UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios 3 (matrizes e sistemas lineares) - Análise Numérica I
Professor Luiz Carlos Matioli

1. Encontre α de forma que $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ seja definida positiva.

2. Encontre α e β de forma $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha & 1 \\ 2\beta & 5 & 4 \\ \beta & 2 & \alpha \end{pmatrix}$ seja estritamente diagonalmente dominante.

3. Construa uma matriz A que não seja simétrica, mas para a qual $x^T Ax > 0$ para todo $x \neq 0$.

4. Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz definida positiva, então $a_{ii} > 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

5. Suponha que a matriz definida positiva $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tenha fatoração de Cholesky $A = LL^T$ e também a fatoração $A = \hat{L}D\hat{L}^T$, em que D é uma matriz diagonal com elementos positivos na diagonal, $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}$. Considere $D^{1/2}$ a matriz diagonal com elementos diagonais $\sqrt{d_{11}}, \sqrt{d_{22}}, \ldots, \sqrt{d_{nn}}$. Mostre que:

   (a) $D = D^{1/2}D^{1/2}$.

   (b) $L = \hat{L}D^{1/2}$.

6. (a) Mostre que a inversa da matriz $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz $M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}$, em que m_{21} e m_{31} são os multiplicadores da Eliminação de Gauss do passo 1.

   (b) Idem para M_2.

   (c) Considere $L = M_1^{-1}M_2^{-1}$. Determine a inversa de L.

   (d) Generalize o item anterior para o caso $n \times n$, Descrevendo as matrizes L e L^{-1}.