UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da 3a. Avaliação de Cálculo IV - 18 de Junho de 2019

1. Considere a função $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$, se $x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ e $f(x) = 1$, se $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Determine sua série de *Fourier* no intervalo $[-\pi, \pi]$.

   Solução: Observa-se que f é uma função par e assim, sua série de *Fourier* é uma série de cossenos (ou seja, os coeficientes b_n são todos nulos). Daí, segue que:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1\ ;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\ \operatorname{sen} nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n\pi}\ \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{2n} = 0, \ \text{para } n = 1, 2, \cdots \\ a_{2n-1} = \dfrac{2(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}, \ \text{para } n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

   Portanto, o desenvolvimento em série de *Fourier* de f no intervalo $[-\pi, \pi]$ é dado por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}\cos(2n-1)x\,,$$

   igualdade válida nos pontos x de continuidade de f.

2. Considere a série de *Fourier* da função f obtida na questão 1:

   (a) Utilize tal série para mostrar que: $\displaystyle\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$;

   (b) Utilize a *Identidade de Parseval* $\|f\|^2 = \dfrac{a_0^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ para mostrar que $\dfrac{\pi^2}{8} = 1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + \cdots$

   Solução: (a) Dado que f é contínua em $x = 0$, segue que

$$1 = f(0) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}\cos 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\pi}{4} \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \;=\; 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots.$$

   (b) Tem-se que:

$$\|f\|^2 \;=\; \langle f, f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1^2\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1\,.$$

   Além disso, como $a_0 = 1$, $a_{2n} = 0$, $a_{2n-1} = \dfrac{2(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}$ e $b_n = 0$, para $n = 1, 2, \cdots$, segue que:

$$\|f\|^2 \;=\; \frac{a_0^2}{2} \;+\; \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)\|f\|^2 \;\Rightarrow\; \|f\|^2 \;=\; \frac{a_0^2}{2} \;+\; \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}^2$$

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^2}{\pi^2(2n-1)^2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

3. Sejam $\mathcal{C}[-\pi,\pi]$ o espaço vetorial real das funções reais contínuas definidas em $[-\pi,\pi]$, munido do produto interno $< f,g >= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx$, e o subespaço vetorial $V = [1,\, \cos\, x,\, \cos\, 2x]$. Para $f(x) = \cos^2 x$ calcule as projeções ortogonais

$$proj_1 f(x), \quad proj_{cos\,x} f(x), \quad proj_{cos\,2x} f(x),$$

e mostre que

$$f(x) = proj_1 f(x) \quad + \quad proj_{cos\,x} f(x) \quad + \quad proj_{cos\,2x} f(x).$$

Solução: Sabe-se que o conjunto $\mathcal{B} = \{1,\, \cos\, x,\, \cos\, 2x\}$ é ortogonal com respeito ao produto interno dado e também que

$$\|1\|^2 = < 1,1 > = 2, \quad \|\cos\, x\|^2 = < \cos\, x,\, \cos\, x > = 1 \quad \text{e} \quad \|\cos\, 2x\|^2 = < \cos\, 2x,\, \cos\, 2x > = 1,$$

e assim, usando a identidade $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\, 2x$, segue que:

$$proj_1 f(x) = \frac{< f(x), 1 >}{< 1, 1 >}\cdot 1 = \frac{1}{2} < f(x), 1 >= \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\, 2x, 1 >= \frac{1}{4} < 1, 1 > + \frac{1}{4} < \cos\, 2x, 1 >$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{1}{2} \ ;$$

$$proj_{\,cos\,x} f(x) = \frac{< f(x), \cos\, x >}{< \cos\, x, \cos\, x >}\cdot \cos\, x =< f(x), \cos\, x >=< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\, 2x, \cos\, x >= \frac{1}{2} < 1, \cos\, x >$$

$$+ \frac{1}{2} < \cos\, 2x, \cos\, x >= \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 0 \ ;$$

$$proj_{\,cos\,2x} f(x) = \frac{< f(x), \cos\, 2x >}{< \cos\, 2x, \cos\, 2x >}\cdot \cos\, 2x =< f(x), \cos\, 2x > \cos\, 2x =< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\, 2x, \cos\, 2x > \cos\, 2x$$

$$= \frac{1}{2} < 1, \cos\, 2x > \cos\, 2x + \frac{1}{2} < \cos\, 2x, \cos\, 2x > \cos\, 2x = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot \cos\, 2x = \frac{1}{2}\cos\, 2x \ .$$

Segue que:

$$proj_1 f(x) \quad + \quad proj_{cos\,x} f(x) \quad + \quad proj_{cos\,2x} f(x) = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\cos\, 2x = f(x),$$

ou seja, a identidade $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\, 2x$ já representa a projeção ortogonal de f sobre V.

4. Seja a função $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$, se $x \in [0,1]$ e $f(x) = x - 1$, se $x \in [1,2]$. Determine a lei de definição de $f_P(x)$ e de $f_I(x)$, as extensões par e ímpar, respectivamente, de $f(x)$ ao intervalo $[-2,2]$.

