UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da 1a. Avaliação de CM044 - Cálculo IV - Diurno - 04 de Setembro de 2018

1. Seja z_* a raíz da equação $z^2 = 1+i$ tal que $\pi < \arg(z_*) < 2\pi$. Calcule z_*^3 e localize z_*^3 no plano complexo.

   Solução: Deve-se, inicialmente, expressar os números z e $1+i$ na forma polar: $1+i = \sqrt{2}\, e^{1\pi/4}$ e $z = r\, e^{i\alpha}$ com $r = |z| > 0$ e $\alpha = \arg(z) \in [0, 2\pi)$; logo, deve-se ter:

$$z^2 = 1+i \Leftrightarrow r^2 e^{i2\alpha} = \sqrt{2} e^{i\pi/4} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 2^{1/2} \\ 2\alpha = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \quad \text{para } n = 0, 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{1/4} \\ \alpha = \frac{\pi}{8} + n\pi, \quad \text{para } n = 0, 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = 2^{1/4} e^{i\pi/8} \quad \text{ou} \quad z = 2^{1/4} e^{i9\pi/8}$$

   Como $\frac{9\pi}{8} \in (\pi, 2\pi)$, conclui-se que $z_* = 2^{1/4} e^{i9\pi/8}$ e daí, segue que:

$$z_*^3 = 2^{3/4} e^{i\frac{27\pi}{8}} = 2^{3/4} e^{i(\frac{11\pi}{8} + 2\pi)}$$

   Portanto, para localizar o ponto z_*^3 no plano complexo, basta fazer a interseção da circunferência de centro na origem e raio $2^{3/4}$ com a semi-reta $\arg(z) = \frac{11\pi}{8}$.

2. Seja a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \dfrac{y^2\, sen(x+y)}{x^2+y^2} + i \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, para $z = x + i\, y \neq 0$ e $f(0) = 0$. Determine o conjunto dos pontos onde f é contínua.

   Solução: Para pontos $z = x + i\, y \neq 0$, observa-se que $f(z)$ é um quociente de funções bem-definidas e contínuas (em (x, y)); portanto, f é contínua em todo $z \neq 0$. Resta, portanto, analisar a continuidade de f no ponto $z = 0$. Isto é feito mostrando-se a continuidade em $(0, 0)$ das funções que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ que compõem as partes real e imaginária de f, respectivamente. Tem-se que $f(0) = 0 = u(0, 0) + i\, v(0, 0)$; também, observa-se que

$$\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1, \qquad \frac{x^2}{x^2+y^2} = |x| \cdot \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1.$$

   Portanto, tem-se que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} sen(x+y) \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} = 0 = u(0, 0),$$

   pois,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} sen(x+y) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{x^2+y^2} \quad \text{é limitada.}$$

   Por sua vez,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| \cdot \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = v(0, 0),$$

   pois

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0 \quad \text{e} \quad \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{é limitada.}$$

   Portanto, tem-se

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x, y) + i \lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x, y) = u(0, 0) + i\, v(0, 0) = f(0),$$

   ou seja, f é contínua em $z = 0$. Logo, f é contínua em todos os pontos de seu domínio.

3. Seja a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \mathrm{Im}(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Utilizando a definição de derivada, determine o conjunto dos pontos onde f é derivável.

Solução: Admita que f seja derivável em $z_0 = x_0 + i\,y_0$; então, existe $f'(z_0)$ e

$$(*) \qquad f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\mathrm{Im}(z_0 + \Delta z) - \mathrm{Im}(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\mathrm{Im}(z_0) + \mathrm{Im}(\Delta z) - \mathrm{Im}(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\mathrm{Im}(\Delta z)}{\Delta z}$$

Em particular, para $\Delta z = \Delta x + i\,0$, tem-se que:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\mathrm{Im}(\Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0;$$

e também, para $\Delta z = 0 + i\Delta y$, tem-se que:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\mathrm{Im}(\Delta z)}{\Delta z} = \lim_{i\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{i\Delta y} = \frac{1}{i} = -i.$$

Portanto, o limite em $(*)$ não existe, ou seja f não é derivável em qualquer ponto $z_0 \in \mathbb{C}$.

4. Determine, se possível, uma função analítica $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}[f(z)] = x^2 - y^2 + 3e^x \cos y$ e $f(0) = 3 + i$.

Solução: Admita que exista uma função $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ tal que $u(x, y) = x^2 - y^2 + 3e^x \cos y$ e f analítica. Então, as funções u e v satisfazem às equações de *Cauchy-Riemann*:

$$(a) \quad u_x(x, y) = v_y(x, y) \qquad \text{e} \qquad (b) \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y).$$

Por (a), segue que:

$$\frac{\partial}{\partial x}\big[x^2 - y^2 + 3e^x \cos y\big] = v_y(x, y) \Rightarrow v_y(x, y) = 2x + 3e^x \cos y$$

$$\Rightarrow v(x, y) = \int (2x + 3e^x \cos y)dy + \varphi(x) = 2xy + 3e^x \operatorname{sen} y + \varphi(x).$$

Por (b), segue que:

$$v_x(x, y) = -u_y(x, y) \Leftrightarrow \big(2y + 3e^x \operatorname{sen} y + \varphi'(x)\big) = -\big(-2y - 3e^x \operatorname{sen} y\big) = 2y + 3e^x \operatorname{sen} y$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = M \quad (\in \mathbb{R} \text{ constante}),$$

e assim, deve ser $v(x, y) = 2xy + 3e^x \operatorname{sen} y + M$.

