \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Onde $\sigma_p^2 = \beta_p^2\sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} x_i^2\sigma_{ei}^2$.

Resolvendo o problema de minimização, obtemos o portfólio ótimo dado na Tabela 6 :

Tabela 6 – Portfólio ótimo - índice único

Sigla	Ativo	x_i
ITUB4	1	0.0000
VALE3	2	0.0089
ABEV3	3	0.2371
PETR4	4	0.0001
ITSA4	5	0.0000
KROT3	6	0.0000
VIVT4	7	0.5247
CCRO3	8	0.1372
BBDC4	9	0.0000
RADL3	10	0.0919

Onde o retorno esperado ótimo é $\overline{R_p} = 0.066483$ e $\sigma_p = 0.128736$. Com este portfólio, nosso retorno esperado é de $0,066\%$ ao dia, e o risco (variação) de $0,128\%$ ao dia.

Os ativos 1, 4, 5, 6 e 9 tiveram valores de x_i muito pequenos, e pelo arredondamento seriam considerados como zero. Ou seja, não devemos investir capital nesses ativos. Dessa forma, segundo o modelo de média-variância devemos investir $52,47\%$ do capital em ações da Telefônicas Brasil, $23,71\%$ em ações da Ambev, $13,72\%$ em ações da CCR e assim por diante.

Esse portfólio é semelhante ao portfólio do modelo da média-variância (também para o caso sem venda a descoberto) apresentado tabela 2. É notável que os mesmos ativos que tiveram percentual zero no modelo de índice único também tiveram no modelo de média variância. O ativo com maior capital investido também foi o mesmo: as ações da Kroton. Isso acontece pois o modelo de índice proposto por Sharpe é uma simplificação do de Markowitz. Com exceção destas semelhanças, os modelos tiveram resultados diferentes.

3.2.2 Com venda a descoberto

Escrevendo o modelo para o caso em que é permitido venda a descoberto, temos:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sigma_p^2 \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ & x_i \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{16}$$

Resolvendo o problema de minimização, obtemos o portfólio ótimo dado na Tabela 7 :

Tabela 7 – Portfólio ótimo - índice único com venda a descoberto

Sigla	Ativo	x_i
ITUB4	1	-0.0747
VALE3	2	0.0213
ABEV3	3	0.3423
PETR4	4	0.0494
ITSA4	5	-0.1155
KROT3	6	0.0009
VIVT4	7	0.6126
CCRO3	8	0.1299
BBDC4	9	-0.0546
RADL3	10	0.0884

Onde o retorno esperado ótimo é $\overline{R_p} = 0.059637$ e $\sigma_p = 0.140375$. Com este portfólio, nosso retorno esperado é de $0,059\%$ ao dia, e o risco (variação) de $0,140\%$ ao dia.

Os ativos ITUB4, ITSA4 e BBDC4 seriam vendidos a descoberto. O portfólio final seria obtido investindo $61,26\%$ em ações da Telefônicas Brasil, $34,23\%$ em ações da Ambev, $12,99\%$ em ações da CCR e assim por diante.

3.3 Modelo de Elton-Gruber

3.3.1 Sem venda a descoberto

Seguindo as premissas do modelo de Índice Único e que um ativo sem risco está disponível para o investidor, iremos construir um portfólio utilizando um índice de corte, para tanto, organizamos na tabela 8 os dados necessários para classificação dos ativos.

Segundo o modelo, devemos agora classificar os ativos conforme a relação retorno excedente sobre beta, para avaliar quais ações são mais atrativas para compor o portfólio final. Na tabela 9, temos os ativos ordenados em ordem decrescente.

