UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - DEPTO. DE MATEMÁTICA

Lista de exercícios de PNL - Professor Luiz Carlos Matioli

1. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$ e $\bar{x} = (1, 0)^T$. Mostre que $d = (0, 1)^T$ é uma direção de descida para f, a partir de $\bar{x}$. Faça uma busca exata a partir de $\bar{x}$.

2. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, $\bar{x} = (1, 0)^T$ e $d = (d_1, d_2)^T$. Mostre que se $d_1 < 0$, então d é uma direção de descida para f, a partir de $\bar{x}$. Estude o caso $d_1 = 0$.

3. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$, em que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz definida positiva, $b \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que se $\nabla f(x)^T d = 0$, então a função cresce a partir de x ao longo de d;

   (b) Suponha que d é uma direção de descida para f, a partir de x. Mostre que a busca exata fornece $t^* = -\dfrac{\nabla f(x)^T d}{d^T Ad}$.

   (c) Mostre que o método de Newton aplicado a esta função converge em 1 iteração.

4. Mostre que a direção de Cauchy é de descida.

5. Mostre que se a Hessina de f é definida positiva, então a direção de Newton para minimizar uma função é de descida.

6. Considere $f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^4 + \frac{1}{2}x_2^2$.

   (a) Determine e classifique os pontos estacionários de f;

   (b) A partir de $x^0 = (1, 0)^T$ faça uma iteração do método do gradiente.

7. Considere um número real $a > 0$. Mostre que o método de Newton para resolver a equação $x^2 - a = 0$ é dado por

$$x^{k+1} = \frac{1}{2}\left(x^k + \frac{a}{x^k}\right).$$

   Faça três iterações deste método para calcular uma aproximação para $\sqrt{5}$, iniciando em $x_0 = 2$.

8. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4 - x^2$.

   (a) Determine os zeros de f;

   (b) Determine e classifique os pontos estacionários de f;

   (c) Desenhe o gráfico de f;

   (d) Determine quais devem ser os pontos iniciais tal que o método de Newton para equações falhe. (Sugestão utilize o passo de Newton dado por $x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = -x$).

9. Considere $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(1 - x_1)^2$. Qual é o minimizador de f? Faça uma iteração do método de Newton para minimizar f a partir de $x^0 = (2, 2)^T$. É um bom passo? Antes de decidir, calcule $f(x^0)$ e $f(x^1)$.

10. Considere $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica. Mostre que

(a) A matriz de atualização DFP (Davidon, Fletcher e Powell) dada por

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y^k - B_k s^k)(y^k - B_k s^k)^T}{(y^k - B_k s^k)^T s^k}$$

é simétrica.

(b) B_{k+1} satisfaz a equação secante $B_{k+1} s^k = y^k$.

11. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{2} x^T Q x - b^T x$ com

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

.

(a) Mostre que o minimizador de f é $\bar{x} = (-4, -3, -2)^T$.

(b) Usando busca exata, faça uma iteração do Método DFP, iniciando em $x^0 = (0, 0, 0)^T$ e $B_0 = I$ em que I é a matriz identidade. Determine também a atualização B_1.

(c) Idem para o Método BFGS.