UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da 3a. Avaliação de CM 044 - CÁLCULO IV

1. Mostre que o conjunto $\{1, \cos x, \text{sen } 2x\}$ é linearmente independente em $C[-\pi, \pi]$ (o espaço vetorial das funções contínuas definidas no intervalo $[-\pi, \pi]$). **(20 pontos)**

   Solução: Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot \cos x + \gamma \cdot \text{sen } 2x = 0$, para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Então, em particular, para $x = 0$ deve-se ter $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 = 0$; para $x = \pi$ deve-se ter $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot (-1) + \gamma \cdot 0 = 0$ e para $x = \dfrac{\pi}{4}$ deve-se ter $\alpha \cdot 1 + \beta \frac{\sqrt{2}}{2} + \gamma \cdot 1 = 0$. Daí, segue que:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

   Como $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, segue que tal sistema admite solução única (a solução trivial). Portanto, deve ser $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

2. Considere o espaço $C[-\pi, \pi]$ munido do produto interno dado por $< f, g >= \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$, para todas funções $f, g \in C[-\pi, \pi]$. Seja $f \in C[-\pi, \pi]$, dada por $f(x) = x$, para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Calcule a projeção ortogonal de f sobre o subespaço de $C[-\pi, \pi]$ gerado por $\{1, \cos x, \text{sen } 2x\}$. **(20 pontos)**

   Solução: Nota-se inicialmente que, como f é uma função ímpar, as funções $f(x) \cdot 1$ e $f(x) \cdot \cos x$ são funções ímpares e a função $f(x) \cdot \text{sen } 2x$ é função par. Portanto,

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos x \, dx,$$

   ou seja, $< f(x), 1 >= 0 =< f(x), \cos x >$.

   Denotando por W o subespaço de $C[-\pi, \pi]$ gerado por $\{1, \cos x, \text{sen } 2x\}$, ou seja, $W = [1, \cos x, \text{sen } 2x]$, deve-se ter:

$$\begin{aligned} proj_W f &= proj_1 f + proj_{\cos x} f + proj_{\text{sen } 2x} f \\ &= \frac{< f(x), 1 >}{< 1, 1 >} \cdot 1 + \frac{< f(x), \cos x >}{< \cos x, \cos x >} \cdot \cos x + \frac{< f(x), \text{sen } 2x >}{< \text{sen } 2x, \text{sen } 2x >} \cdot \text{sen } 2x \\ &= \frac{0}{< 1, 1 >} \cdot 1 + \frac{0}{< \cos x, \cos x >} \cdot \cos x + \frac{< f(x), \text{sen } 2x >}{< \text{sen } 2x, \text{sen } 2x >} \cdot \text{sen } 2x \\ &= \frac{< f(x), \text{sen } 2x >}{< \text{sen } 2x, \text{sen } 2x >} \cdot \text{sen } 2x. \end{aligned}$$

   Mas,

$$\begin{aligned} < f(x), \text{sen } 2x >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \text{ sen } 2x \, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \text{ sen } 2x \, dx &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x \cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \, dx \right] \\ = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x \cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-\pi}{2} = -1; \end{aligned}$$

$$< \text{sen } 2x, \text{sen } 2x >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2 \, 2x \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x] \, dx = \frac{1}{2\pi}\left[x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4}\text{sen } 4x\Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = 1.$$

   Conclui-se daí, que

$$proj_W f = proj_{\text{sen } 2x} f = \frac{< f(x), \text{sen } 2x >}{< \text{sen } 2x, \text{sen } 2x >} \cdot \text{sen } 2x = - \text{ sen } 2x.$$

3. Determine a série de *Fourier* da função f, definida por $f(x) = x^2$, para todo $x \in [-1, 1]$. **(20 pontos)**

Solução: Como $f(-x) = f(x)$, para todo x, tem-se que f é uma função par e portanto, sua série de *Fourier* é uma série de cossenos (ou seja, todos os coeficientes $b_n{}'s$ de sua série são nulos). Basta então, calcular os coeficientes a_0 e a_n, com $n = 1, 2, \cdots$.

