

**Exemplo**

Seja a equação:

$$2x + 3y + z - 6 = 0$$

ou:

$$2x + 3y + z = 6$$

Dividindo ambos os membros por 6, vem:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$$

e os pontos de interseção com os eixos dos  $x$ , dos  $y$  e dos  $z$  são  $A_1(3, 0, 0)$ ,  $A_2(0, 2, 0)$  e  $A_3(0, 0, 6)$ , respectivamente, conforme já vimos.

**5.9 Problemas Propostos**

1) Seja o plano

$$\pi: 2x - y + 3z + 1 = 0$$

Calcular:

- O ponto de  $\pi$  que tem abscissa 4 e ordenada 3;
- O ponto de  $\pi$  que tem abscissa 1 e cota 2;
- O valor de  $k$  para que o ponto  $P(2, k + 1, k)$  pertença a  $\pi$ ;
- O ponto de abscissa zero e cuja ordenada é o dobro da cota.

Nos problemas 2 a 10, determinar a equação geral do plano

- paralelo ao plano  $\pi: 2x - 3y - z + 5 = 0$  e que contém o ponto  $A(4, -1, 2)$ ;
- perpendicular à reta

$$r: \begin{cases} x = 2y - 3 \\ z = -y + 1 \end{cases}$$

e que contém o ponto  $A(1, 2, 3)$ ;

- 4) mediador do segmento de extremos  $A(1, -2, 6)$  e  $B(3, 0, 0)$ ;
- 5) mediador do segmento de extremos  $A(5, -1, 4)$  e  $B(-1, -7, 1)$ ;
- 6) paralelo ao eixo dos  $z$  e que contém os pontos  $A(0, 3, 1)$  e  $B(2, 0, -1)$ ;
- 7) paralelo ao eixo dos  $x$  e que contém os pontos  $A(-2, 0, 2)$  e  $B(0, -2, 1)$ ;
- 8) paralelo ao eixo dos  $y$  e que contém os pontos  $A(2, 1, 0)$  e  $B(0, 2, 1)$ ;
- 9) paralelo ao plano  $xOy$  e que contém o ponto  $A(5, -2, 3)$ ;
- 10) perpendicular ao eixo dos  $y$  e que contém o ponto  $A(3, 4, -1)$ .

Nos problemas 11 a 14, escrever a equação geral do plano determinado pelos pontos:

- 11)  $A(-1, 2, 0)$ ,  $B(2, -1, 1)$  e  $C(1, 1, -1)$ .
- 12)  $A(2, 1, 0)$ ,  $B(-4, -2, -1)$  e  $C(0, 0, 1)$ .
- 13)  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(0, 3, 0)$  e  $C(0, 2, 5)$ .
- 14)  $A(2, 1, 3)$ ,  $B(-3, -1, 3)$  e  $C(4, 2, 3)$ .
- 15) Determinar o valor de  $\alpha$  para que os pontos  $A(\alpha, -1, 5)$ ,  $B(7, 2, 1)$ ,  $C(-1, -3, -1)$  e  $D(1, 0, 3)$  sejam coplanares.

Nos problemas de 16 a 19, determinar a equação geral do plano nos seguintes casos:

- 16) O plano passa pelo ponto  $A(6, 0, -2)$  e é paralelo aos vetores  $\vec{i}$  e  $-2\vec{j} + \vec{k}$ .
- 17) O plano passa pelos pontos  $A(-3, 1, -2)$  e  $B(-1, 2, 1)$  e é paralelo ao vetor  $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$ .
- 18) O plano contém os pontos  $A(1, -2, 2)$  e  $B(-3, 1, -2)$  e é perpendicular ao plano  $\pi: 2x + y - z + 8 = 0$ .
- 19) O plano contém o ponto  $A(4, 1, 0)$  e é perpendicular aos planos  $\pi_1: 2x - y - 4z - 6 = 0$  e  $\pi_2: x + y + 2z - 3 = 0$ .

