UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da 2a. Avaliação de Cálculo IV - Turma A

1. Analise a convergência das seguintes séries de números complexos:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{n+1}}$; **(10 pontos)** (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{2n^2+1}$. **(10 pontos)**

   Solução: (a) Aplicando-se o *Critério da Razão* à série em questão obtem-se:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(1+i)^{n+1}}{2^{n+2}}}{\frac{(1+i)^n}{2^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|1+i|^{n+1}}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{|1+i|^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{|1+i|}{2} = \frac{|1+i|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1.$$

   Portanto, a série é convergente.

   (b) Observa-se incialmente, que o *Critério da Razão* aplicado a esta série revela-se inconclusivo pois $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$; entretanto, nota-se que para n suficientemente grande $\dfrac{3n}{2n^2+1}$ está muito próximo de $\dfrac{3n}{2n^2}$ e este, por sua vez, é igual a $\dfrac{3}{2n}$, o que sugere a comparação da série em questão com a série harmônica. Mais precisamente, definindo-se $a_n = \dfrac{1}{n}$ e $b_n = \dfrac{3n}{2n^2+1}$, para $n = 1, 2, \cdots$, tem-se que:

$$a_n \le b_n \Leftrightarrow \frac{1}{n} \le \frac{3n}{2n^2+1} \Leftrightarrow 2n^2+1 \le 3n^2 \Leftrightarrow 1 \le n^2 \Leftrightarrow 1 \le n,$$

   ou seja, $a_n \le b_n$, para $n = 1, 2, \cdots$, o que implica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Dado que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ (harmônica) é divergente, o *Critério da Comparação* garante a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n}{2n^2+1}$ é divergente.

2. Dada a função $f(z) = z\ln z - z$, determine sua série de *Taylor* em torno de $z_0 = 1$ e o raio de convergência da mesma. **(20 pontos)**

   Solução: Tem-se que:

$$f^{(0)}(z) = z\ln z - z,\ \ f^{(1)}(z) = \ln z,\ \ f^{(2)}(z) = z^{-1},\ \ f^{(3)}(z) = -z^{-2},\ \ f^{(4)}(z) = 2\,z^{-3},$$
$$f^{(5)}(z) = -2\cdot 3\,z^{-4},\ \ f^{(6)}(z) = 2\cdot 3\cdot 4\,z^{-5},\ \ \cdots,\ \ f^{(n)}(z) = (-1)^n(n-2)!\,z^{-(n-1)},\ \text{para } n \ge 2.$$

   Os coeficientes a_n da série solicitada são dados por:

$$a_0 = \frac{f^{(0)}(1)}{0!} = -1,\ \ a_1 = \frac{f^{(1)}(1)}{1!} = 0 \ \text{ e } \ a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{(-1)^n(n-2)!\,1^{-(n-1)}}{n!} = \frac{(-1)^n}{n(n-1)},\ \text{para } n \ge 2.$$

   Portanto, a expansão de f em série de *Taylor* em torno de $z_0 = 1$ é dada por:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-1) + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n(z-1)^n = -1 + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}(z-1)^n,$$

   cujo raio de convergência R é dado por:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{n(n-1)}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n(n-1)}\cdot\frac{n(n+1)}{1}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+1/n}{1-1/n} = 1.$$

3. Dada $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$, determine sua série de *Laurent* na coroa $1 < |z-(1+i)| < \sqrt{5}$. **(20 pontos)**

Solução: Nota-se inicialmente, que $z^2-1 = (z-1)(z+1)$; portanto, é conveniente utilizar o *Método das Frações Parciais* para decompor f; assim, deseja-se determinar a e b tais que:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z+1} = \frac{a(z+1)+b(z-1)}{(z-1)(z+1)} = \frac{(a+b)z+(a-b)}{(z-1)(z+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \Rightarrow b=-a \Rightarrow b=-1/2 \\ a-b=1 \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=1/2 \end{cases} \Leftrightarrow f(z) = \frac{1/2}{z-1} - \frac{1/2}{z+1}.$$