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\,\cos\, n\pi x\, dx = \int_{-1}^{1} x^2 \cos\, n\pi x\, dx = \left[\left.\frac{x^2\ \text{sen}\ n\pi x}{n\pi}\right|_{-1}^{1} - \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1} 2x\ \text{sen}\ n\pi x\, dx\right] \\ &= -\frac{2}{n\pi}\int_{-1}^{1} x\ \text{sen}\ n\pi x\, dx = -\frac{2}{(n\pi)^2}\left[-x\,\cos\, n\pi x\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\cos\, n\pi x\, dx\right] \\ &= -\frac{2}{(n\pi)^2}\left[2\cdot(-1)^{n+1} + \left.\frac{\text{sen}\ n\pi x}{n\pi}\right|_{-1}^{1}\right] = \frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2} = \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad \text{para } n = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

Portanto, deve-se ter:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\, n\pi x = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\, n\pi x, \qquad \text{para todo } x \in [-1, 1].$$

4. Utilize a série de *Fourier* obtida na questão 3 acima para determinar a soma da série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

(20 pontos)

Solução: Utilizando a série de *Fourier* acima com $x = 0$ segue que:

$$0 = f(0) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\,(n\pi 0) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot 1$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

5. Seja f a função definida por $f(x) = e^x$, para todo $x \in [0, \pi]$. Determine a série de *Fourier* da extensão par de f. **(20 pontos)**

Solução: Sendo $\tilde{f}_p(x)$ a extensão par de f (ou seja, $\tilde{f}_p(x) = f(-x) = e^{-x}$, para todo $x \in [-\pi, 0]$ e $\tilde{f}_p(x) = f(x) = e^x$, para todo $x \in [0, \pi]$) deve-se ter que:

$$\tilde{f}_p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\, nx,$$

onde $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ e $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,\cos\, nx\,dx$, para $n = 1, 2, \cdots$. Sendo assim, segue que:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x\,dx = \frac{2}{\pi}\, e^x\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}[e^{\pi} - 1];$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \cos\, nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\left. e^x\frac{\text{sen}\ nx}{n}\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x\,\frac{\text{sen}\ nx}{n}dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} e^x\,\frac{-\text{sen}\ nx}{n}dx\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\left. e^x\frac{\cos\, nx}{n^2}\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x\,\frac{\cos\, nx}{n^2}dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{n^2} - \int_0^{\pi} e^x\,\frac{\cos\, nx}{n^2}dx\right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} e^x \cos\, nx\, dx = \frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{n^2} - \int_0^{\pi} e^x\, \frac{\cos\, nx}{n^2} dx \Rightarrow (1 + \frac{1}{n^2}) \int_0^{\pi} e^x \cos\, nx\, dx = \frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{n^2}$$

$$\Rightarrow (n^2+1) \int_0^{\pi} e^x \cos\, nx\, dx = e^{\pi}(-1)^n - 1 \Rightarrow \int_0^{\pi} e^x \cos\, nx\, dx = \frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{(n^2+1)} = \frac{\pi}{2} \cdot a_n$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi} \frac{[e^{\pi}(-1)^n - 1]}{(n^2+1)}, \qquad \text{para } n = 1, 2, \cdots .$$

Portanto, deve-se ter:

$$\tilde{f}_p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\, nx = \frac{[e^{\pi} - 1]}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[e^{\pi}(-1)^n - 1]}{(n^2+1)} \cos\, nx, \qquad \text{para todo } x \in [-\pi, \pi].$$

6. Determine a série de *Fourier* da função dada por $g(x) = x^2 - 60x$, para $x \in [0, 60]$, e $g(x) = -(x^2 + 60x)$, para $x \in [-60, 0]$. **(20 pontos)**

Solução: Note-se, inicialmente, que para $x \in [-60, 0]$ vale que $-x \in [0, 60]$ e daí, vê-se que $g(-x) = (-x)^2 - 60(-x)) = x^2 + 60x = -g(x)$; logo, g é uma função ímpar e, portanto, sua série de *Fourier*, é uma série de senos, ou seja,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}(\frac{n\pi x}{60}),$$

para todo $x \in [-60, 60]$.

