UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

3a. Avaliação de CM044 - Cálculo IV - Turma B - 28 de Novembro de 2017

1. Dada a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2+3z+2}$ determine o *resíduo de* f em cada um dos seus pólos, utilizando a série de *Laurent* desenvolvida no respectivo pólo.

Solução: Observa-se que $z^2+3z+2 = (z+1)(z+2)$ e que -1 e -2 são zeros simples deste polinômio; logo, tais zeros são pólos (de ordem 1) de f. Sendo assim, tem-se que:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+3z+2} = \frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{1-(-(z+1))} = \frac{1}{z+1}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z+1)^n$$

$$= \frac{1}{z+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(z+1)^{n-1},$$

para $0 < |z+1| < 1$. Logo, $\text{Res}_{z=-1} f(z) = 1$.

Por outro lado,

$$f(z) = \frac{1}{z^2+3z+2} = \frac{1}{z+2}\cdot\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z+2}\cdot\frac{-1}{1-(z+2)} = \frac{-1}{z+2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(z+2)^n$$

$$= \frac{-1}{z+2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(z+2)^{n-1},$$

para $0 < |z+2| < 1$. Logo, $\text{Res}_{z=-2} f(z) = -1$.

2. Considere a função $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^2(z+3)}$.

(a) Utilize a *Fórmula dos Resíduos* para determinar o *resíduo de* f em cada um dos seus pólos;

(b) Utilize o *Teorema dos Resíduos* para calcular $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\, dz$, onde Γ é a curva dada pela equação $|3z+1| = 3$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: (a) Nota-se que $z_0 = -1$ e $z_1 = -3$ são pólos de f cujas ordens são 2 e 1, respectivamente. Daí, segue que:

$$\text{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z+3}\right) = \lim_{z\to-1}\frac{e^z(z+3)-e^z}{(z+3)^2} = \lim_{z\to-1}\frac{e^z(z+2)}{(z+3)^2} = \frac{1}{4e};$$

$$\text{Res}_{z=-3} f(z) = \lim_{z\to-3}\frac{e^z}{(z+1)^2} = \frac{1}{4e^3}.$$

(b) Nota-se que $|3z+1| = 3 \Leftrightarrow |z+1/3| = 1$, ou seja, Γ é a circunferência com centro em $-1/3$ e raio 1; desta forma, apenas o pólo $z_0 = -1$ está na região interna à curva Γ e portanto, pelo *Teorema dos Resíduos* obtem-se que:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i\cdot\text{Res}_{z=-1} f(z) = 2\pi i\cdot\frac{1}{4e} = \frac{\pi i}{2e}.$$

3. Mostre que o conjunto $\mathcal{A} = \{\ \cos x, \cos 3x, \cos 5x, \ldots, \cos(2n-1)x, \ldots\}$ é linearmente independente (L.I.) em $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$.

Solução: Considere o produto interno definido em $\mathcal{C}[-\pi,\pi]$ por $\big\langle f, g \big\rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx$. Inicialmente, mostremos que $\mathcal{A}$ é um conjunto ortogonal; de fato, para $n \neq m$ e lembrando que 2 cos a cos b= $\cos(a+b)+\cos(a-b)$, tem-se que:

$$\begin{aligned}\big\langle \cos\,(2n-1)x,\ \cos\,(2m-1)x\big\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos\,(2n-1)x \cdot \cos\,(2m-1)x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\ \cos\,(2(n+m-1)x) +\ \cos\,(2(n-m)x)]\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\text{sen}\ (2(n+m-1)x)}{2(n+m-1)} + \frac{\text{sen}\ (2(n-m)x)}{2(n-m)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\end{aligned}$$

Seja agora $\mathcal{B} = \{\ \cos\,((2n_1-1)x), \cos\,((2n_2-1)x), \cdots, \cos\,((2n_k-1)x)\} \subset \mathcal{A}$, um subconjunto qualquer e finito. Se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1\cos\,(2n_1-1)x + \alpha_2\cos\,(2n_2-1)x + \cdots + \alpha_k\cos\,(2n_k-1)x = 0,$$

então, para cada j fixo, $1 \leq j \leq k$, deve-se ter:

$$0 = \big\langle 0, \cos\,(2n_j-1)x\big\rangle = \big\langle \alpha_1\cos\,(2n_1-1)x + \alpha_2\cos\,(2n_2-1)x + \cdots + \alpha_k\cos\,(2n_k-1)x, \cos\,(2n_j-1)x\big\rangle$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \alpha_m\big\langle\cos\,(2n_m-1)x, \cos\,(2n_j-1)x\big\rangle = \alpha_j\big\langle\cos\,(2n_j-1)x, \cos\,(2n_j-1)x\big\rangle = \alpha_j\|\cos\,(2n_j-1)x\|^2;$$

Portanto, conclui-se que $\alpha_j = 0$, para $j = 1, 2, \cdots, k$; logo, $\mathcal{B}$ é linearmente independente e por ser um subconjunto finito e qualquer de $\mathcal{A}$, conclui-se que $\mathcal{A}$ é linearmente independente.

4. Dada a função $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x + \frac{\pi}{2}$, para $x \in [0, \pi]$, e $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$, para $x \in [-\pi, 0)$, determine sua série de *Fourier*.

