UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - DEPTO. DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios de PNL - Professor Luiz Carlos Matioli

1. Mostre que a interseção de um número finito de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

2. Considere $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 \geq 0, x_1 \leq 1\}$ e $S = S_1 \cup S_2$. Prove que S_1 e S_2 são conjuntos convexos e que S não é um conjunto convexo. Isto mostra que a união de conjuntos convexos não é necessariamente um conjunto convexo.

3. Considere $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo e $f : C \to \mathbb{R}$ convexa. Mostre que o conjunto $\Gamma \subset C$ onde f atinge seu valor mínimo é convexo.

4. Prove que a função f é concava se e somente se $-f$ é convexa.

5. Expresse $(2,2)^T$ como uma combinação convexa de $(0,0)^T$, $(1,4)^T$ e $(3,1)^T$.

6. Considere $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$. Mostre C é um conjunto convexo.

7. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4$ é convexa.

8. Mostre que $\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{12} + \frac{x_4}{12}\right)^4 \leq \frac{x_1^4}{2} + \frac{x_2^4}{3} + \frac{x_3^4}{12} + \frac{x_4^4}{12}$.
   Sugestão: Utilize o exercício 7, t_1, t_2, t_3 e t_4 tais que $t_i \geq 0$ para $i = 1,2,3,4$ e $\sum_{i=1}^4 t_i = 1$. Depois escolha $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{1}{3}$, $t_3 = \frac{1}{12}$ e $t_4 = \frac{1}{12}$ para concluir o exercício.

9. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Mostre que o conjunto de nível $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$ é convexo.

10. Considere C um conjunto convexo e $f, g : C \to \mathbb{R}$ funções convexas.
    (a) Mostre que $f + g$ é convexa.
    (b) A diferença $f - g$ é uma função convexa? Justifique.
    (c) Que condições sobre $\alpha \in \mathbb{R}$, garantem que a função αf é convexa?

11. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + \frac{2}{3}x_2 + e^{x_1+x_2}$. Mostre que f é convexa.
    Sugestão: Determine a Hessiana de f depois use determinante.

12. Mostre que $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x_2^2}{x_1}$ é convexa.
    Sugestão. Determine a Hessiana de f depois use a definição de matriz definida positiva.

13. Mostre que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ||x||$ é convexa.

14. Mostre que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ||x||^2$ é estritamente convexa

15. Considere a função $f(x_1, x_2) = 8x_1^2 + 3x_1x_2 + 7x_2^2 - 25x_1 + 31x_2 - 29$.
    (a) Escreva f na forma $f(x) = x^T Ax + b^T x$, exibindo a matriz A e o vetor b. Calcule o gradiente e a Hessiana de dessa função.
    (b) Determine todos os pontos estacionários de f e verifique se eles são de máximos ou de minímos.

16. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = sen x_1 sen x_2 + e^{x_1+x_2}$. Mostre que $\bar{x} = 0$ é um ponto estacionário de f. Verifique se é minimizador, maximidador ou sela.

17. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + \dfrac{2}{3}x_2 + e^{x_1+x_2}$.

    (a) Mostre que $\bar{x} = \dfrac{1}{3}(1, -1)^T$ é um ponto estacionário de f.

    (b) Determine $\nabla^2 f(\bar{x})$ e verifique se $\bar{x}$ é um minimizador local.

18. Considere a e b dois números reais positivos e a função de Rosenbrock $f(x) = a(x_2 - x_1^2)^2 + b(1 - x_1)^2$. Encontre o (único) ponto estacionário de f e verifique se é minimizador local.