Como vemos na quarta linha da tabela 9, a razão retorno excedente sobre beta do ativo 7 é maior que C_7 (0.0338>0.0305), logo $C^* = C_7$ é o nível de corte. Temos que C_7 é menor que todos os retornos excedente/beta dos ativos que fazem parte do portfólio, e C_7

Tabela 8 – Dados necessários para compor o portfólio

Ativo	$\overline{R_i}$	$(R_F - \overline{R_i})$	β	σ_{ei}^2	$\dfrac{(R_F - \overline{R_i})}{\beta_i}$
1	0.0757	0.0337	1.5616	0.0231	0.0216
2	0.2326	0.1907	0.8822	0.2450	0.2162
3	0.0600	0.0181	0.7258	0.0199	0.0249
4	0.0101	-0.0318	1.1396	0.0522	-0.0279
5	0.0843	0.0424	1.7142	0.0284	0.0247
6	0.0887	0.0468	1.3835	0.0974	0.0338
7	0.0583	0.0164	0.5791	0.0136	0.0283
8	0.1071	0.0652	0.2814	0.0873	0.2317
9	0.0984	0.0565	1.5501	0.0295	0.0364
10	0.0532	0.0113	0.3128	0.1247	0.0362

Tabela 9 – Classificação de ativos por retorno excedente sobre beta

Ativo	$\dfrac{(R_F - \overline{R_i})}{\beta_i}$	$\dfrac{(R_F - \overline{R_i})\beta_i}{\sigma_{ei}^2}$	$\dfrac{\beta_1^2}{\sigma_{ei}^2}$	$\sum_{j=1}^{i} \dfrac{(R_F - \overline{R_j})\beta_j}{\sigma_{ej}^2}$	$\sum_{j=1}^{i} \dfrac{\beta_j^2}{\sigma_{ej}^2}$	C_i
9	0.2317	2.9727	81.585	2.972	81.585	0.0258
2	0.2162	0.6864	3.175	3.659	84.761	0.0309
10	0.0364	0.0284	0.784	3.687	85.546	0.0309
7	0.0338	0.6994	24.749	4.386	110.295	0.0305
8	0.0283	0.2101	0.906	4.597	111.202	0.0317
3	0.0249	0.6604	26.494	5.257	137.696	0.0307
5	0.0247	2.5587	103.393	7.816	241.090	0.0284
1	0.0216	2.2790	105.491	10.095	346.581	0.0265
6	0.0009	0.6651	19.660	10.760	366.242	0.0269
4	-0.0279	-0.6934	24.862	10.066	391.105	0.0237

é maior que todos os retornos excedente/beta dos ativos que não estão no portfólio. Assim, apenas as quatro primeiras ações fazem parte do portfólio, e incluímos os ativos 2, 7, 9 e 10.

Notemos que não seria necessário calcular todos os valores de C_i, constatado que $C_7 = C^*$ poderíamos parar a construção da tabela. Os demais dados além das primeiras quatro linhas não são utilizados para o cálculo do portfólio ótimo (neste caso sem venda a descoberto). Isso é mais uma vantagem e praticidade do modelo.

Calculando os z_i pela equação (9) e dividindo pelo somatórios dos z_i que fazem parte do portfólio, temos a carteira ótima dada pela tabela 10.

Onde o retorno esperado ótimo é $\overline{R_p} = 0.105698$ e $\sigma_p = 0.388607$. Com este portfólio, nosso retorno esperado é de $0,105\%$ ao dia, e o risco é de $0,388\%$ ao dia.

Dessa forma, segundo o modelo de Elton-Gruber devemos investir $92,75\%$ do capital em ações da Bradesco, $5,85\%$ em ações da Vale, $1,26\%$ em ações da Telefônica Brasil e $0,13\%$ em ações da RaiaDrogasil.

Tabela 10 – Portfólio ótimo - modelo de Elton-Gruber

Sigla	Ativo	x_i
ITUB4	1	0.0000
VALE3	2	0.0585
ABEV3	3	0.0000
PETR4	4	0.0000
ITSA4	5	0.0000
KROT3	6	0.0000
VIVT4	7	0.0126
CCRO3	8	0.0000
BBDC4	9	0.9275
RADL3	10	0.0013

3.3.2 Com venda a descoberto

Quando a venda a descoberta é permitida, todos os ativos serão incluídos no portfólio final. O processo para obter o portfólio ótimo é semelhante quando a venda a descoberto é proibida. Portanto são utilizados os mesmos dados da tabela 8, e a organização é feita por ordem decrescente de retorno excedente/beta como feito na tabela 9.

