UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da Avaliação Final de CM044 - Turma B - 12-Dez-2017

1. Dada a função $f(z) = \dfrac{\text{sen }(2\pi z)}{(2z+1)^4}$, calcular $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$ onde Γ é a curva $|z+i| = \sqrt{2}$, orientada no sentido anti-horário.

   Solução: Tem-se que $f(z) = \dfrac{1}{2^4}\dfrac{g(z)}{(z+1/2)^4}$, onde $g(z) = \text{sen } 2\pi z$ é analítica sobre a curva e na região interna à curva Γ (a circunferência de centro $-i$ e raio $\sqrt{2}$); além disso, nota-se que $z_0 = -\frac{1}{2}$ está no interior da região limitado pela mesma curva. Também, tem-se que:

$$g'(z) = 2\pi \cos 2\pi z\,; \quad g''(z) = -(2\pi)^2 \text{ sen } 2\pi z\,; \quad g'''(z) = -(2\pi)^3 \cos 2\pi z.$$

   Daí, utilizando a *Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas* segue que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \frac{1}{2^4}\int_\Gamma \frac{g(z)}{(z-(-\frac{1}{2}))^4}\,dz = \frac{1}{2^4}\cdot\frac{2\pi i}{3!}g^{(3)}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2^4}\cdot\frac{2\pi i}{3!}\cdot(2\pi)^3\cdot\ \cos\pi = \frac{\pi^4 i}{6}.$$

2. Determinar todas as funções analíticas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que $\text{Im}[f(z)] = 2(xy + e^x \text{ sen } y)$.

   Solução: Denote $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, com $v(x,y) = 2(xy + e^x \text{ sen } y)$. Admitindo-se que f é analítica então são satisfeitas as equações de *Cauchy-Riemann*:

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \qquad \text{e} \qquad u_y(x,y) = -v_x(x,y), \qquad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   Portanto, deve ser:

$$u_x(x,y) = 2(x + e^x \cos y) \qquad \text{e} \qquad u_y(x,y) = -2[y + e^x \text{ sen } y], \qquad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   Daí, segue que:

$$u(x,y) = \int (2x + 2e^x \cos y)\,dx = x^2 + 2e^x \cos y + \varphi(y)$$
$$\Rightarrow u_y(x,y) = -2e^x \text{ sen } y + \varphi'(y) = -(2e^x \text{ sen } y - \varphi'(y)) = -v_x(x,y) = -(2y + 2e^x \text{ sen } y)$$
$$\Rightarrow -\varphi'(y) = 2y \Rightarrow \varphi'(y) = -2y \Rightarrow \varphi(y) = -y^2 + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$
$$\Rightarrow u(x,y) = x^2 + 2e^x \cos y - y^2 + c$$

   e assim, deve-se ter:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) = \left(x^2 + 2e^x \cos y - y^2 + c\right) + i\,(2xy + 2\,e^x \text{ sen } y)$$
$$\left(x^2 + 2xy\,i - y^2\right) + 2\,e^x(\cos y + i\ \text{ sen } y) + c = (x+iy)^2 + 2e^x \cdot e^{iy} + c = z^2 + 2e^z + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

3. Dada a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z-8}$, determine sua série de *Taylor* em torno de $z_0 = i$ e o raio de convergência da mesma.

Solução: Vê-se que $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z-8} = \dfrac{1}{(z+4)(z-2)}$. Utilizemos frações parciais para expressar f.

$$\frac{1}{(z+4)(z-2)} = \frac{a}{z+4} + \frac{b}{z-2} = \frac{a(z-2)+b(z+4)}{(z+4)(z-2)} = \frac{(a+b)z+(4b-2a)}{(z+4)(z-2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \Rightarrow a=-b \Rightarrow a=-\frac{1}{6} \\ 4b-2a=1 \Rightarrow 4b+2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{6} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(z) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z+4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-2}$$

