UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - DEPTO. DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios de PNL - Professor Luiz Carlos Matioli

1. Escreva as condições de KKT para o problema com m restrições de igualdades e p restrições de desigualdades.

2. Considere o problema com restrição de caixa

$$(PC) \qquad \begin{array}{cc} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & \ell \leq x \leq u \end{array}$$

em que ℓ e u são vetores limites inferiores e superiores, tal que $\ell < u$. Se $\bar{x}$ é um minimizador local do problema (PC), mostre que:

$$\text{se } \bar{x}_i = \ell_i, \text{ então } \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \geq 0,$$

$$\text{se } \bar{x}_i = u_i, \text{ então } \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \leq 0,$$

$$\text{se } \ell_i < \bar{x}_i < u_i, \text{ então } \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = 0.$$

Sugestão: Coloque o problema na forma vista em sala e utilize KKT.

3. Utilizando KKT avalie a(s) solução(ões) do seguintes problemas

$$(P1) \qquad \begin{array}{cc} \text{minimizar} & x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{array}$$

$$(P2) \qquad \begin{array}{cc} \text{minimizar} & -6x_1 - 4x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 13 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{array}$$

e

$$(P3) \qquad \begin{array}{cc} \text{minimizar} & e^{3x_1+4x_2} \\ \text{sujeito a} & x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0. \end{array}$$

4. Por volta de 1960, o economista Markowitz recebeu o nobel em economia por sugerir um modelo matemático para minimizar uma carteira de Investimento. O modelo básico proposto por Markowitz é quadrático da forma:

$$(P) \qquad \begin{array}{cc} \text{minimizar} & \frac{1}{2}x^TQx \\ \text{sujeito a} & x^Te = 1 \end{array}$$

sendo que $e = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ e Q é uma matriz simétrica definida positiva (conhecida como matriz de covariâncias).

Utilizando KKT mostre que a solução do problema é: $\bar{x} = -\lambda Q^{-1}e$ e $\bar{\lambda} = -\frac{1}{e^TQ^{-1}e}$, em que $\bar{x}$ é a solução (na linguagem economica é a carteira ótima, ou seja, que tem o menor risco) e $\bar{\lambda}$ é o multiplicador de Lagrange ótimo.

5. Considere no exercício anterior a matriz de covariâncias dada por:

$$Q = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}.$$

(a) Reescreva o problema (P) utilizando esta matriz Q.

(b) Mostre que a solução ótima do problema (P) reescrito no item (a) deste exercício é: $\bar{\lambda} = -\dfrac{36}{5}$ e $\bar{x} = [0.8; 0.2]^T$ (na linguagem economica $\bar{x}$ é a carteira ótima e neste caso você estará investindo 80% no ativo 1 e 20% no ativo 2).

6. Considere o problema de programação não linear

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \dfrac{1}{2}x^T x + c^T x \\ \text{sujeito a} & x \leq 0. \end{array}$$

(a) Se $x \in \mathbb{R}^2$ e $c = [1; 1]^T$, encontre a solução ótima por KKT.

(b) Idem ao item anterior para $c \in \mathbb{R}^2$ qualquer (neste caso a solução fica em função da constante c.

(c) Se $x \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}^n$ é constante, determine a solução em função da constante c.

7. Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica definida positiva, b e c vetores em $\mathbb{R}^n$. Utilizando KKT analise a solução do seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \dfrac{1}{2}x^T A x + b^T x \\ \text{sujeito a} & c^T x = 0 \end{array}$$

8. Utilizando o exercício anterior, resolva o seguinte problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 - 5x_5^2 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{array}$$