O cálculo de C^* é feito considerando todos os ativos, pois agora todos estão no portfólio. Logo, na tabela 9, o C^* será o último C_i calculado, e temos que $C_4 = C^* = 0.0237$. Para obter o portfólio ótimo calculamos os z_i e dividimos pela somatória de todos os z_i. Assim, temos o portfólio ótimo na tabela 11.

Tabela 11 – Portfólio ótimo - modelo de Elton-Gruber com venda a descoberto

Sigla	Ativo	x_i
ITUB4	1	-0.0133
VALE3	2	0.0651
ABEV3	3	0.0042
PETR4	4	-0.1058
ITSA4	5	0.0060
KROT3	6	-0.0305
VIVT4	7	0.0407
CCRO3	8	0.0014
BBDC4	9	1.0292
RADL3	10	0.0030

Onde o retorno esperado ótimo é $\overline{R_p} = 0.115081$ e $\sigma_p = 0.414392$. Com este portfólio, nosso retorno esperado é de $0,115\%$ ao dia, e o risco é de $0,414\%$ ao dia.

Os ativos 1, 4 e 6 são vendidos a descoberto. Dessa forma, segundo o modelo de Elton-Gruber devemos investir $102,92\%$ do capital em ações da Bradesco, $6,51\%$ em ações da Vale, $4,07\%$ em ações da Telefônicas Brasil e assim em diante.

3.3.3 Títulos de Índice Adquirível

No caso de um investidor desejar investir em um portfólio que é usado como índice, por exemplo a BOVESPA, ou investir em um fundo atrelado a um índice, então existe outra simplificação do modelo.

O α'_i calculado tem um a interpretação diferente, se $\alpha'_i > 0$ o ativo i fica em posição comprado, se $\alpha'_i < 0$ fica em posição vendido. Na tabela 12 temos os valores de α'.

Tabela 12 – α' dos ativos

Sigla	Ativo	α'_i	Posição
ITUB4	1	-0,0145	VENDIDA
VALE3	2	0,1634	COMPRADA
ABEV3	3	-0,0043	VENDIDA
PETR4	4	-0,0670	VENDIDA
ITSA4	5	-0,0105	VENDIDA
KROT3	6	0,0041	COMPRADA
VIVT4	7	-0,0015	VENDIDA
CCRO3	8	0,0565	COMPRADA
BBDC4	9	0,0086	COMPRADA
RADL3	10	0,0017	COMPRADA

Neste caso, é interessante incluir na carteira os ativos com α'_i positivo, e vender a descoberto os ativos com α'_i negativo. Calculando o portfólio ótimo por meio da razão entre z_i e o somatório de z_i, temos o portfólio ótimo dado na tabela 13.

Tabela 13 – Portfólio ótimo - títulos de índice adquirível

Sigla	Título	z_i	x_i
ITUB4	1	-0,6264	0,6630
VALE3	2	0,6670	-0,7059
ABEV3	3	-0,2171	0,2298
PETR4	4	-1,2821	1,3569
ITSA4	5	-0,3696	0,3912
KROT3	6	0,0419	-0,0444
VIVT4	7	-0,1119	0,1184
CCRO3	8	0,6473	-0,6851
BBDC4	9	0,2927	-0,3098
RADL3	10	0,0134	-0,0141
Soma		-0,9448	1,0000

Vemos que as tabelas 12 e 13 discordam quanto aos ativos que devem ser incluídos na carteira. A ação ITUB4 tem α' negativo e estaria em posição vendida, mas seu x_i é positivo, indicando que seria comprado. Talvez isso ocorra pelo fato de que o somatório dos z_i é negativo, $\sum z_i = -0.9448$, e o modelo não está preparado para essas situações. Considerando o módulo de $\sum z_i$, escrevemos a carteira ótima novamente como na tabela 14.

