UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da 2a. Avaliação de CM044 - Cálculo IV - Turma B - 17 de Outubro de 2017

1. Decida se é convergente ou divergente a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ni^n}{2^n}$.

Solução: Utilizando-se o critério da razão tem-se que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\frac{(n+1)i^{n+1}}{2^{n+1}}|}{|\frac{ni^n}{2^n}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} < 1.$$

Portanto, segundo o critério da razão, a série em questão é convergente.

2. Dada a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - (1+i)z + i}$, determine sua série de *Taylor* em torno de $z_0 = 2 + i$ e o raio de convergência da mesma.

Solução: Inicialmente, nota-se que $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - (1+i)z + i} = \dfrac{1}{(z-1)(z-i)}$; usemos o método das frações parciais para decompor tal função.

$$\frac{1}{(z-1)(z-i)} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-i} = \frac{a(z-i) + b(z-1)}{(z-1)(z-i)} = \frac{(a+b)z - (b+ai)}{(z-1)(z-i)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \Rightarrow b = -a \Rightarrow b = -\frac{1+i}{2} \\ -(b+ai) = 1 \Rightarrow a(i-1) = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{2} \end{cases}$$

Portanto, $f(z) = \dfrac{1+i}{2}\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1+i}{2}\dfrac{1}{z-i} = \dfrac{1+i}{2}\left(\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z-i}\right)$. Daí, segue que:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-(2+i)+1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z-(2+i)}{1+i})} = \frac{1}{1+i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^n}(z-(2+i))^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-(2+i))^n, \qquad \text{para } \left|\frac{z-(2+i)}{1+i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-(2+i)| < \sqrt{2};$$

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-(2+i)+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z-(2+i)}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(z-(2+i))^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-(2+i))^n, \qquad \text{para } \left|\frac{z-(2+i)}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-(2+i)| < 2.$$

Portanto, tem-se que:

$$f(z) = \frac{1+i}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-(2+i))^n - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(z-(2+i))^n\right)$$

$$= \frac{1+i}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)(z-(2+i))^n, \qquad \text{para } |z-(2+i)| < \sqrt{2}.$$

3. Dada a função $f(z)=\ln(2z+1)$, determine sua série de *Taylor* em torno de $z_0=\dfrac{1}{2}$ e o raio de convergência da mesma.

Solução: Sabe-se que os coeficientes de tal série são dadas por $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$; daí, segue que:

$$
\begin{aligned}
&f^{(0)}(z)=\ \ln\,(2z+1)\Rightarrow f^{(0)}(\tfrac{1}{2})=\ \ln\,(2)\\
&f^{(1)}(z)=2\cdot(2z+1)^{-1}\Rightarrow f^{(1)}(\tfrac{1}{2})=2\cdot(2)^{-1}=1\\
&f^{(2)}(z)=2\cdot(-1)\cdot(2z+1)^{-2}\cdot 2=2^2\cdot(-1)\cdot(2z+1)^{-2}\Rightarrow f^{(2)}(\tfrac{1}{2})=2^2\cdot(-1)\cdot(2)^{-2}=-(1!)\\
&f^{(3)}(z)=2^2\cdot(-1)(-2)\cdot(2z+1)^{-3}\cdot 2=2^3\cdot(1\cdot 2)\cdot(2z+1)^{-3}\Rightarrow f^{(3)}(\tfrac{1}{2})=2^3\cdot(1\cdot 2)\cdot(2)^{-3}=2!\\
&f^{(4)}(z)=2^3\cdot(1\cdot 2\cdot(-3))\cdot(2z+1)^{-4}\cdot 2=2^4\cdot(-1\cdot 2\cdot 3)\cdot(2z+1)^{-4}\\
&\qquad\Rightarrow f^{(4)}(\tfrac{1}{2})=2^4\cdot(-1\cdot 2\cdot 3)\cdot(2)^{-4}=-(3!)\\
&\quad\vdots\\
&f^{(n)}(z)=2^n\cdot(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot(2z+1)^{-n},\ \text{para } n=1,2,3,\dots\\
&\Rightarrow f^{(n)}(\tfrac{1}{2})=2^n\cdot(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot(2)^{-n}=(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!,\ \text{para } n=1,2,3,\dots
\end{aligned}
$$

