UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios de Otimização II (PPGMA)
Professor : Luiz Carlos Matioli

Para as questões seguintes utilize os problemas primal e dual dados, respectivamente, por:

$$(P)\qquad \begin{array}{cc} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & g(x) \leq 0 \\ & x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

$$(D)\qquad \begin{array}{cc} \text{maximizar} & \theta(\mu) \\ \text{sujeito a} & \mu \geq 0 \end{array}$$

sendo $g \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^m \longmapsto \theta(\mu) = \inf\{\ell(x,\mu) : x \in X\}$ e ℓ é a função Lagrangeana associada ao problema (P).

NOTA: Considere que o problema (P) e o problema (D) possuem solução finita.

1. Mostre que a função θ do problema (D) é concava.

2. Mostre que o conjunto $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m : x \geq 0\}$ é convexo. Conclua que o problema $\min\{-\theta(\mu) : \mu \geq 0\}$ é convexo.

3. Encontre o dual do seguinte problema de programação linear (cuidado, veja bem como estão os formatos dos problemas primal (P) e dual (D) acima)
$$\begin{array}{cc} \text{maximizar} & b^T y \\ \text{sujeito a} & A^T y \leq c \\ & y \in \mathbb{R}^m \end{array}$$
em que b é um vetor em $\mathbb{R}^m$, c é um vetor em $\mathbb{R}^n$ e A uma matrix real com m linhas e n colunas.

4. (Solodov vol.1 pg. 230) Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica definida positiva, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Determine o problema dual do seguinte problema quadrático
$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & \frac{1}{2}x^T A x + c^T x \\ \text{sujeito a} & Bx \leq b \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

5. Conclua, do exercício anterior, que o dual de um problema de programação quadrática é um problema de programação quadrática. Além disso, prove que a única solução $\bar{x}$ do problema primal pode ser obtida através de qualquer solução $\bar{\mu}$ do problema dual via a seguinte relação

$$\bar{x} = -A^{-1}(c + B^T \bar{\mu})$$

6. Idem ao problema 4 para o seguinte problema

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & \frac{1}{2}x^T A x + c^T x \\ \text{sujeito a} & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

7. Idem ao problema 4 para seguinte problema

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & \frac{1}{2}x^T x + c^T x \\ \text{sujeito a} & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

8. Mostre que não existe gap de dualidade (o gap é igual a zero) para o problema 7 acima.

9. Considere no problema 4 a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, o vetor $c = [0 \;\; 0]^T$ a matriz $B = (2 \;\; 1)$ e a constante $b = -4$. Determine: (i) a solução do problema primal; (ii) a solução do problema dual e (iii) o gap de dualidade.

10. Considere o seguinte problema primal

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & -x_1 - x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + 2x_2 - 3 \geq 0 \\ & x_1, x_2 = 0, 1, 2 \text{ ou } 3. \end{array}$$

Determine: (i) a solução do problema primal; (ii) a solução do problema dual e (iii) o gap de dualidade.

11. (Solodov vol. 1 pg. 234) Considere no problema primal (P), definido acima, $X = (0, +\infty]$, $f(x) = 1/x$ e $g(x) = -x$. Mostre que o problema primal não tem solução, o problema dual tem e não há brecha (gap) de dualidade.

12. (Solodov vol. 1 pg. 234) Considere no problema primal (P), definido acima, $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$. Mostre que o problema primal tem solução, o problema dual não tem e não há brecha de dualidade.

13. (Solodov vol. 1 pg. 235) Considere no problema primal (P), definido acima, $X = \{0, 1\}$, $f(x) = -x$ e $g(x) = x - 1/2$. Mostre que os problemas primal e dual tem solução e há brecha de dualidade.

    Mostre os seguintes corolários do teorema de dualidade fraca, demonstrado em sala, para o problema primal geral definido em sala.

    Corolário 1: $inf\{f(x) : x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} \geq sup\{\theta(u, v) : u \geq 0\}$.

    Corolário 2: Considere $f(\bar{x}) \leq \theta(\bar{u}, \bar{v})$ com $\bar{u} \geq 0$ e $\bar{x} \in \{X : g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$, então $\bar{x}$ e $(\bar{u}, \bar{v})$ resolvem o problema primal e dual, respectivamente.

    Corolário 3: Se $inf\{f(x) : x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} = -\infty$ então $\theta(u, v) = -\infty$, para todo $u \geq 0$.

    Corolário 4: Se $sup\{\theta(u, v) : u \geq 0\} = +\infty$ então o problema primal não tem solução viável.

14. Mostre que não existe ponto de sela para o problema

$$\begin{array}{rc} \text{minimizar} & -x^2 \\ \text{sujeito a} & 2x - 1 \leq 0 \\ & 0 \leq x \leq 1 \\ & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

15. Mostre que se o problema (P), dado no início desta lista, é convexo então a função Lagrangeana associada a (P) também é convexa na variável x.