Na figura 6 temos a linha de mercado de títulos representada pela reta no eixo beta e retornos. Temos também os dez ativos do portfólio, representados pelos dez pontos azuis. Isto é uma interpretação gráfica do significado de α'_i. Todos os ativos que estão acima da linha de mercado são mais eficientes, pois possuem retorno maior à um mesmo nível de risco. Então, o investidor irá vender a descoberto suas outras ações para poder comprar estas ações. Assim, as ações dos ativos VALE3, BBDC4, KROT3, RADL3 são compradas, e o restante é vendido a descoberto.

Tabela 14 – Portfólio ótimo - títulos de índice adquirível

Sigla	Título	α'	x_i
ITUB4	1	-0,0145	-0,6630
VALE3	2	0,1634	0,7059
ABEV3	3	-0,0043	-0,2298
PETR4	4	-0,0670	-1,3569
ITSA4	5	-0,0105	-0,3912
KROT3	6	0,0041	0,0444
VIVT4	7	-0,0015	-0,1184
CCRO3	8	0,0565	0,6851
BBDC4	9	0,0086	0,3098
RADL3	10	0,0017	0,0141

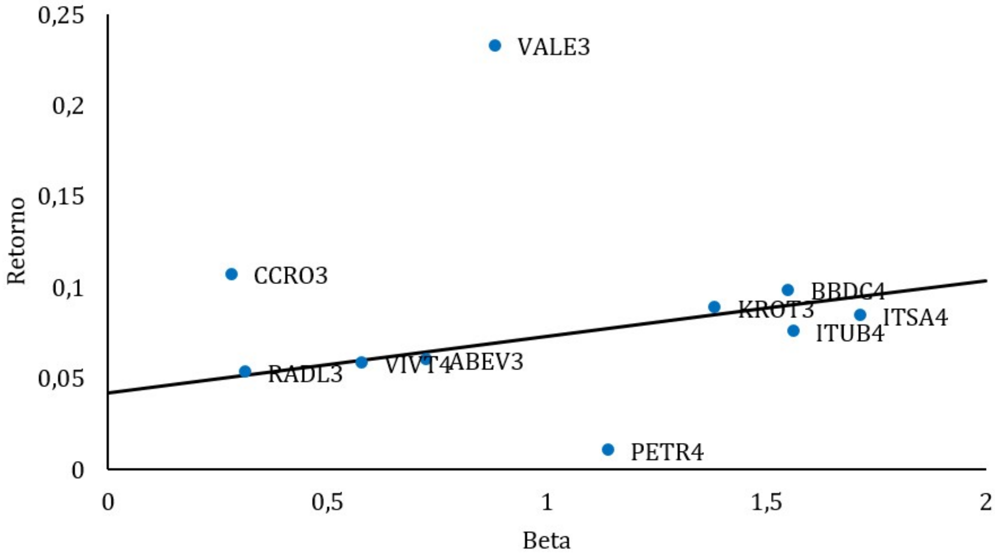

Figura 6 – Linha de mercado de capitais e ativos

3.4 Modelo de precificação de ativos

Do modelo de precificação de ativos, temos que a linha de mercado de capitais é dada pela reta,

$$\overline{R_e} = R_F + \frac{\overline{R_M} - R_F}{\sigma_M}\sigma_e$$

que fornece o retorno de uma carteira eficiente dado um nível de risco. No nosso caso, esta reta seria dada por:

$$\overline{R} = 0.0419 + 0.1793\sigma$$

Na figura 7 nós temos a linha de mercado de capitais. Essa reta é importante pois descreve a relação entre risco e retorno como uma função linear. Quanto maior o risco, maior é o retorno.