Nos Problemas 20 a 23, determinar a equação geral do plano que contém os seguintes pares de retas:

$$20) \quad r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases} \quad e \quad s: \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{z-1}{5} \\ y = -1 \end{cases}$$

$$21) \quad r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1} \quad e \quad s: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$$

$$22) \quad r: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -t \\ z = 4 \end{cases} \quad e \quad s: \begin{cases} \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-2} ; z = 0 \end{cases}$$

$$23) \quad r: \quad x = z; y = -3 \quad e \quad s: \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Nos problemas 24 a 28, determinar a equação geral do plano que contém o ponto e a reta dados:

$$24) \quad A(3, -1, 2) \quad e \quad r: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

$$25) \quad A(3, -2, -1) \quad e \quad r: \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 7 = 0 \end{cases}$$

26)  $A(1, 2, 1)$  e a reta interseção do plano  $\pi: x - 2y + z - 3 = 0$  com o plano  $yOz$ .

27)  $A(1, -1, 2)$  e o eixo dos  $z$ .

28)  $A(1, -2, 1)$  e o eixo dos  $x$ .

29) Estabelecer as equações dos planos bissetores dos ângulos formados pelos planos  $xOz$  e  $yOz$ .

- 30) Representar graficamente os planos de equações:
- a)  $x + y - 3 = 0$                       c)  $2y + 3z - 6 = 0$   
b)  $z = -2$                               d)  $3x + 4y + 2z - 12 = 0$
- 31) Dada a equação geral do plano  $\pi: 3x - 2y - z - 6 = 0$ , determinar um sistema de equações paramétricas de  $\pi$ .
- 32) Estabelecer equações paramétricas do plano determinado pelos pontos  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(2, 1, 3)$  e  $C(-1, -2, 4)$ .
- 33) Determinar o ângulo entre os seguintes planos:
- a)  $\pi_1: x + 2y + z - 10 = 0$  e  $\pi_2: 2x + y - z + 1 = 0$   
b)  $\pi_1: 2x - 2y + 1 = 0$  e  $\pi_2: 2x - y - z = 0$   
c)  $\pi_1: 3x + 2y - 6 = 0$  e  $\pi_2: \text{plano } xOz$   
d)  $\pi_1: 3x + 2y - 6 = 0$  e  $\pi_2: \text{plano } yOz$ .
- 34) Determinar o valor de  $m$  para que seja de  $30^\circ$  o ângulo entre os planos
- $\pi_1: x + my + 2z - 7 = 0$  e  
 $\pi_2: 4x + 5y + 3z - 2 = 0$ .
- 35) Determinar  $a$  e  $b$ , de modo que os planos
- $\pi_1: ax + by + 4z - 1 = 0$  e  $\pi_2: 3x - 5y - 2z + 5 = 0$
- sejam paralelos.
- 36) Determinar  $m$  de modo que os planos
- $\pi_1: 2mx + 2y - z = 0$  e  
 $\pi_2: 3x - my + 2z - 1 = 0$
- sejam perpendiculares.

- 37) Determinar o ângulo que a reta

$$r: \begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{5} \end{cases}$$

forma com o plano  $\pi: 2x - y + 7z - 1 = 0$ .

- 38) Determinar o ângulo formado pela reta

$$r: \begin{cases} y = -2x \\ z = 2x + 1 \end{cases}$$

e o plano  $\pi: x - y + 5 = 0$ .

- 39) Determinar as equações reduzidas, em termos de
- $x$
- , da reta
- $r$
- que passa pelo ponto
- $A(2, -1, 4)$
- e é perpendicular ao plano
- $\pi: x - 3y + 2z - 1 = 0$
- .

- 40) Determinar as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto
- $A(-1, 0, 0)$
- e é paralela a cada um dos planos

$$\pi_1: 2x - y - z + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: x + 3y + z - 5 = 0.$$

- 41) Seja o paralelepípedo de dimensões 2, 3 e 4, representado a seguir.

