UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da 3a. Avaliação de CM005 - Álgebra Linear

1. Considere em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o produto interno dado por

$$\left\langle \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right\rangle = a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{12} + a_{21}\cdot b_{21} + a_{22}\cdot b_{22}.$$

Dadas $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(a) Determine a medida do ângulo entre A e B;

(b) Determine $C, D \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $A = C + D$, $C /\!\!/ B$ e $D \perp B$.

Solução: (a) Denotando-se por α a medida do ângulo entre A e B, tem-se que:

$$\cos\,\alpha = \frac{< A, B >}{\|A\| \cdot \|B\|}.$$

$$< A, B >= 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) + 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 = 1 \;\; ;$$

$$\|A\|^2 =< A, A >= 1^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \Rightarrow \|A\| = \sqrt{3} \;\; ;$$

$$\|B\|^2 =< B, B >= 0^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 2^2 = 6 \Rightarrow \|B\| = \sqrt{6} \;\; ;$$

segue que:

$$\cos\,\alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

(b) Sabe-se que o vetor $proj_B A$ é paralelo a B e o vetor $A - proj_B A$ é ortogonal a B; basta então definir $C = proj_B A$ e $D = A - proj_B A$. Daí, segue que:

$$C = proj_B A = \frac{< A, B >}{< B, B >}\cdot B = \frac{1}{6}\cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix};$$

$$D = A - proj_B A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

2. Considere o produto interno e $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dadas na questão acima e seja $W = \big[A, B\big] \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine uma base de $W^\perp$.

Solução: Tem-se que $M \in W^\perp$ se, e somente se, $M \perp A$ e $M \perp B$, ou seja, $< M, A >= 0$ e $< M, B >= 0$.

Denotando-se $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, deve-se ter:

$$< M, A >= 0 \Leftrightarrow a\cdot 1 + b\cdot 0 + c\cdot 1 + d\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow a + c + d = 0 \Leftrightarrow a = -c - d;$$

$$< M, B >= 0 \Leftrightarrow a\cdot 0 + b\cdot(-1) + c\cdot(-1) + d\cdot 2 = 0 \Leftrightarrow b = -c + 2d.$$

Logo, deve-se ter que:

$$M = \begin{bmatrix} -c-d & -c+2d \\ c & d \end{bmatrix} = c\cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $W^\perp$ (já que estas duas matrizes geram $W^\perp$ e são L.I.).

3. Considere em $\mathbb{R}^2$ o produto interno definido por $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 3x_1 y_1 + 2x_2 y_2$ e seja $v = (1, 2)$. Escolha uma base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ e mostre que

$$\|v\|^2 = \langle v, v_1 \rangle^2 + \langle v, v_2 \rangle^2.$$

Solução: Nota-se que a base canônica de $\mathbb{R}^2$ é ortogonal em relação ao produto interno dado pois

$$\langle (1,0), (0,1) \rangle = 3 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0;$$

além disso, tem-se que:

$$\|(1,0)\|^2 = \langle (1,0), (1,0) \rangle = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 3 \Rightarrow \|(1,0)\| = \sqrt{3};$$

$$\|(0,1)\|^2 = \langle (0,1), (0,1) \rangle = 3 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \Rightarrow \|(1,0)\| = \sqrt{2}.$$

Portanto, utilizando-se os seus respectivos vetores versores obtem-se uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$; mais precisamente, $\mathcal{B} = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \right\} = \{v_1, v_2\}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Daí, segue que:

$$\|(1,2)\|^2 = \langle (1,2), (1,2) \rangle = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 11;$$

$$\langle v, v_1 \rangle^2 = \langle (1,2), (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) \rangle^2 = (3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot 2 \cdot 0)^2 = 3;$$

$$\langle v, v_2 \rangle^2 = \langle (1,2), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle^2 = (3 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 8;$$

verifica-se assim, que $\|v\|^2 = \langle v, v_1 \rangle^2 + \langle v, v_2 \rangle^2$.

4. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x,y,z) = (\frac{x-z}{2}, y, \frac{z-x}{2})$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e o plano $\pi : x + z = 0$. Mostre que para $v = (x,y,z)$ tem-se que $T(v) = proj_{\pi} v$.