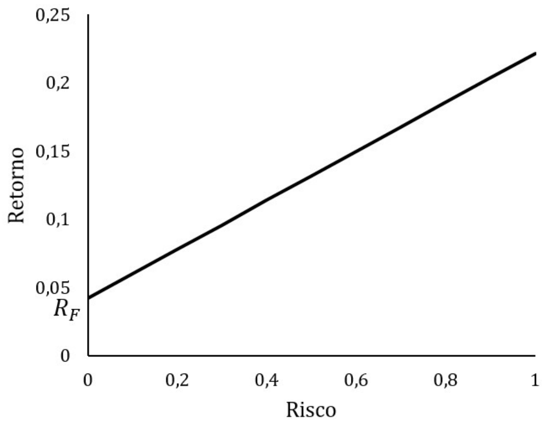

Figura 7 – Linha de mercado de capitais

Para cada ativo também podemos escrever a linha de mercado de títulos. De forma análoga à linha de mercado de capitais, essa reta fornece a relação retorno e risco para cada ativo. Esta relação é muito importante, pois basicamente diz que o único fator que influencia o retorno do ativo é o seu risco (β).

$$\overline{R_i} = R_F + \beta_i(\overline{R_M} - R_F) \tag{17}$$

Para o nosso caso, a linha de mercado de cada título é dada por:

$$\overline{R_i} = 0.0419 + 0.0308\beta_i$$

Para os dez ativos que compõem o portfólio, temos as linhas de mercado:

$$\overline{R_1} = 0.0419 + 0.0308\beta_1$$

$$\overline{R_2} = 0.0419 + 0.0308\beta_2$$

$$\overline{R_3} = 0.0419 + 0.0308\beta_3$$

$$\overline{R_4} = 0.0419 + 0.0308\beta_4$$

$$\overline{R_5} = 0.0419 + 0.0308\beta_5$$

$$\overline{R_6} = 0.0419 + 0.0308\beta_6$$

$$\overline{R_7} = 0.0419 + 0.0308\beta_7$$

$$\overline{R_8} = 0.0419 + 0.0308\beta_8$$

$$\overline{R_9} = 0.0419 + 0.0308\beta_9$$

$$\overline{R_{10}} = 0.0419 + 0.0308\beta_{10}$$

Considerações finais

No presente trabalho estudamos diferentes modelos financeiros de otimização de portfólios, aplicando-os em dados do mercado de ações e construindo portfólios sob as suposições de cada modelo.

No modelo de média-variância de Markowitz construímos os portfólios sem e com venda a descoberto, e também considerando um ativo livre de risco. Apesar dos cálculos para a construção do modelo não serem difíceis atualmente, é compreensível a dificuldade da época em construir uma matriz de covariâncias e resolver o problema de programação quadrática.

A simplificação proposta por Sharpe no modelo de índice único facilitou a nossa implementação do cálculo da matriz de covariâncias. Também é notável a importância do modelo de índice único, pois sob tais suposições, os próximos modelos estudados foram criados.

Em nosso estudo, pudemos constatar que o modelo proposto por Elton, Gruber e Padberg (1976) realmente possui a simplicidade, intuitividade e praticidade para ser aplicado por qualquer investidor. Não foi necessário a implementação computacional pois todos os cálculos poderiam ser organizados em uma planilha eletrônica, e o portfólio ótimo foi encontrado sem a necessidade de resolução de um problema de otimização.

Finalmente, o CAPM é um modelo simples de equilíbrio de mercado, mostrando como se comportam os investidores sob as suposições do modelo. Apesar de ser simples, sua aplicação explica que o retorno de um ativo é influenciado apenas pelo risco e variação do mercado, o que é uma constatação importante. Para saber o retorno de um ativo, basta sabermos qual é o seu risco que está exposto.

Como estes modelos foram construídos com suposições e objetivos diferentes, cada portfólio ótimo encontrado também foi diferente. Em alguns momentos tivemos portfólios semelhantes, como o de Markowitz com e sem venda e descoberto, ou como o portfólio de Markowitz e Sharpe no caso sem venda a descoberto. O objetivo deste trabalho não foi comparar o desempenho de cada modelo, pois se tivéssemos escolhido outras ações, ou escolhido maior número de ações, o resultado teria sido diferente também.

