**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**
**Departamento de Matemática**

**Gabarito da 2a. Avaliação de CM005 - 17/Maio/2018**

1. Sejam $u \in \mathbb{R}^3$ um vetor não-nulo (fixo) e $T_u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a função dada por $T_u(v) = \text{proj}_u v$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Mostre que $T_u$ é uma transformação linear;

   (b) Para $u = (1,2,2)$ e $v = (x,y,z)$, determine a expressão de $T_u(x,y,z)$;

   (c) Para $u = (1,2,2)$, determine uma base para $\ker(T_u)$ e uma base para $\text{Im}(T_u)$.

   **Solução:** (a) Por definição, tem-se que $\text{proj}_u v = \dfrac{v \cdot u}{u \cdot u} \cdot u$; daí, segue que:

$$T_u(v+w) = \frac{(v+w)\cdot u}{u \cdot u} \cdot u = \frac{v\cdot u + w \cdot u}{u\cdot u} \cdot u = \frac{v \cdot u}{u \cdot u}\cdot u + \frac{w \cdot u}{u \cdot u} \cdot u = T_u(v) + T_u(w),$$

$$\text{e} \qquad T_u(\alpha \cdot v) = \frac{(\alpha \cdot v)\cdot u}{u \cdot u} \cdot u = \alpha \cdot \frac{v \cdot u}{u \cdot u} \cdot u = \alpha \cdot T_u(v),$$

   para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Tem-se que:

$$T_u(1,0,0) = \tfrac{(1,0,0)\cdot(1,2,2)}{9} \cdot (1,2,2) = \tfrac{1}{9} \cdot (1,2,2);$$
$$T_u(0,1,0) = \tfrac{(0,1,0)\cdot(1,2,2)}{9} \cdot (1,2,2) = \tfrac{2}{9} \cdot (1,2,2);$$
$$T_u(0,0,1) = \tfrac{(0,0,1)\cdot(1,2,2)}{9} \cdot (1,2,2) = \tfrac{2}{9} \cdot (1,2,2),$$

   e assim, obtem-se que:

$$T_u(x,y,z) = x \cdot T_u(1,0,0) + y \cdot T_u(0,1,0) + z \cdot T_u(0,0,1) = \frac{x+2y+2z}{9} \cdot (1,2,2).$$

   (c) Nota-se que $T_u(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \dfrac{x+2y+2z}{9} \cdot (1,2,2) = (0,0,0) \Leftrightarrow x + 2y + 2z = 0$. Logo, os vetores de $\ker(T_u)$ são da forma $(x,y,z) = (-2y-2z, y, z) = y \cdot (-2,1,0) + z \cdot (-2,0,1)$ e, como $\{(-2,1,0), (-2,0,1)\}$ é L.I. (já que se tratam de dois vetores não paralelos) tem-se que tais dois vetores constituem uma base para $\ker(T_u)$. Além disso, nota-se que $T_u(x,y,z)$ é um vetor paralelo ao vetor $u = (1,2,2)$ e que $\text{Im}(T_u)$ é a reta $[(1,2,2)]$; logo, $\{(1,2,2)\}$ é uma base para $\text{Im}(T_u)$.

2. Determine, se possível, uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\ker(T) = \text{Im}(T)$.

   **Solução:** Basta considerar, por exemplo, a transformação linear definida por $T(x,y,z,w) = (z,w,0,0)$ pois, neste caso, teria-se que $T(x,y,z,w) = z(1,0,0,0) + w(0,1,0,0)$, ou seja, $\text{Im}(T) = [(1,0,0,0),(0,1,0,0)]$. Além disso, $(x,y,z,w) \in \ker(T) \Leftrightarrow T(x,y,z,w) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow (z,w,0,0) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow z = w = 0$, ou seja, os vetores de $\ker(T)$ são da forma $(x,y,0,0) = x(1,0,0,0) + y(0,1,0,0)$, ou seja, $\ker(T) = [(1,0,0,0),(0,1,0,0)]$.

3. Seja $S : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que $S(1) = 1 + t$, $S(t) = t + t^2$ e $S(t^2) = 1 + t^2$. Verifique se $S$ é bijetiva.