Deve-se ter então:

$$b_n = \frac{1}{60} \int_{-60}^{60} g(x) \,\text{sen}\, \frac{n\pi x}{60} dx = \frac{1}{30} \int_0^{60} g(x) \,\text{sen}\, \frac{n\pi x}{60} dx = \frac{1}{30} \int_0^{60} (x^2 - 60x) \,\text{sen}\, \frac{n\pi x}{60} dx$$

$$= \frac{1}{30} \left[\int_0^{60} x^2 \,\text{sen}\, \frac{n\pi x}{60} dx - \int_0^{60} 60x \,\text{sen}\, \frac{n\pi x}{60} dx \right] = \frac{1}{30} \left[(I) - (II) \right].$$

Tem-se então:

$$(I) = \frac{60}{n\pi} \left[-x^2 \cos \frac{n\pi x}{60} \Big|_0^{60} + \int_0^{60} 2x \cos \frac{n\pi x}{60} dx \right] = \frac{60}{n\pi} \left[60^2 (-1)^{n+1} + 2 \int_0^{60} x \cos \frac{n\pi x}{60} dx \right]$$

$$= \frac{60}{n\pi} \left[60^2 (-1)^{n+1} + 2 \frac{60}{n\pi} \left(x \,\text{sen} \frac{n\pi x}{60} \Big|_0^{60} - \int_0^{60} \text{sen} \frac{n\pi x}{60} dx \right) \right]$$

$$= \frac{60}{n\pi} \left[60^2 (-1)^{n+1} + 2 \frac{60}{n\pi} \left(\frac{60}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{60} \Big|_0^{60} \right) \right] = \frac{60}{n\pi} \left[60^2 (-1)^{n+1} + 2 \frac{60^2}{(n\pi)^2} ((-1)^n - 1) \right]$$

$$= \frac{60^3}{(n\pi)^3} \left[(n\pi)^2 (-1)^{n+1} + 2((-1)^n - 1) \right];$$

$$(II) = \int_0^{60} 60x \,\text{sen}\, \frac{n\pi x}{60} dx = 60 \left[\frac{60}{n\pi} \left(-x \cos \frac{n\pi x}{60} \Big|_0^{60} + \int_0^{60} \cos \frac{n\pi x}{60}\, dx \right) \right]$$

$$= 60 \left[\frac{60}{n\pi} \left(-60(-1)^n + \text{sen} \frac{n\pi x}{60} \Big|_0^{60} \right) \right] = \frac{60^3}{n\pi} (-1)^{n+1} = \frac{60^3}{(n\pi)^3} [(n\pi)^2 (-1)^{n+1}]$$

Portanto, segue que:

$$b_n = \frac{1}{30} [(I) - (II)] = \frac{1}{30} \left[\frac{60^3}{(n\pi)^3} \left[2((-1)^n - 1) \right] \right] = \frac{1}{15} \left[\frac{60^3}{(n\pi)^3} \left[((-1)^n - 1) \right] \right] = 4 \left[\frac{60^2}{(n\pi)^3} \left[((-1)^n - 1) \right] \right],$$

para $n = 1, 2, \cdots$.

Logo, $b_n = 0$, se n é par e $b_n = -8\dfrac{60^2}{(n\pi)^3}$, se n é ímpar (ou seja, $b_{2k} = 0$ e $b_{2k-1} = -8\dfrac{60^2}{((2k-1)\pi)^3}$, para todo $k \in \mathbb{N}$). Portanto,

$$g(x) = -8 \cdot \frac{60^2}{\pi^3} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \text{ sen } \frac{(2k-1)\pi x}{60},$$

para todo $x \in [-60, 60]$.