Independe das ações escolhidas, cada modelo irá fornecer o portfólio de menor risco e maior retorno possível. Dessa forma, teremos o portfólio ótimo para o investidor tomar sua decisão.

Referências

Banco Central do Brasil. *Sistema Gerenciador de Séries Temporais*. 2017. Acesso em: 17 nov. 2017. Disponível em: <https://www3.bcb.gov.br/sgspub/>. Citado na página 11.

BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A. J. *Essentials of Investments*. 7th. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Irwin Series in Finance, Insurance, and Real Est, 2007. Citado na página 2.

ELTON, E. et al. *Moderna teoria de carteiras e análise de investimentos*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 5.

ELTON, E. J.; GRUBER, M. J.; PADBERG, M. W. Simple criteria for optimal portfolio selection. *The Journal of Finance*, Blackwell Publishing Ltd, v. 31, n. 5, p. 1341–1357, 1976. ISSN 1540-6261. Citado 4 vezes nas páginas 2, 7, 8 e 23.

InfoMoney. *Altas e Baixas*. 2017. Acesso em: 16 nov. 2017. Disponível em: <http://www.infomoney.com.br/mercados/ferramentas/altas-e-baixas>. Citado na página 11.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

MARKOWITZ, H. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. 1. ed. New York: Wiley, 1959. Citado na página 3.

RUBINSTEIN, M. Markowitz's "portfolio selection": A fifty-year retrospective. *Journal of Finance*, v. 57, n. 3, p. 1041–1045, 2002. Citado na página 3.

SHARPE, W. F. A simplified model for portfolio analysis. v. 9, p. 277–293, 01 1963. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 6.

APÊNDICE A – Dados de Entrada

Na tabela 15 apresentados os dados coletados e utilizados para este estudo. Temos os retornos mensais em percentual de cada ação, da carteira da BOVESPA e o ativo sem risco escolhido.

Tabela 15 – Dados de retornos mensais (%) das ações, mercado e ativo sem risco

Mês/Ano	ITUB4	VALE3	ABEV3	PETR4	ITSA4	KROT3	VIVT4	CCRO3	BBDC4	RADL3	BOVESPA	CDI
nov/16	-0.3720	1.2965	-0.4085	-0.3855	-0.4380	-0.3715	-0.0945	-0.2890	-0.5440	-0.4570	-0.0989	0.0516
dez/16	-0.1252	-0.3562	-0.1371	-0.3290	0.0048	-0.3424	-0.0967	0.4271	0.1500	-0.2271	-0.1200	0.0507
jan/17	0.4491	1.0786	0.2409	0.0636	0.5291	0.0886	0.3036	-0.1105	0.5871	0.3209	0.3471	0.0490
fev/17	0.5222	0.1661	0.2111	0.0761	0.5378	0.0856	-0.0867	0.8783	0.1389	-0.5228	0.1744	0.0478
mar/17	-0.2278	-0.3613	0.1061	-0.1604	-0.2235	-0.0804	0.0943	0.0043	-0.1243	-0.0239	-0.1026	0.0454
abr/17	0.2094	0.1522	0.0106	-0.1839	0.2350	0.6711	0.2283	-0.0344	0.1928	0.7844	0.0411	0.0435
mai/17	-0.4009	-0.0191	0.1195	-0.2505	-0.4209	-0.0777	-0.0327	-0.2214	-0.3927	0.3123	-0.1645	0.0419
jun/17	0.1681	0.3267	-0.0552	-0.2052	0.0543	0.1510	-0.1957	0.1067	0.1436	-0.1062	0.0181	0.0383
jul/17	0.0786	0.3867	0.2176	0.3595	0.1219	0.0710	0.1990	0.0562	0.3710	-0.0719	0.2262	0.0378
ago/17	0.3917	0.5091	0.1596	0.1313	0.4665	0.8148	0.1957	0.1026	0.4730	0.0270	0.3161	0.0347
set/17	0.3495	-0.4419	0.2805	0.5600	0.3743	0.5357	0.1605	0.0786	0.2260	0.3905	0.2310	0.0318
out/17	-0.1348	0.0538	-0.0248	0.4457	-0.2290	-0.4810	0.0243	0.2868	-0.0405	0.2129	0.0057	0.0305