Tem-se então:

$$(I) \qquad \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-(1+i))+i} = \frac{1}{z-(1+i)} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{i}{z-(1+i)})}$$

$$= \frac{1}{z-(1+i)} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, i^n}{(z-(1+i))^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, i^n}{(z-(1+i))^{n+1}},$$

válida na região $\left|\frac{i}{z-(1+i)}\right| < 1$, ou seja, na região $1 < |z-(1+i)|$. Além disso, tem-se que:

$$(II) \qquad \frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-(1+i))+(2+i)} = \frac{1}{2+i} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z-(1+i)}{2+i})}$$

$$= \frac{1}{2+i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2+i)^n}(z-(1+i))^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2+i)^{n+1}}(z-(1+i))^n,$$

válida na região $\left|\frac{z-(1+i)}{2+i}\right| < 1$, ou seja, na região $|z-(1+i)| < |2+i| = \sqrt{5}$. Logo, as duas séries dadas por (I) e (II) valem simultaneamente na interseção das regiões onde cada uma delas é válida, ou seja, na região $1 < |z-(1+i)| < \sqrt{5}$. Segue daí, que na coroa $1 < |z-(1+i)| < \sqrt{5}$ vale que:

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, i^n}{(z-(1+i))^{n+1}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2+i)^{n+1}}(z-(1+i))^n.$$

4. Dada $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$, determine sua série de *Laurent* na região $|z-(1+i)| > \sqrt{5}$. **(20 pontos)**

Solução: Tem-se que:

$$(III) \qquad \frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-(1+i))+(2+i)} = \frac{1}{z-(1+i)} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{2+i}{z-(1+i)})}$$

$$= \frac{1}{z-(1+i)} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2+i)^n}{(z-(1+i))^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2+i)^n}{(z-(1+i))^{n+1}},$$

válida na região $\left|\frac{2+i}{z-(1+i)}\right| < 1$, ou seja, na região $\sqrt{5} = |2+i| < |z-(1+i)|$. Portanto, na interseção desta região com a região $1 < |z-(1+i)|$, obtem-se que:

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, i^n}{(z-(1+i))^{n+1}} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2+i)^n}{(z-(1+i))^{n+1}},$$

para todo z tal que $|z-(1+i)| > \sqrt{5}$.

5. Dada $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$, determine o resíduo de f em cada um dos seus pólos. (**20 pontos**)

Solução: Nota-se que

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2},$$

e definindo-se $g(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2}$ e $h(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$ pode-se expressar

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-1)^2} = \frac{h(z)}{(z+1)^2};$$

portanto, como $z_0 = 1$ não é zero de $g(z)$ e $z_1 = -1$ não é zero de $h(z)$, conclui-se que z_0 e z_1 são pólos de ordem 2 de $f(z)$.

Aplicando-se a *Fórmula dos Resíduos*, obtem-se que:

$$\text{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}[(z-1)^2 f(z)] = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}[\frac{1}{(z+1)^2}] = \lim_{z\to 1} \frac{-2}{(z+1)^3} = -\frac{1}{4}; \qquad (*)$$

e também,

$$\text{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}[(z+1)^2 f(z)] = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}[\frac{1}{(z-1)^2}] = \lim_{z\to -1} \frac{-2}{(z-1)^3} = \frac{1}{4}.$$

6. Dadas $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ e $\Gamma(t) = 2 + 2e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$, calcule $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$ das seguintes formas:

(a) utilizando o *Teorema dos Resíduos*; (**10 pontos**)

(b) utilizando a *Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas.* (**10 pontos**)

Solução: (a) Observa-se inicialmente, que a curva Γ é a circunferência de centro em 2 e raio 2 (sendo, portanto, uma curva fechada, simples e suave); além disso, $z_0 = 1$ é o único pólo de f interior à região interna a Γ. Nestas condições, utilizando-se o *Teorema dos Resíduos* juntamente com o cálculo do resíduo feito em $(*)$ acima, obtem-se que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \text{Res}_{z=1} f(z) = -\frac{2\pi i}{4} = -\frac{\pi i}{2}.$$

(b) Utilizando-se a *Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas*, segue-se que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \frac{\frac{1}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}\,dz = \int_\Gamma \frac{g(z)}{(z-1)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} g^{(1)}(1)$$

$$= 2\pi i \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{(z+1)^2}\right\}_{z=1} = 2\pi i \left\{\frac{-2}{(z+1)^3}\right\}_{z=1} = -\frac{\pi i}{2}.$$