7. Considere o sistema:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & \text{para todos } x \in [0,60] \text{ e } t \in [0,\infty), \quad (1) \\ u(0,t) = 0 = u(60,t), & \text{para todo } t \in [0,\infty), \quad (2) \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{para todo } x \in [0,60], \quad (3) \end{cases}$$

onde c é uma constante não-nula e $u_0(x) = 60x - x^2$, para todo $x \in [0, 60]$.

(a) Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $u_n(x,t) = \text{sen } \dfrac{n\pi x}{60} \cdot e^{-(\frac{cn\pi}{60})^2 t}$ é solução de $(1) - (2)$; **(10 pontos)**

(b) Determine uma solução do sistema $(1) - (3)$. **(10 pontos)**

Solução: (a) Note-se que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se que

$$u_n(0,t) = \text{ sen}\frac{0}{60} \cdot e^{-(\frac{cn\pi}{60})^2 t} = 0 = \text{ sen } (n\pi) \cdot e^{-(\frac{cn\pi}{60})^2 t} = u_n(60,t),$$

para todo $t \geq 0$ (ou seja, as condições de fronteira (2) são satisfeitas). Além disso, $u_n(x,t) = f_n(x) \cdot g_n(t)$, onde $f_n(x) = \text{sen } \dfrac{n\pi x}{60}$ e $g_n(t) = e^{-(\frac{cn\pi}{60})^2 t}$; daí, segue que

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t) = \frac{d^2 f_n}{dx^2}(x) \cdot g_n(t) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = f_n(x) \cdot \frac{dg_n}{dt}(t).$$

Como

$$\frac{d^2 f_n}{dx^2}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{n\pi}{60} \cos \frac{n\pi x}{60}\right] = -(\frac{n\pi}{60})^2 \text{ sen } \frac{n\pi x}{60}$$

e

$$\frac{dg_n}{dt}(t) = -(\frac{cn\pi}{60})^2 e^{-(\frac{cn\pi}{60})^2 t},$$

segue que

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = f_n(x) \cdot \frac{dg_n}{dt}(t) = -\text{ sen } \frac{n\pi x}{60} \cdot (\frac{cn\pi}{60})^2 e^{-(\frac{cn\pi}{60})^2 t}$$

$$= c^2\left(-(\frac{cn\pi}{60})^2 \cdot \text{ sen } \frac{n\pi x}{60}\right) e^{-(\frac{cn\pi}{60})^2 t} = c^2 \frac{d^2 f_n}{dx^2}(x) g_n(t) = c^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t) \Rightarrow \frac{\partial u_n}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}.$$

Portanto, $u_n(x,t)$ satisfaz à equação (1).

(b) Nota-se que $u_0(x) = -g(x)$, para todo $x \in [0, 60]$, onde g é a função dada na questão (6) acima. Sendo assim, a série de *Fourier* de u_0 será dada por:

$$u_0(x) = -g(x) = 8 \cdot \frac{60^2}{\pi^3} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \text{ sen } \frac{(2k-1)\pi x}{60},$$

para todo $x \in [0, 60]$.

Por outro lado, dado que $u_n(x,t)$ é solução de (1)-(2), para todo $n \in \mathbb{N}$, e como a equação é linear, segue que $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x,t)$ também é solução de (1)-(2). Portanto, para que $u(x,t)$ seja solução de (1)-(3), os escalares α_n devem coincidir com os coeficientes de *Fourier* de u_0, ou seja, $\alpha_{2n} = 0$ e $\alpha_{2n-1} = 8\dfrac{60^2}{\pi^3} \dfrac{1}{(2n-1)^3}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (e assim, terá-se que $u(x,0) = u_0(x)$, para todo $x \in [0, 60]$).