Portanto, obtem-se que:

$$
\begin{array}{lll}
a_0=\frac{f^{(0)}(\frac{1}{2})}{0!}=\ln 2 & a_1=\frac{f^{(1)}(\frac{1}{2})}{1!}=1 & a_2=\frac{f^{(2)}(\frac{1}{2})}{2!}=-\frac{1!}{2!}=-\frac{1}{2}\\
a_3=\frac{f^{(3)}(\frac{1}{2})}{3!}=\frac{2!}{3!}=\frac{1}{3} & a_4=\frac{f^{(4)}(\frac{1}{2})}{4!}=-\frac{3!}{4!}=-\frac{1}{4} & \\
\quad\vdots & & \\
a_n=\frac{f^{(n)}(\frac{1}{2})}{4!}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{(n-1)!}{n!} & =(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}, & \text{para } n=1,2,3,\dots
\end{array}
$$

Daí, segue que série de *Taylor* é da forma: $f(z)=\ln 2+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}(z-\frac{1}{2})^n$, com raio de convergência

$$R=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}|}{|(-1)^{n+2}\cdot\frac{1}{n+1}|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

4. Dada a função $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, determine sua série de *Laurent* em torno de $z_0=0$ e na região $1<|z|<2$.

Solução: Tem-se que:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{a}{z-1}+\frac{b}{z-2}=\frac{a(z-2)+b(z-1)}{(z-1)(z-2)}=\frac{(a+b)z-(2a+b)}{(z-1)(z-2)}$$

$$\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}a+b=0\Rightarrow b=-a\Rightarrow b=1\\ 2a+b=-1\Rightarrow 2a-a=-1\Rightarrow a=-1\end{array}\right.\qquad\Rightarrow\qquad f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}.$$

$$(I)\quad\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}},\qquad\text{para }\left|\frac{1}{z}\right|<1,\ \text{ou seja, para } 1<|z|;$$

$$(II)\quad\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(-2)}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n,\qquad\text{para }\left|\frac{z}{2}\right|<1,\ \text{ou seja, para } |z|<2.$$

Por (I) e (II), conclui-se que:

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n,\ \text{para } 1<|z|<2.$$

5. Dada a função $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, determine sua série de *Laurent* em torno de $z_0 = 0$ e na região $|z| > 2$.

Solução: Tem-se que:

$$(III) \qquad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}, \text{ para } \left|\frac{2}{z}\right| < 1, \text{ ou seja, para } |z| > 2.$$

Portanto, por (I) e (III), segue que:

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad \text{para} \quad |z| > 2.$$

6. Dada a função $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^3(z-1)}$, determine a parte principal da série de *Laurent* de f em torno de $z_0 = i$.

Solução: Dado que $\dfrac{1}{(z-i)^3}$ já é sua própria série de *Laurent* em torno de $z_0 = i$, resta então, determinar a série de *Laurent* do termo $\dfrac{1}{z-1}$ em torno do mesmo ponto; entretanto, como este último termo é uma função analítica em $z_0 = i$ então sua série de *Laurent* é sua série de *Taylor* neste ponto.

Portanto, deve ser:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z-i)^3} \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-i)^3} \cdot \frac{1}{z-i+i-1} = \frac{1}{(z-i)^3} \cdot \frac{1}{i-1} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z-i}{i-1})} \\
&= \frac{1}{(z-i)^3} \cdot \frac{1}{i-1} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(i-1)^n}(z-i)^n = \frac{1}{(z-i)^3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(i-1)^{n+1}}(z-i)^n \\
&= \frac{1}{(z-i)^3} \cdot \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{(i-1)^2} \cdot (z-i) + \frac{1}{(i-1)^3} \cdot (z-i)^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(i-1)^{n+1}}(z-i)^n \right) \\
&= \left[\frac{1}{i-1} \cdot \frac{1}{(z-i)^3} - \frac{1}{(i-1)^2} \cdot \frac{1}{(z-i)^2} + \frac{1}{(i-1)^3} \cdot \frac{1}{z-i} \right] + \frac{1}{(z-i)^3} \cdot \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(i-1)^{n+1}}(z-i)^n,
\end{aligned}$$

para $0 < |z-i| < \sqrt{2}$.

Portanto, a parte principal da série de *Laurent* solicitada é

$$\frac{1}{i-1} \cdot \frac{1}{(z-i)^3} - \frac{1}{(i-1)^2} \cdot \frac{1}{(z-i)^2} + \frac{1}{(i-1)^3} \cdot \frac{1}{z-i}.$$