Solução: Nota-se que a função f é par e, portanto, sua série de *Fourier* é uma série de cossenos (ou seja, $b_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$). Sendo assim, deve-se ter:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-x+\frac{\pi}{2})\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\ \cos\,nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-x+\frac{\pi}{2})\cdot\ \cos\,nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi} x\cdot\ \cos\,nx\,dx + \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\ \cos\,nx\,dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[-x\cdot\frac{\text{sen}\ nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\ \text{sen}\ nx\,dx + \frac{\pi}{2}\frac{\text{sen}\ nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[0 - \frac{1}{n^2}\ \cos\,nx\bigg|_{0}^{\pi} + 0\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2}\right] = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 2k \\ \frac{4}{\pi n^2}, & \text{se } n = 2k-1, \end{cases}$$

para $k = 1, 2, 3, \cdots$. Desta forma, a série de *Fourier* de f será:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k-1}\cos\,(2k-1)x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\,(2k-1)x$$

5. Utilize a série de *Fourier* obtida na questão anterior para determinar a soma da série $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}\dots$.

Solução: Nota-se que a função f da questão acima é contínua em $[-\pi,\pi]$ com derivadas laterais em todos os pontos de $(-\pi,\pi)$, assim como as derivadas lateral à direita e lateral à esquerda nos pontos $-\pi$ e π, respectivamente. Portanto, para todo ponto $x\in[-\pi,\pi]$, tem-se que a soma da série de *Fourier* de f avaliada em x corresponde ao valor $f(x)$, ou seja,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k-1}\cos\,(2k-1)x=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\,(2k-1)x\,,$$

para todo $x\in[-\pi,\pi]$. Em particular, para $x=0$, obtem-se que:

$$\frac{\pi}{2}=f(0)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\,(2k-1)0=\frac{4}{\pi}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right],$$

de onde se conclui que:

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

6. Considere o sistema

$$\begin{cases} u_t(x,t)-u_{xx}(x,t)=0, \text{ para todo } (x,t)\in[0,2]\times[0,+\infty) & (i)\\ u(0,t)=0=u(2,t), \text{ para todo } t\in[0,+\infty) & (ii)\\ u(x,0)=x, \text{ para todo } x\in[0,2]. & (iii)\end{cases}$$

(a) Determine uma solução $u(x,t)$ para tal sistema;

(b) Mostre que $u(x,t)$ satisfaz às condições (i), (ii) e (iii).

Solução: Sabe-se que uma solução $u(x,t)$ para a equação do calor acima acima pode ser obtida definindo-se

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \operatorname{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\,e^{-(\frac{n\pi}{2})^2 t},$$

de modo que o coeficiente a_n seja o $n-$ésimo coeficiente da série de *Fourier* da extensão ímpar f_I de $f(x)=x$, ao intervalo $[-2,2]$. Sendo assim, deve-se ter:

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_I(x)\cdot\operatorname{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\operatorname{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\,dx=$$

$$=\left[-x\cdot\frac{2}{n\pi}\cdot\cos\,\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\,\frac{n\pi x}{2}\,dx\right]=-\frac{4}{n\pi}\cdot(-1)^n+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\operatorname{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

para $n=1,2,\cdots$; portanto, deve-se ter:

$$u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\,e^{-(\frac{n\pi}{2})^2 t}.$$

(b) Tem-se que:

$$u_t(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\,e^{-(\frac{n\pi}{2})^2 t}\right)$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\cdot e^{-(\frac{n\pi}{2})^2 t}\cdot(-(\frac{n\pi}{2})^2)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}\operatorname{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\cdot e^{-(\frac{n\pi}{2})^2 t}\cdot(\frac{n\pi}{2})^2;$$

$$u_x(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)}{n}^{n+1}\text{sen }\frac{n\pi x}{2}\ e^{-(\frac{n\pi}{2})^2 t}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)}{n}^{n+1}\cdot\frac{n\pi}{2}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\cdot e^{-(\frac{n\pi}{2})^2 t};$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)}{n}^{n+1}\cdot\frac{n\pi}{2}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\cdot e^{-(\frac{n\pi}{2})^2 t}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)}{n}^{n}\cdot(\frac{n\pi}{2})^2\cdot\text{sen }\frac{n\pi x}{2}\cdot e^{-(\frac{n\pi}{2})^2 t};$$

daí, segue que $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$, para todo $(x,t) \in [0,2]\times[0,+\infty)$, ou seja, $u(x,t)$ satisfaz à condição (i). Também, como sen $\frac{n\pi x}{2}$ se anula em $x = 0$ e $x = 2$ (para todo $n \in \mathbb{N}$) conclui-se que

$$u(0,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)}{n}^{n+1}\text{sen } 0\ e^{-(\frac{n\pi}{2})^2 t} = 0 = u(2,t)$$

para todo $t \in [0,+\infty)$ e portanto, $u(x,t)$ satisfaz à condição (ii).

Finalmente, para mostrar que $u(x,t)$ satisfaz à condição (iii) é suficiente notar que

$$u(x,0) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)}{n}^{n+1}\text{sen }\frac{n\pi x}{2}\ e^{0},$$

e esta última série é justamente a série de *Fourier* de $f(x) = x$ no intervalo $[0,2]$.