UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios de Otimização II (Curso: Matemática Industrial)
Professor : Luiz Carlos Matioli

1. Considere a função $q(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$, $A \in I\!R^{n\times n}$ simétrica definida positiva e $b, x \in I\!R^n$.
a) Encontre o gradiente da função $q(x)$.
b) Qual é o minimizador da função $q(x)$? Prove.
c) Qual é o minimizador da função $q(x)$ na reta gerada pela direção $d \in I\!R^n$ e que passa pelo ponto $\overline{x} \in I\!R^n$? Prove.
d) Considere $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$ obtido por linha de busca exata. Mostre que r^{k+1} é ortogonal a d^k, em que $r^{k+1} = b - Ax^{k+1} = r^k - \alpha_k Ad^k$.
e) No item anterior, se d^k é escolhido como $-\nabla f(x^k)$, então mostre que d^k é uma direção de descida.
2. Considere $A \in I\!R^{n\times n}$ simétrica definida positiva. Mostre que um conjunto de direções A-conjugadas é linearmente independente.

3. Considere $A \in I\!R^{n\times n}$ simétrica definida positiva. Para cada uma das afirmações abaixo, prove ou dê um contra-exemplo.
a) Se A é um múltiplo da identidade, então direções A-conjugadas são ortogonais.
b) Se A é diagonal, então direções A-conjugadas são ortogonais.
c) Autovetores de A associados a autovalores distintos são A-conjugados.

4. Considere $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$, com A e b definidos como

$$\textbf{a)}\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad \textbf{b)}\ A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -7 \\ -8 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

A partir de $x_0 = 0$, calcule, em cada um dos casos, x_1 e d_1 pelo método dos Gradientes Conjugados.

5. Considere $q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2$.
a) O minimizador de f é único? Justifique.
b) Aplique o algoritmo dos Gradientes Conjugados para encontrar o minimizador de $q(x)$.

6. Faça uma iteração do algoritmo dos Gradientes Conjugados aplicado o problema de minimizar a função

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3 + 4x_1 - 3x_3$$

a partir do ponto inicial $x_0 = 0$, encontrando x_1 e d_1. Qual é o minimizador de f?

7. Encontre o minimizador da quadrática $q(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$, onde $A \in I\!R^{3\times 3}, A > 0$ e $b \in I\!R^3$ são dados por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

utilizando o algoritmo dos Gradientes Conjugados a partir do ponto inicial $x_0 = [0\ \ 0\ \ 0]^T$.

8. Utilizando o algoritmo dos Gradientes Conjugados a partir do ponto inicial $x^0 = [1/2;\ 0]$, resolva o sistema linear $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

9. Em cada item, encontre o minimizador da quadrática utilizando o método dos Gradientes Conjutados a partir do ponto inicial dado.

a) $q(x) = x_1^2 - x_1x_2 + \dfrac{x_2^2}{2} - x_2 + 1;\quad x_0 = [0\ \ 0]^T.$

b) $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + \dfrac{3x_2^2}{2} - 3x_1 - 4x_2 - \dfrac{1}{2};\quad x_0 = [2\ \ 1]^T.$

10. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Verifique que os vetores v e w são $A-$conjugados.
b) Utilize a informação do item **a)** e o conhecimento sobre o funcionamento do algoritmo de Gradientes Conjugados para encontrar o minimizador da função $q(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ no plano gerado pelos vetores v e w.