Daí, conclui-se que:

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) = \big(x^2 - y^2 + 3e^x \cos y\big) + i\big(2xy + 3e^x \operatorname{sen} y + M\big),$$

e para que seja $f(0) = 3 + i$ deve-se ter:

$$f(0) = u(0, 0) + i\,v(0, 0) = 3 + i\,M = 3 + i \Leftrightarrow M = 1.$$

Portanto, a função procurada é

$$f(z) = \big(x^2 - y^2 + 3e^x \cos y\big) + i\big(2xy + 3e^x \operatorname{sen} y + 1\big) = \big(x^2 + 2ixy - y^2\big) + 3\,e^x\big(\cos y + i \operatorname{sen} y\big) + i$$

$$= (x + i\,y)^2 + 3\,e^{x \cdot e^{iy}} + i = z^2 + 3\,e^z + i.$$

5. Seja $f(z) = \mathrm{Re}(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Calcule $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$ sendo:

(a) Γ o segmento de reta com ponto inicial em $-i$ e ponto final em 1;

(b) $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2 \text{ e } \pi \le \arg(z) \le 2\pi\}$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: (a) Sabe-se que a equação do segmento de reta com ponto inicial em A e ponto final em B é da forma $(1-t)A + t\,B$, para $t \in [0,1]$.

Portanto, considerando-se $A = -i$ e $B = 1$, obtem-se que

$$\Gamma(t) = (1-t)(-i) + t \cdot 1 = t + i(t-1) \quad \text{ e que } \quad \Gamma'(t) = 1 + i,$$

para todo $t \in [0,1]$. Daí, segue que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t)\,dt = \int_0^1 f(t + i(t-1)) \cdot (1+i)\,dt$$

$$= (1+i)\int_0^1 \mathrm{Re}(t + i(t-1))\,dt = (1+i)\int_0^1 t\,dt = (1+i)\,\frac{t^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1+i}{2}.$$

(b) Nota-se que a curva Γ é a semi-circunferência de centro em $z_0 = 0$, com raio 2 e localizada no semi-plano $y \le 0$. Portanto, tal curva pode ser assim parametrizada:

$$\Gamma(t) = 2(cos\,t + i\,sen\,t) \quad \text{ e } \quad \Gamma'(t) = 2(-sen\,t + i\,cos\,t), \quad \text{ para } t \in [\pi, 2\pi].$$

Daí, segue que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_\pi^{2\pi} f(2\,cos\,t + i2\,sen\,t) \cdot \Gamma'(t)\,dt = \int_\pi^{2\pi} \mathrm{Re}(2\,cos\,t + i2\,sen\,t) \cdot (-2sen\,t + i2\,cos\,t)dt$$

$$\int_\pi^{2\pi} 2\,cos\,t \cdot (-2sen\,t + i2\,cos\,t)dt = -2\int_\pi^{2\pi} 2\,sen\,t\,cos\,t\,dt + 4i\int_\pi^{2\pi} cos^2 t\,dt$$

$$= -2\int_\pi^{2\pi} sen\,2t\,dt + 2i\int_\pi^{2\pi} (1 + cos\,2t)dt$$

$$= cos\,2t\Big|_\pi^{2\pi} + 2i\big[t + \frac{sen\,2t}{2}\big]_\pi^{2\pi}$$

$$= [cos\,4\pi - cos\,2\pi] + 2i[(2\pi - \pi) + (sen\,4\pi - sen\,2\pi)] = 2\pi i.$$

6. Seja Γ a curva formada pelos pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que $|2z-2i| = 1$, orientada no sentido anti-horário. Mostre que

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z-i)^2 cos\, z}\, dz = \frac{4e\pi\,(1-e^2)}{(1+e^2)^2}.$$

Solução: Tem-se que $|2z-2i| = 1 \Leftrightarrow 2|z-i| = 1 \Leftrightarrow |z-i| = \frac{1}{2}$, ou seja, Γ é a circunferência de centro em i e raio $\frac{1}{2}$.

Tem-se também, que a função

$$f(z) = \frac{1}{cos\, z}$$

é analítica sobre Γ e na região interna à curva Γ (já que nenhum zero de $cos\, z$ está nesta região, nem sobre Γ).

Portanto, utilizando-se a *Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas*, conclui-se que

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z-i)^2 cos\, z}\, dt = \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-i)^2}\, dz = 2\pi i \cdot f'(i).$$

Daí, segue que:

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{cos\, z}\right\} = \frac{0 \cdot cos\, z - 1 \cdot (-sen\, z)}{cos^2 z} = \frac{sen\, z}{cos^2 z}.$$

Como

$$sen\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Rightarrow sen(i) = \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} = \frac{\frac{1}{e} - e}{2i} = \frac{\frac{1-e^2}{e}}{2i} = \frac{1-e^2}{2ie},$$

e também,

$$cos\, z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow cos(i) = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{\frac{1}{e} + e}{2} = \frac{\frac{1+e^2}{e}}{2} = \frac{1+e^2}{2e} \Rightarrow cos^2(i) = \frac{(1+e^2)^2}{(2e)^2},$$

segue que

$$f'(i) = \frac{sen(i)}{cos^2(i)} = \frac{\frac{1-e^2}{2ie}}{\frac{(1+e^2)^2}{(2e)^2}} = \frac{1-e^2}{2ie} \cdot \frac{(2e)^2}{(1+e^2)^2} = 2e\,\frac{1-e^2}{i(1+e^2)^2} = -2ie\,\frac{1-e^2}{(1+e^2)^2}.$$

Daí, conclui-se que:

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z-i)^2 cos\, z}\, dt = 2\pi i \cdot f'(i) = (2\pi i) \cdot (-2ie\,\frac{1-e^2}{(1+e^2)^2}) = -4i^2 e\pi \frac{1-e^2}{(1+e^2)^2} = 4e\pi \frac{1-e^2}{(1+e^2)^2}.$$