Daí, segue que:

$$(I) \qquad \frac{1}{z+4} = \frac{1}{z+4+i-i} = \frac{1}{(4+i)+(z-i)} = \frac{1}{4+i}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z-i}{4+i})}$$

$$= \frac{1}{4+i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(4+i)^n}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(4+i)^{n+1}}(z-i)^n,$$

série esta com raio de convergência igual $|4+i| = \sqrt{17}$ (pois deve-se ter $\frac{|z-i|}{|4+i|} < 1$).

$$(II) \quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-i+i-2} = \frac{1}{(i-2)(1-(-\frac{z-i}{i-2}))} = \frac{1}{i-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(i-2)^n}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(i-2)^{n+1}}(z-i)^n,$$

cujo raio de convergência é $|i-2| = \sqrt{5}$ (pois deve-se ter $\frac{|z-i|}{|i-2|} < 1$). Logo, por (I) e (II) conclui-se que:

$$f(z) = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(4+i)^{n+1}}(z-i)^n + \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(i-2)^{n+1}}(z-i)^n,$$

no disco $|z-i| < \sqrt{5}$, ou seja, o raio de convergência é $\sqrt{5}$.

4. Dada a função $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+z-2}$, determine $\operatorname{Res}_{z=-2} f(z)$ das seguintes formas:
   (a) Através da série de *Laurent* em $z_0 = -2$;
   (b) Através da *Fórmula dos Resíduos*.

Solução: (a) Inicialmente, nota-se que

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+z-2} = \frac{z+1}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{(z+2)}\cdot\frac{z-1+2}{z-1} = \frac{1}{(z+2)}\left[1+\frac{2}{z-1}\right].$$

Dado que $1+\frac{2}{z-1}$ é analítica em $z_0 = -2$, sua série de *Laurent* no disco centrado em tal ponto é sua série de *Taylor*; daí, segue que:

$$f(z) = \frac{1}{(z-(-2))}\left[1+\frac{2}{z-1}\right] = \frac{1}{(z-(-2))}\left[1+\frac{2}{z+2-3}\right] = \frac{1}{(z-(-2))}\left[1+\frac{2}{(-3)}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+2}{3}}\right]$$

$$= \frac{1}{(z+2)}\left[1-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+2)^n}{3^n}\right] = \frac{1}{(z+2)}\left[1-\frac{2}{3}-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{1/3}{(z+2)} - \frac{2}{(z+2)}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}} = \frac{1/3}{(z+2)} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^{n+1}}(z+2)^{n-1},$$

na região $0 < |z+2| < 3$; portanto, $\operatorname{Res}_{z=-2} f(z) = 1/3$.

(b) Dado que $z_0 = -2$ é pólo simples de f, que que:

$$\operatorname*{Res}_{z=-2} f(z) = \lim_{z\to -2}\left[(z-(-2))\,\frac{z+1}{(z+2)(z-1)}\right] = \lim_{z\to -2}\frac{z+1}{z-1} = 1/3.$$

5. Seja a função $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, para $x \in [0,\pi]$. Determine a série de *Fourier* da extensão par de f ao intervalo $[-\pi,\pi]$.

Solução: Denotando-se por $f_P(x)$ a extensão par de f ao intervalo $[-\pi,\pi]$, deve-se ter que:

$$f_P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx,$$

onde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_P(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx\,dx, \qquad \text{para } n = 0,1,2,\cdots.$$

Logo, deve-se ter:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\cos x\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot[-(-1)+1] = \frac{4}{\pi};$$

e lembrando que $2 \operatorname{sen} a \cos b = \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)$, obtem-se que:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\operatorname{sen} x\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} 2x\,dx = -\frac{1}{\pi}\,\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2\pi}[1-1] = 0,$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(2\operatorname{sen} x\cos nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\operatorname{sen}(1+n)x + \operatorname{sen}(1-n)x]\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(1+n)x}{1+n}\Big|_0^{\pi} - \frac{\cos(1-n)x}{1-n}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1+n}(-(-1)^{1+n}+1) - \frac{1}{1-n}((-1)^{1-n}-1)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1+n}[(-1)^n+1] + \frac{1}{1-n}[(-1)^n+1]\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1-n}\right][(-1)^n+1] \\
&= \frac{[(-1)^n+1]}{\pi}\left[\frac{1-n+1+n}{(1+n)(1-n)}\right] = \frac{2[(-1)^n+1]}{\pi(1-n^2)}, \qquad \text{para } n = 2,3,\cdots.
\end{aligned}$$