Determinar:

a) as equações da reta que contém o segmento AF;

b) as equações da reta que contém o segmento AB;

c) as equações da reta que contém o segmento EF;

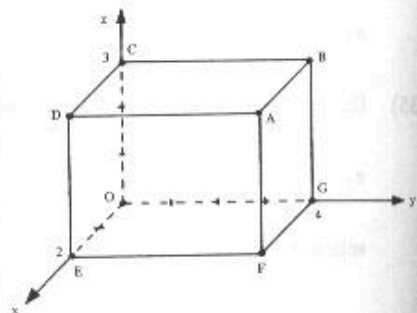
d) as equações da reta que contém o segmento AC;

e) as equações da reta que passa pelos pontos O e F;

f) as equações paramétricas da reta que contém o segmento OA;

g) a equação do plano que contém a face ABCD;

h) a equação do plano que contém a face ABGF.



42) Mostrar que a reta

$$r: \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -2t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

é paralela ao plano  $\pi: x + 2y + z + 3 = 0$ .

43) Mostrar que a reta

$$r: \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} \\ z = 0 \end{cases}$$

está contida no plano  $\pi: 2x + y - 3z - 1 = 0$ .

44) Calcular os valores de  $m$  e  $n$  para que a reta

$$r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 4 \end{cases}$$

esteja contida no plano  $\pi: nx + my - z - 2 = 0$ .

Nos problemas 45 e 46, estabelecer as equações reduzidas, sendo  $x$  a variável independente, da reta interseção dos planos:

45)  $\pi_1: 3x - y + z - 3 = 0$  e  $\pi_2: x + 3y + 2z + 4 = 0$

46)  $\pi_1: 3x - 2y - z - 1 = 0$  e  $\pi_2: x + 2y - z - 7 = 0$

Nos problemas 47 e 48, determinar as equações paramétricas da reta interseção dos planos:

47)  $\pi_1: 2x - y - 3z - 5 = 0$  e  $\pi_2: x + y - z - 3 = 0$

48)  $\pi_1: 2x + y - 2 = 0$  e  $\pi_2: z = 3$

Nos problemas 49 a 51, determinar o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\pi$  nos seguintes casos:

49)  $r: x = 2y - 3 = \frac{2z - 3}{3}$  e  $\pi: 2x - y + 3z - 9 = 0$

50)  $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 5 \end{cases}$  e  $\pi: x = 3$

51)  $r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = -t \end{cases}$  e  $\pi: 2x + y - z - 4 = 0$

52) Determinar os pontos de interseção da reta

$$r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$$

com os planos coordenados.

53) Determinar os pontos de interseção do plano

$$\pi: 2x + 4y - z - 4 = 0$$

com os eixos coordenados e, também, a reta interseção deste plano com o plano  $xOy$ .

54) Determinar o ponto de interseção das retas

$$r: \begin{cases} 3x + y + 6z + 13 = 0 \\ 9x + 3y + 5z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 1 \\ 4x + y - z - 9 = 0 \end{cases}$$

Nos problemas 55 e 56, determinar a equação geral do plano que contém o ponto  $A$  e a reta interseção dos planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .

55)  $A(2, 0, 1)$ ,  $\pi_1: 2x - 3y - 5z = 0$  e  $\pi_2: x - y = 0$ .

56)  $A(-1, 2, 0)$ ,  $\pi_1: 2x - y = 0$  e  $\pi_2: x + y - z - 4 = 0$ .

57) Seja a reta

$$r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

a) quais as equações reduzidas da projeção de  $r$  sobre o plano  $xOy$ ? E sobre o plano  $xOz$ ?

b) qual o ângulo que  $r$  forma com o plano  $xOy$ ?

