Universidade Federal do Paraná - Depto. de matemática
PPGM - Programa de Pós-Graduação em Matemática
Lista de exercícios de Otimização II - Professor : Luiz Carlos Matioli

1. Considere $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) = \dfrac{1}{2}\|r(x)\|^2$ e o seguinte problema de mínimos quadrados

   $$(MQ) \qquad \text{minimizar}\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

   Mostre que a direção de Gauss-Newton é de descida para f.

2. Prove que o método de Gauss-Newton coincide com o método de Newton para o problema de mínimos quadrados linear.

3. Considere a fórmula da direção, d, do método de Levenberg-Marquardt:

   $$\left[J^T J + \lambda I\right] d = -J^T r$$

   sendo $J = J(x)$ a Jacobina de f (dada no exercício 1) em x e $r = r(x)$.

   Mostre que d pode ser calculada como a solução do problema de mínimos quadrados linear, com matriz dos coeficientes dada por

   $$\begin{pmatrix} J \\ \sqrt{\lambda} I \end{pmatrix}$$

   NOTA: Os exercícios seguintes envolvem cálculos cujo objetivo é treinar KKT e métodos de mínimos quadrados.

4. Considere o problema quadrático (um subproblema de PQS)

   $$(PQ) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & \dfrac{1}{2}x^T Q x + c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

   Se Q é definida positiva para todo $x \in \mathbb{R}^n$ determine $\bar{x}$ e o correspondente vetor de multiplicadores de Lagrange que são soluções de (PQ).

5. Idem ao anterior para seguinte problema. Considere $c \in \mathbb{R}^n$ constante.

   $$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \dfrac{1}{2}x^T x + c^T x \\ \text{sujeito a} & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

6. (Problema Antílope - ver o livro: Stephen G. Nash e Ariela Sofer) Suponha os seguintes dados em relação ao Antílope:

t_i	1	2	4	5	8
y_i	3	4	6	11	20

em que o tempo é medido em anos e as populações medidas em centenas.

Suponha que o modelo seja conhecido e tenha a fómula (em geral modelo de crescimento populacional tem a forma exponencial):

$$\phi(x, t_i) = x_1 e^{x_2 t_i}$$

Considere $r(x)$ o vetor de resíduos, ou seja, cada componente $r_i(x) = \phi(x, t_i) - y_i$. Denote $f(x) = \frac{1}{2}||r(x)||^2$ e resolva os ítens seguintes:

(a) Seja $x = (2, 1)^T$, calcule $r(x)$, $f(x)$, $\nabla r(x)$, $\nabla f(x)$, $\nabla r(x) \nabla r(x)^T$ e $\nabla^2 f(x)$.

(b) Faça duas iterações do método de Gauss-Newton sem busca e utilizando $x_0 = (2, 1)^T$.

7. (ver o livro: Stephen G. Nash e Ariela Sofer) Considere o seguinte modelo de mínimos quadrados

$$y = \phi(x, t) = x_1 e^{x_2 t} + x_3 + x_4 t.$$

Determine $r(x)$, $f(x)$, $\nabla r(x)$, $\nabla f(x)$, $\nabla r(x) \nabla r(x)^T$ e $\nabla^2 f(x)$ para o seguinte conjunto de dados gerais $\{(t_i, y_i\}_{i=1}^{m}$. (Nota $f(x)$ e $r(x)$ são definidas como no exercício 1) SUGESTÃO: usar ∇f e $\nabla^2 f$ calculadas, em sala de aula, para o caso geral.

8. (ver o livro: Fletcher - Practical Methods of Optimization) Dada

$$\begin{pmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ 0.1x^2 + x - 1 \end{pmatrix},$$

aplicar o método de Gauss-Newton ao seguinte problema

$$\text{minimizar} \frac{1}{2} ||r(x)||^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

faça de 3 a 4 iterações, sem busca, iniciando em $x_0 = 1$.