UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da 2a. Avaliação de CM044 - 14 de Maio de 2019

1. Analise a convergência das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2}{n!} \qquad\qquad (b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n+i}{1-2ni}$$

Solução: (a) Utilizando-se o *Critério da Razão* obtem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1+2/n+3/n^2}{1+2/n^2} = 0\cdot 1 = 0 < 1,$$

e portanto, a série é convergente.

(b) Sabe-se que para uma série ser convergente o limite do termo geral deve ser igual a zero; sendo assim, obtem-se que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+i}{1-2ni} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+i/n}{1/n-2i} = -\frac{3}{2i} \neq 0,$$

ou seja, a série é divergente.

2. Dadas as séries de números reais

$$\Sigma_1 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} \cdots \qquad \text{e} \qquad \Sigma_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} - \frac{1}{128} \cdots$$

(a) Utilize o *Critério de Liebniz* para mostrar que Σ_1 e Σ_2 são convergentes;

(a) Calcule a soma $\Sigma_1 + i \cdot \Sigma_2$.

Solução: (a) Observa-se que

$$\Sigma_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \qquad \text{e} \qquad \Sigma_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$$

com $a_n = \dfrac{1}{2^{2n}}$ e $b_n = \dfrac{1}{2^{2n+1}}$, para todo $n \geq 0$. Daí, segue que $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$, para todo $n \geq 0$. Além disso, $a_n = \dfrac{1}{2^{2n}} \geq \dfrac{1}{2^{2n+2}} = a_{n+1}$ e $b_n = \dfrac{1}{2^{2n+1}} \geq \dfrac{1}{2^{2n+3}} = b_{n+1}$, para todo $n \geq 0$. Finalmente, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{2n}} = 0$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = 0$; portanto, pelo *Critério de Liebniz* conclui-se que ambas séries alternadas são convergentes.

(b) Nota-se que $\Sigma_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2^2}\right)^n$, ou seja, Σ_1 é uma série geométrica de razão $-\frac{1}{4} < 1$; portanto, $\Sigma_1 = \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{5}$. Por sua vez, como Σ_2 é convergente, pode-se escrever $\Sigma_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \Sigma_1 = \dfrac{2}{5}$; segue-se que $\Sigma_1 + i \cdot \Sigma_2 = \dfrac{4+2i}{5}$.

3. Dada a função $f(z) = -z[1 - \ln z]$, determine sua série de *Taylor* em $z_0 = 3$ e calcule o raio de convergência da mesma.

Solução: Tem-se que:

$$\begin{array}{lll} f^{(0)}(z) = -z[-1 + \ln z]; & f^{(1)}(z) = \ln z; & f^{(2)}(z) = z^{-1}; \\ f^{(3)}(z) = -1 \cdot z^{-2}; & f^{(4)}(z) = 1 \cdot 2 \cdot z^{-3}; & f^{(5)}(z) = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot z^{-4}; \\ \quad \vdots & & \\ f^{(n)}(z) = (-1)^n (n-2)! z^{1-n}, & \text{para } n = 2, 3, \cdots & \end{array}$$

Logo, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(3)}{n!} = \dfrac{(-1)^n (n-2)! 3^{1-n}}{n!} = \dfrac{(-1)^n 3^{1-n}}{n(n-1)}$, para $n = 2, 3, \cdots$. Portanto, o desenvolvimento em série de *Taylor* de f em $z_0 = 3$ é:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-3) + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (z-3)^n = 3[\ln 3 - 1] + \ln 3(z-3) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^{1-n}}{n(n-1)}, (z-3)^n$$

para todo $z \in D(3; R)$, onde o raio de convergência R é dado por:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{1-n}}{n(n-1)}}{\frac{3^{-n}}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n (n+1)}{3^{n-1}(n-1)} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/n}{1 - 1/n} = 3.$$

4. Seja a função $f(z) = \dfrac{z-2}{z^2 + (i-1)z - i}$; determine a série de *Laurent* nas seguintes regiões:

(a) $\sqrt{2} < |z - i| < 2$;

(b) $|z - i| > 2$.

Solução: (a) Nota-se que $z^2 + (i-1)z - i = (z+i)(z-1)$ e assim, pode-se expressar

$$f(z) = \frac{z-2}{(z+i)(z-1)}, \qquad \text{para } z \neq -i, 1.$$

Utilizando-se o *método das frações parciais* deve-se ter:

$$f(z) = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-1} = \frac{A(z-1) + B(z+i)}{(z+i)(z-1)} = \frac{(A+B)z + (-A + iB)}{(z+i)(z-1)} = \frac{z-2}{(z+i)(z-1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \Rightarrow A = 1 - B \Rightarrow A = 1 - \dfrac{i-1}{2} \Rightarrow A = \dfrac{3-i}{2} \ ; \\ -A + iB = -2 \Rightarrow -(1-B) + iB = -2 \Rightarrow (1+i)B = -1 \Rightarrow B = -\dfrac{1}{1+i} \Rightarrow B = \dfrac{i-1}{2} \ . \end{cases}$$