58) Estabelecer as equações simétricas da reta que passa pelo ponto  $A(3, 6, 4)$ , intercepta o eixo  $Oz$  e é paralela ao plano

$$\pi: x - 3y + 5z - 6 = 0.$$

59) O plano  $\pi: x + y - z - 2 = 0$  intercepta os eixos cartesianos nos pontos  $A, B$  e  $C$ . Calcular a área do triângulo  $ABC$ .

60) Calcular o volume do tetraedro limitado pelo plano  $3x + 2y - 4z - 12 = 0$  e pelos planos coordenados.

### 5.9.1 Respostas de Problemas Propostos

- 1) a)  $(4, 3, -2)$       c)  $k = -2$   
 b)  $(1, 9, 2)$       d)  $(0, -2, -1)$

- 2)  $2x - 3y - z - 9 = 0$       9)  $z = 3$   
 3)  $2x + y - z - 1 = 0$       10)  $y = 4$   
 4)  $x + y - 3z + 8 = 0$       11)  $4x + 5y + 3z - 6 = 0$   
 5)  $4x + 4y + 2z + 3 = 0$       12)  $x - 2y = 0$   
 6)  $3x + 2y - 6 = 0$       13)  $x = 0$   
 7)  $y - 2z + 4 = 0$       14)  $z = 3$   
 8)  $x + 2z - 2 = 0$       15)  $\alpha = -3$



16)  $y + 2z + 4 = 0$

17)  $3x - 12y + 2z + 25 = 0$

18)  $x - 12y - 10z - 5 = 0$

19)  $2x - 8y + 3z = 0$

20)  $5x - 4y - 3z - 6 = 0$

21)  $5x - 2y + 4z - 21 = 0$

22)  $2x + 2y + z + 2 = 0$

23)  $2x + y - 2z + 3 = 0$

24)  $x + y - 2 = 0$

25)  $2x + 3y + z + 1 = 0$

26)  $6x - 2y + z - 3 = 0$

27)  $x + y = 0$

28)  $y + 2z = 0$

29)  $x + y = 0$  e  $x - y = 0$

31) Existem infinitos sistemas. Um deles é:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -h \\ z = -6 + 2h + 3t; h, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$32) \begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 3h + 4t \end{cases}$$

33) a)  $60^\circ$

b)  $30^\circ$

c)  $\arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$

d)  $\arccos \frac{3}{\sqrt{13}}$

34) 1 ou 7

35) a = -6

b = 10

36)  $\frac{1}{2}$

37)  $60^\circ$

38)  $45^\circ$

39) 
$$\begin{cases} y = -3x + 5 \\ z = 2x \end{cases}$$

40) 
$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t \\ z = 7t \end{cases}$$

41) a) 
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = 3 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = 3t \end{cases}$$

$$g) \quad z = 3$$

$$h) \quad y = 4$$

$$44) \quad m = -2$$

$$n = 3$$

$$45) \begin{cases} y = x - 2 \\ z = -2x + 1 \end{cases}$$

$$46) \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ z = 2x - 4 \end{cases}$$

$$47) \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

$$48) \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 \end{cases}$$

$$49) \quad (1, 2, 3)$$

$$50) \quad (3, 4, 5)$$

$$51) \quad (3, -5, -3)$$

$$52) \quad (2, 1, 0), \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), (0, -3, 2)$$

$$53) \quad (2, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -4)$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

$$54) \quad (1, 2, -3)$$

$$55) \quad 5x - 7y - 10z = 0$$

$$56) \quad 2x - 7y + 4z + 16 = 0$$

$$57) \quad a) \begin{cases} y = -2x + 7 \\ z = 0 \end{cases} \quad e) \begin{cases} z = 2x - 7 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$b) \quad \arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$58) \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1} \quad \text{ou}$$

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-4}{1}$$

$$59) \quad 2\sqrt{3} \text{ u.a.}$$

$$60) \quad 12 \text{ u.v.}$$