Solução: Tem-se que $f_P(x) = f(-x) = 0$, para $x \in [-1,0]$ e $f(x) = f(-x) = -x - 1$, para $x \in [-2,-1]$. Por sua vez, $f_I(x) = -f(-x) = 0$, para $x \in [-1,0]$ e $f(x) = -f(-x) = -(-x-1) = x + 1$, para $x \in [-2,-1]$. Portanto, como $f_P(x) = f_I(x) = f(x)$, para $x \in [0,2]$, conclui-se que:

$$f_P(x) = \begin{cases} -x-1, & \text{se } x \in [-2,-1], \\ 0, & \text{se } x \in [-1,1], \\ x-1, & \text{se } x \in [1,2]. \end{cases} \qquad f_I(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \in [-2,-1], \\ 0, & \text{se } x \in [-1,1], \\ x-1, & \text{se } x \in [1,2]. \end{cases}$$

5. Para a função $f_I(x)$ da questão 4, determine sua série de *Fourier* no intervalo $[-2,2]$.

Solução: Uma vez que f_I é uma função ímpar, segue que sua série de *Fourier* é uma série de senos ($a_n = 0$, para $n \geq 0$); sendo assim, deve-se ter:

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_I(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} f_I(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx = \int_{0}^{2} f(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx = \int_{1}^{2} (x-1) \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx$$

$$= \int_{1}^{2} x \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx - \int_{1}^{2} \text{sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx = -\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_{1}^{2} + \frac{2}{n\pi}\int_{1}^{2} \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx + \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_{1}^{2}$$

$$= -\frac{4}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2} \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\Big|_{1}^{2} + \frac{2}{n\pi}(-1)^n - \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$= -\frac{2}{n\pi}(-1)^n - \frac{4}{(n\pi)^2} \text{ sen } \frac{n\pi}{2}.$$

Conclui-se, portanto, que o desenvolvimento em série de *Fourier* de f_I é dado por:

$$f_I(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ sen } \frac{n\pi x}{2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} [\frac{2}{n\pi}(-1)^n + \frac{4}{(n\pi)^2} \text{ sen } \frac{n\pi}{2}] \text{ sen } \frac{n\pi x}{2},$$

para todo $x \in [-2,2]$.

6. Determine uma função $u : [0,2] \times [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \text{ para todo } (x,t) \in [0,2] \times [0,+\infty); \\ u(0,t) = 0 = u(2,t), \text{ para todo } t \in [0,+\infty); \\ u(x,0) = 2x - x^2, \text{ para todo } x \in [0,2]. \end{cases}$$

Solução: Sabe-se que a solução da equação do calor é da forma $u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \text{ sen } \frac{n\pi x}{2} e^{-(\frac{n\pi}{2})^2 t}$, onde o coeficiente A_n deve ser escolhido como sendo o $n-$ésimo coeficiente da série de *Fourier* da extensão ímpar $f_I(x)$ da função $f(x) = 2x - x^2$, ao intervalo $[-2,2]$. Segue que:

$$A_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_I(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} f(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx = \int_{0}^{2} (2x - x^2) \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx$$

$$= (2\int_{0}^{2} x \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx) - \int_{0}^{2} x^2 \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx = (I) + (II).$$

$$(I) = 2\int_{0}^{2} x \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx = 2\left(-\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2} - \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{2} \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx\right)$$

$$= 2\left(-\frac{4}{n\pi}(-1)^n - \frac{4}{(n\pi)^2} \text{sen } \frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right) = 2\left(-\frac{4}{n\pi}(-1)^n - 0\right) = -\frac{8}{n\pi}(-1)^n.$$

$$(II) = -\int_{0}^{2} x^2 \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{2x}{n\pi}^2 \cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2} - \frac{4}{n\pi}\int_{0}^{2} x \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx$$

$$= \frac{8}{n\pi}(-1)^n - \frac{4}{n\pi}\left(\frac{2x}{n\pi} \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2} - \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{2} \text{sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx\right)$$

$$= \frac{8}{n\pi}(-1)^n - \frac{4}{n\pi}\left(0 - \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{2} \text{sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx\right) = \frac{8}{n\pi}(-1)^n - \frac{16}{(n\pi)^3} \cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{8}{n\pi}(-1)^n + \frac{16}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n].$$

Logo,

$$A_n = (I) + (II) = -\frac{8}{n\pi}(-1)^n + \frac{8}{n\pi}(-1)^n + \frac{16}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n]$$

$$= \frac{16}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_{2n} = 0, \quad n = 1, 2, \cdots \\ A_{2n-1} = \dfrac{32}{(2n-1)^3\pi^3}, \quad n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

Portanto, a solução procurada é:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n-1} \ \text{sen} \ \frac{(2n-1)\pi x}{2} \ e^{-(\frac{(2n-1)\pi}{2})^2 t}$$

$$= \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \ \text{sen} \ \frac{(2n-1)\pi x}{2} \ e^{-(\frac{(2n-1)\pi}{2})^2 t}.$$