APÊNDICE B – Matriz de covariâncias

Apresentamos as matrizes de covariâncias calculadas pelos modelo de Markowitz e Sharpe. Onde cada elemento da matriz é a covariância entre os ativos da linha i e coluna j, e a diagonal principal da matriz é a variância do ativo da linha i.

Tabela 16 – Matriz de covariâncias - Modelo de média-variância

Ativos	ITUB4	VALE3	ABEV3	PETR4	ITSA4	KROT3	VIVT4	CCRO3	BBDC4	RADL3
ITUB4	0.0954	0.0139	0.0362	0.0436	0.1030	0.0814	0.0198	0.0415	0.0816	0.0134
VALE3	0.0139	0.2681	-0.0309	-0.0316	0.0087	-0.0113	0.0089	-0.0593	0.0028	-0.0407
BBDC4	0.0362	-0.0309	0.0355	0.0362	0.0413	0.0386	0.0169	0.0127	0.0380	0.0240
ABEV3	0.0436	-0.0316	0.0362	0.0907	0.0443	0.0294	0.0219	0.0219	0.0461	0.0266
PETR4	0.1030	0.0087	0.0413	0.0443	0.1155	0.0900	0.0251	0.0452	0.0942	0.0156
ITSA4	0.0814	-0.0113	0.0386	0.0294	0.0900	0.1541	0.0327	-0.0072	0.0711	0.0655
KROT3	0.0198	0.0089	0.0169	0.0219	0.0251	0.0327	0.0235	-0.0141	0.0294	0.0347
VIVT4	0.0415	-0.0593	0.0127	0.0219	0.0452	-0.0072	-0.0141	0.0896	0.0269	-0.0454
CCRO3	0.0816	0.0028	0.0380	0.0461	0.0942	0.0711	0.0294	0.0269	0.1007	0.0291
RADL3	0.0134	-0.0407	0.0240	0.0266	0.0156	0.0655	0.0347	-0.0454	0.0291	0.1276

Tabela 17 – Matriz de covariâncias - Modelo de Índice Único

Ativos	ITUB4	VALE3	ABEV3	PETR4	ITSA4	KROT3	VIVT4	CCRO3	BBDC4	RADL3
ITUB4	0.0723	0.0408	0.0336	0.0527	0.0793	0.0640	0.0268	0.0130	0.0717	0.0145
VALE3	0.0408	0.0231	0.0190	0.0298	0.0448	0.0362	0.0151	0.0074	0.0405	0.0082
BBDC4	0.0336	0.0190	0.0156	0.0245	0.0369	0.0298	0.0125	0.0061	0.0333	0.0067
ABEV3	0.0527	0.0298	0.0245	0.0385	0.0579	0.0467	0.0196	0.0095	0.0523	0.0106
PETR4	0.0793	0.0448	0.0369	0.0579	0.0871	0.0703	0.0294	0.0143	0.0787	0.0159
ITSA4	0.0640	0.0362	0.0298	0.0467	0.0703	0.0567	0.0237	0.0115	0.0635	0.0128
KROT3	0.0268	0.0151	0.0125	0.0196	0.0294	0.0237	0.0099	0.0048	0.0266	0.0054
VIVT4	0.0130	0.0074	0.0061	0.0095	0.0143	0.0115	0.0048	0.0023	0.0129	0.0026
CCRO3	0.0717	0.0405	0.0333	0.0523	0.0787	0.0635	0.0266	0.0129	0.0712	0.0144
RADL3	0.0145	0.0082	0.0067	0.0106	0.0159	0.0128	0.0054	0.0026	0.0144	0.0029