Logo, tem-se que:

$$f(z) = \frac{3-i}{2} \cdot \frac{1}{z+i} + \frac{i-1}{2} \cdot \frac{1}{z-1}.$$

Daí, segue que:

$$(*) \qquad \frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i) + 2i} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1 - (-\dfrac{z-i}{2i})} = \frac{1}{2i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^n} (z-i)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} (z-i)^n,$$

para $\left| \dfrac{z-i}{2i} \right| < 1$, ou seja, para $|z - i| < 2$. Além disso, tem-se também:

$$(**) \quad \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-i) + i - 1} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1-i}{z-i}} = \frac{1}{z-i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^n}{(z-i)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^n}{(z-i)^{n+1}},$$

para $\left|\dfrac{1-i}{z-i}\right| < 1$, ou seja, para $|z-i| > \sqrt{2}$. Por $(*)$ e $(**)$ conclui-se que:

$$f(z) = \frac{3-i}{2}\cdot\frac{1}{z+i} + \frac{i-1}{2}\cdot\frac{1}{z-1} = \frac{3-i}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^n + \frac{i-1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-i)^n}{(z-i)^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(3-i)(-1)^n}{2(2i)^{n+1}}(z-i)^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-i)^{n+1}}{2(z-i)^{n+1}},$$

para $\sqrt{2} < |z-i| < 2$, ou seja, na interseção das regiões onde valem $(*)$ e $(**)$.

(b) Tem-se que:

$$(***) \qquad \frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1-(-\dfrac{2i}{z-i})} = \frac{1}{z-i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2i)^n}{(z-i)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2i)^n}{(z-i)^{n+1}}$$

para $\left|\dfrac{2i}{z-i}\right| < 1$, ou seja, para $|z-i| > 2$. Por $(**)$ e $(***)$ conclui-se que:

$$f(z) = \frac{3-i}{2}\cdot\frac{1}{z+i}+\frac{i-1}{2}\cdot\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n(-i)^n(3-i)}{2(z-i)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-i)^{n+1}}{2(z-i)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n(-i)^n(3-i)-(1-i)^{n+1}}{2(z-i)^{n+1}}$$

para $|z-i| > 2$, ou seja, na interseção das regiões onde valem $(**)$ e $(***)$.

5. Dada a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2+(i-1)z-i}$; determine o resíduo de f em cada um de seus pólos, utilizando as respectivas séries de *Laurent*.

Solução: Dado que $z^2+(i-1)z-i = (z+i)(z-1)$, segue que $z_0 = -i$ e $z_1 = 1$ são os pólos de f; daí, segue que:

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-1)} = \frac{1}{(z+i)}\cdot\frac{1}{(z+i)-(1+i)} = -\frac{1}{(z+i)}\cdot\frac{1}{(1+i)}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+i}{1+i}}$$

$$= -\frac{1}{(z+i)}\cdot\frac{1}{(1+i)}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+i)^n}{(1+i)^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+i)^{n-1}}{(1+i)^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-i)^{n+1}(z+i)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{i-1}{2}\cdot\frac{1}{z+i} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-i)^{n+1}(z+i)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

e assim, conclui-se que $\operatorname{Res}_{z=-i} f(z) = \dfrac{i-1}{2}$.

Também, tem-se que:

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-1)} = \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)+1+i} = \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(1+i)}\cdot\frac{1}{1-(-\dfrac{z-1}{1+i})}$$

$$= \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(1+i)}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^n}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-1)^{n-1} = \frac{1-i}{2}\cdot\frac{1}{z-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-1)^{n-1};$$

logo, $\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \dfrac{1-i}{2}$.

6. Dada a função $f(z) = \dfrac{z^2+2}{(z+i)(z-1)^2}$, utilize a *Fórmula dos Resíduos* para determinar o resíduo de f em cada um de seus pólos.

Solução: Nota-se, inicialmente, que $g(z) = \dfrac{z^2+2}{(z-1)^2}$ é analítica em $-i$ e não se anula nesse ponto; logo, $-i$ é pólo de ordem 1 de f. Por sua vez, a função $h(z) = \dfrac{z^2+2}{z+i}$ é analítica em 1 e não se anula nesse ponto; logo, 1 é pólo de ordem 2 de f.

Sendo assim, segue que:

$$\mathrm{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z \to -i} (z+i) f(z) = \lim_{z \to -i} \frac{z^2+2}{(z-1)^2} = \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{i}{2};$$

$$\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 f(z) \right] = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2+2}{z+i} \right] = \lim_{z \to 1} \frac{2z \cdot (z+i) - (z^2+2) \cdot 1}{(z+i)^2}$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{z^2 + 2iz - 2}{(z+i)^2} = \frac{-1+2i}{(1+i)^2} = \frac{-1+2i}{2i} = 1 + \frac{i}{2}.$$