   **Solução:** Nota-se, primeiramente, que para $f(t) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 \in P_2(\mathbb{R})$ vale que:

$$S(f(t)) = S(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_0 \cdot S(1) + a_1 \cdot S(t) + a_2 \cdot S(t^2)$$
$$= a_0 \cdot (1+t) + a_1 \cdot (t + t^2) + a_2 \cdot (1 + t^2)$$

$$= (a_0 + a_2) \cdot 1 + (a_0 + a_1) \cdot t + (a_1 + a_2) \cdot t^2.$$

Portanto,

$$S(f(t)) = 0 \Leftrightarrow (a_0 + a_2) \cdot 1 + (a_0 + a_1) \cdot t + (a_1 + a_2) \cdot t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_0 \Rightarrow a_2 = 0 \\ a_0 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow -2a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow f(t) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \Rightarrow \ \mathrm{Ker}(S) = \{0\}.$$

Logo, $dim(\ker(S)) = 0$ e assim, $S$ é injetiva; pelo *Teorema da Imagem e do Núcleo* conclui-se que

$$3 = dim(P_2(\mathbb{R})) = dim(\ker(S)) + dim(Im(S)) = 0 + dim(\mathrm{Im}(S)).$$

Como $\mathrm{Im}(S)$ é subespaço vetorial de $P_2(\mathbb{R})$ então $dim(\mathrm{Im})(S) \leq dim(P_2(\mathbb{R}))$ e, portanto, deve ser $\mathrm{Im}(S) = P_2(\mathbb{R})$, ou seja, $S$ é sobrejetiva. Conclui-se, então, que $S$ é bijetiva.

4. Seja $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

para toda $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine o polinômio minimal de $T$.

**Solução:** Denotemos por $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a base canônica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$; tem-se então:

$$T(v_1) = T\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4;$$

$$T(v_2) = T\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4;$$

$$T(v_3) = T\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4;$$

$$T(v_4) = T\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4;$$

e daí, segue que:

$$[T]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar o polinômio característico de $T$ fazemos:

$$p(\alpha) = \det\left([T]_B^B - \alpha \cdot I\right) = \det \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} = (1-\alpha)^2\alpha^2 = (\alpha - 1)^2\alpha^2$$

Dado que o polinômio minimal tem exatamente as mesmas raízes do polinômio característico e é aquele de menor grau que anula a matriz de $T$, vemos que os candidatos a polinômio minimal são:

$$q_1(\alpha) = (\alpha - 1)\alpha; \quad q_2(\alpha) = (\alpha - 1)^2\alpha; \quad q_3(\alpha) = (\alpha - 1)\alpha^2 \quad \text{e} \quad q_4(\alpha) = (\alpha - 1)^2\alpha^2.$$

Verifiquemos se $q_1$ é o polinômio procurado:

$$q_1\left([T]_B^B\right) = \left([T]_B^B - I\right) \cdot [T]_B^B$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De fato, $q_1(\alpha)$ é o polinômio minimal de $T$. (Observe que os distintos monômios na decomposição em fatores primos do polinômio minimal aparecem todos com potência 1, indicando que $T$ é diagonalizável.)

5. Determine uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ formada por autovetores da transformação linear $T$, definida na questão 4 acima.

**Solução:** Sabe-se que os autovalores de $T$ são as raízes do polinômio característico de $T$; neste caso, $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 0$ são os distintos autovalores de $T$. Busquemos os autovetores associados a tais autovalores.

(I) **Autovetores associados a** $\alpha_1$

Denotando-se $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, deve-se ter:

$$T(v) = \alpha_1 \cdot v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow c = 0 = d$$

$$\Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, os autovetores de $T$ associados a $\alpha_1$ são combinações lineares dos vetores $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e estes dois vetores são L.I. (já que são não-nulos e não-múltiplos um do outro). Portanto, o autoespaço $V_{\alpha_1}$ associado ao autovalor $\alpha_1$ pode ser expresso na forma

$$V_{\alpha_1} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

(II) **Autovetores associados a** $\alpha_2$

Neste caso, deve-se ter:

$$T(v) = \alpha_2 \cdot v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$V_{\alpha_2} = \left[ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Nota-se que os vetores geradores de $V_{\alpha_2}$ são não paralelos e portanto, são L.I., constituindo assim, uma base para este autoespaço.

Finalmente, considerando que autovetores associados a autovalores distintos são L.I., conclui-se que o conjunto

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é L.I.; como $dim\left(M_{2\times 2}(\mathbb{R})\right) = 4$, segue que $A$ é uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (formada por autovetores de $T$) e

$$[T]_A^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Sejam a transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y) = (\dfrac{x+3y}{2}, \dfrac{3x+y}{2})$, $B$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $p(\alpha)$ o polinômio característico de $T$. Mostre que $p$ anula a matriz $[T]_B^B$.

**Solução:** Dado que $T((1,0)) = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2})$ e $T((0,1)) = (\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2})$, segue que

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e, portanto, o polinômio característico de $T$ será:

$$p(\alpha) = \det\left[[T]_B^B - \alpha \cdot I\right] = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \alpha & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} - \alpha \end{bmatrix} = (\frac{1}{2} - \alpha)^2 - \frac{9}{4} = \alpha^2 - \alpha - 2.$$

Daí, segue que:

$$p\left([T]_B^B\right) = \left([T]_B^B\right)^2 - \left([T]_B^B\right) - 2 \cdot I$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$