Solução: Nota-se que $v = (x,y,z) \in \pi$ se, e somente se, $v = (x,y,-x) = (x,0,-x) + (0,y,0) = x(1,0,-1) + y(0,1,0)$, ou seja, $\pi = [(1,0,-1), (0,1,0)]$. Além disso, vê-se que $\mathcal{C} = \{(1,0,-1), (0,1,0)\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ e assim, $proj_{\pi} v = proj_{(1,0,-1)} v + proj_{(0,1,0)} v$; portanto, tem-se que:

$$\begin{aligned} proj_{\pi} v &= proj_{(1,0,-1)}(x,y,z) + proj_{(0,1,0)}(x,y,z) \\ &= \frac{\langle (x,y,z), (1,0,-1) \rangle}{\langle (1,0,-1), (1,0,-1) \rangle} (1,0,-1) + \frac{\langle (x,y,z), (0,1,0) \rangle}{\langle (0,1,0), (0,1,0) \rangle} (0,1,0) \\ &= (\frac{x-z}{2}, 0, \frac{z-x}{2}) + (0,y,0) = (\frac{x-z}{2}, y, \frac{z-x}{2}) = T(x,y,z). \end{aligned}$$

5. Para a transformação linear T da questão acima mostre que

   (a) $\ker(T) = \pi^{\perp}$;

   (b) $\mathrm{Im}(T) = \pi$.

Solução: (a) Tem-se que $v = (x,y,z) \in \pi^{\perp}$ se, e somente se, $\langle (x,y,z), (1,0,-1) \rangle = 0$, ou seja, $x - z = 0$ e $\langle (x,y,z), (0,1,0) \rangle = 0$, ou seja, $y = 0$; portanto, $v = (x,y,z) \in \pi^{\perp}$ se, e somente se, $v = (x,0,x) = x(1,0,1)$, ou seja, $\pi^{\perp} = [(1,0,1)]$.

Daí, para $v = (x,0,x) \in \pi^{\perp}$ tem-se que $T(x,0,x) = (\frac{x-x}{2}, 0, \frac{x-x}{2}) = (0,0,0)$, ou seja, $v \in \ker(T)$ e assim, conclui-se que $\pi^{\perp} \subset \ker(T)$.

Por outro lado, se $v = (x, y, z) \in \ker(T)$ então

$$T(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (\frac{x - z}{2}, y, \frac{z - x}{2}) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = z \quad \text{e} \quad y = 0 \Leftrightarrow v = (x, o, x),$$

e daí, se $v = (x, y, z) \in \ker(T)$ então $v \in \pi^{\perp}$, ou seja, $\ker(T) \subset \pi^{\perp}$. Portanto, conclui-se que $\ker(T) = \pi^{\perp}$.

(b) Por definição, a projeção ortogonal de v sobre π resulta num vetor que pertence a π (já que $proj_{\pi} v = \alpha_1 (1, 0, -1) + \alpha_2 (0, 1, 0)$); daí, se $w \in \mathrm{Im}(T)$ então existe algum $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = w$, ou seja, $w = proj_{\pi} v \in \pi$ e portanto, $\mathrm{Im}(T) \subset \pi$.

Por outro lado, se $w \in \pi$ então $w = proj_{\pi} w = T(w)$, ou seja, $w \in \mathrm{Im}(T)$, e portanto, $\pi \subset \mathrm{Im}(T)$. Logo, $\mathrm{Im}(T) = \pi$.

6. Considere em $P_1(\mathbb{R})$ o produto interno dado por $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t) \cdot g(t)\, dt$. Mostre que, se $f(t) = 1 - t$ e $g(t) = 1 + t$ então

$$2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right) = \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2.$$

Solução: Tem-se que:

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_0^1 f^2(t)\, dt = \int_0^1 (1 - t)^2\, dt = -\frac{1}{3}(1 - t)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \;\; ;$$

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \int_0^1 g^2(t)\, dt = \int_0^1 (1 + t)^2\, dt = \frac{1}{3}(1 + t)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}[8 - 1] = \frac{7}{3} \;\; ;$$

$$\|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g \rangle = \int_0^1 (f + g)^2(t)\, dt = \int_0^1 2^2\, dt = 4\, t \Big|_0^1 = 4 \;\; ;$$

$$\|f - g\|^2 = \langle f - g, f - g \rangle = \int_0^1 (f - g)^2(t)\, dt = \int_0^1 (2t)^2\, dt = \frac{4}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \;\; .$$

Verifica-se assim que

$$2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right) \; = \; 2\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{3}\right) = \frac{16}{3} \qquad \text{e} \qquad \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 \; = \; 4 + \frac{4}{3} \; = \; \frac{16}{3}.$$