Desta forma, deve ser:

$$a_{2k} = \frac{4}{\pi(1-(2k)^2)} \qquad \text{e} \qquad a_{2k+1} = 0, \qquad \text{para } k = 0,1,2,\cdots,$$

e daí, conclui-se que

$$f_P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k}\cos 2kx = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-4k^2}\cos 2kx,$$

para todo $x \in [-\pi,\pi]$.

6. Considere o sistema

$$\begin{cases}
u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \text{ para todo } (x,t) \in [0,2]\times[0,+\infty) & (i) \\
u(0,t) = 0 = u(2,t), \text{ para todo } t \in [0,+\infty) & (ii) \\
u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 0, \text{ para todo } x \in [0,2]. & (iii)
\end{cases}$$

(a) Determine uma solução $u(x,t)$ para tal sistema;

(b) Mostre que $u(x,t)$ satisfaz às condições (i), (ii) e (iii).

Solução: (a) Dado que $u(x,0) = F(x) = x$ e $u_t(x,0) = 0$, para todo $x \in [0,2]$ então escolhendo-se os coeficientes a_n na forma

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} F_I(x)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ (e onde F_I denota a extensão ímpar de F ao intervalo $[-2,2]$), tem-se que a função

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\ \cos\ \frac{n\pi t}{2}$$

será solução do problema dado. Sendo assim, deve ser:

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} F_I(x)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} F(x)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_{0}^{2} x\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx =$$

$$\left[-\frac{2x}{n\pi}\ \cos\ \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\ \frac{n\pi x}{2}\,dx\right] = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{4}{(n\pi)^2}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Portanto, deve ser

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\ \cos\ \frac{n\pi t}{2},$$

para todo $(x,t) \in [0,2] \times [0,+\infty)$.

(b) Tem-se que:

$$u_t(x,t) = \frac{4}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\cdot\ \cos\ \frac{n\pi t}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\cdot\ \text{sen}\ \frac{n\pi t}{2}\cdot\frac{n\pi}{2};$$

$$u_{tt}(x,t) = \frac{4}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\cdot\ \text{sen}\ \frac{n\pi t}{2}\cdot\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\cdot\ \cos\ \frac{n\pi t}{2}\cdot(\frac{n\pi}{2})^2;$$

$$u_x(x,t) = \frac{4}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\cdot\ \cos\ \frac{n\pi t}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \cos\ \frac{n\pi x}{2}\cdot\frac{n\pi}{2}\cdot\ \cos\ \frac{n\pi t}{2}$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{4}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \cos\ \frac{n\pi x}{2}\cdot\frac{n\pi}{2}\cdot\ \cos\ \frac{n\pi t}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\cdot(\frac{n\pi}{2})^2\cdot\ \cos\ \frac{n\pi t}{2}$$

Portanto, tem-se que $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$, ou seja, $u(x,t)$ satisfaz (i). Tem-se também que:

$$u(0,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \text{sen}\ 0\ \cos\ \frac{n\pi t}{2} = 0 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \text{sen}\ n\pi\ \cos\ \frac{n\pi t}{2},$$

para todo $t \in [0,+\infty)$, ou seja, $u(x,t)$ satisfaz (ii).

Finalmente,

$$u(x,0) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\ \cos\ 0 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2} = F(x),$$

e também,

$$u_t(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\cdot\ \text{sen}\ 0\cdot\frac{n\pi}{2} = 0,$$

para todo $x \in [0,2]$, e portanto, $u(x,t)$ satisfaz (iii).