UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da 2a. Avaliação de Cálculo IV - Turma B

1. Analise a convergência das seguintes séries de números complexos:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^n}{3^{n+1}}$; (**10 pontos**) (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2n^2+1}$. (**10 pontos**)

Solução: (a) Aplicando-se o *Critério da Razão*, obtem-se que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(1-i)^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{(1-i)^n}{3^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|1-i|^{n+1}}{3^{n+2}}\cdot\frac{3^{n+1}}{|1-i|^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{|1-i|}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1,$$

e portanto, a série é convergente.

(b) Nota-se que para n suficientemente grande, o valor de $\dfrac{2n+1}{2n^2+1}$ está muito próximo de $\dfrac{2n}{2n^2}(=\dfrac{1}{n})$ e isto sugere que se compare a série em questão com a série harmônica. Sendo assim, definindo-se $a_n = \dfrac{1}{n}$ e $b_n = \dfrac{2n+1}{2n^2+1}$, para $n = 1, 2, \cdots$, tem-se que:

$$a_n \le b_n \Leftrightarrow \frac{1}{n} \le \frac{2n+1}{2n^2+1} \Leftrightarrow 2n^2+1 \le 2n^2+n \Leftrightarrow 1 \le n,$$

ou seja, $a_n \le b_n$, para $n = 1, 2, \cdots$, e portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ (harmônica) é divergente, segue-se pelo *Critério da Comparação* que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{2n^2+1}$ é divergente.

2. Dada a função $f(z) = z\ln z - z$, determine sua série de *Taylor* em torno de $z_0 = 2$ e o raio de convergência da mesma. (**20 pontos**)

Solução: Tem-se que:

$$f^{(0)}(z) = z\ln z - z,\quad f^{(1)}(z) = \ln z,\quad f^{(2)}(z) = z^{-1},\quad f^{(3)}(z) = -z^{-2},\quad f^{(4)}(z) = 2\,z^{-3},$$

$$f^{(5)}(z) = -2\cdot 3\,z^{-4},\quad f^{(6)}(z) = 2\cdot 3\cdot 4\,z^{-5},\quad \cdots,\quad f^{(n)}(z) = (-1)^n(n-2)!\,z^{-(n-1)},\ \text{para } n \ge 2.$$

Sendo assim, segue-se que os coeficientes a_n da série de *Taylor* em questão são dados por:

$$a_0 = \frac{f^{(0)}(2)}{0!} = 2(\ln 2 - 1),\quad a_1 = \frac{f^{(1)}(2)}{1!} = \ln 2,$$

$$\text{e}\qquad a_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n(n-2)!\,2^{-(n-1)}}{n!} = \frac{(-1)^n}{n(n-1)2^{n-1}},\ \text{para } n \ge 2.$$

Portanto, a expansão de f em série de *Taylor* em torno de $z_0 = 2$ é dada por:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-2) + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n(z-2)^n = 2(\ln 2 - 1) + \ln 2\,(z-2) + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)2^{n-1}}(z-2)^n.$$

Para determinar o raio R de convergência da série faz-se:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{n(n-1)2^{n-1}}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)2^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)2^n}{n(n-1)2^{n-1}} = 2\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n-1} = 2\lim_{n\to+\infty}\frac{1+1/n}{1-1/n} = 2.$$

3. Dada $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, determine sua série de *Laurent* na coroa $1 < |z-2i| < 3$. (**20 pontos**)

Solução: Observa-se que $z^2+1 = (z-i)(z+i)$; portanto, para utilizar o *Método das Frações Parciais* para decompor f deve-se determinar a e b tais que:

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{z+i} = \frac{a(z+i)+b(z-i)}{(z-i)(z+i)} = \frac{(a+b)z+(a-b)i}{(z-i)(z+i)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \Rightarrow b=-a \Rightarrow b = i/2 \\ (a-b)i = 1 \Rightarrow 2a = -i \Rightarrow a = -i/2 \end{cases} \Leftrightarrow f(z) = -\frac{i/2}{z-i} + \frac{i/2}{z+i}.$$

Tem-se que:

$$(I) \qquad \frac{1}{z-i} = \frac{1}{(z-2i)+i} = \frac{1}{z-2i}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{i}{z-2i})} = \frac{1}{z-2i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\, i^n}{(z-2i)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\, i^n}{(z-2i)^{n+1}}$$

válida na região $\left|\frac{i}{z-2i}\right| < 1$, ou seja, na região $1 < |z-2i|$. Tem-se também que:

$$(II) \qquad \frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-2i)+3i} = \frac{1}{3i}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z-2i}{3i})} = \frac{1}{3i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(3i)^n}(z-2i)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(3i)^{n+1}}(z-2i)^n,$$

válida na região $\left|\frac{z-2i}{3i}\right| < 1$, ou seja, na região $|z-2i| < |3i| = 3$. Portanto, utilizando-se (I) e (II), conclui-se que na interseção das regiões $1 < |z-2i|$ e $|z-2i| < 3$ tem-se válida a expansão em série de *Laurent*:

$$f(z) = -\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z-i} + \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z+i} = -\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\, i^n}{(z-2i)^{n+1}} + \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(3i)^{n+1}}(z-2i)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\, i^{n+1}}{2(z-2i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{2\cdot 3^{n+1}}(z-2i)^n.$$

4. Dada $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, determine sua série de *Laurent* na região $|z-2i| > 3$. (**20 pontos**)

Solução: Tem-se que:

$$(III) \qquad \frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-2i)+3i} = \frac{1}{z-2i}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{3i}{z-2i})} = \frac{1}{z-2i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(3i)^n}{(z-2i)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(3i)^n}{(z-2i)^{n+1}},$$

válida na região $\left|\frac{3i}{z-2i}\right| < 1$, ou seja, na região $3 = |3i| < |z-2i|$. Portanto, utilizando-se (I) e (III), vê-se que na interseção da região $1 < |z-2i|$ com a região $3 < |z-2i|$, obtem-se que:

$$f(z) = -\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z-i} + \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z+i} = -\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\, i^n}{(z-2i)^{n+1}} + \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(3i)^n}{(z-2i)^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\, i^{n+1}}{2(z-2i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\, 3^n\, i^{n+1}}{2(z-2i)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[3^n-1](-1)^n\, i^{n+1}}{2(z-2i)^{n+1}}.$$

5. Dada $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, determine o resíduo de f em cada um dos seus pólos. (**20 pontos**)

Solução: Observa-se que

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2};$$

logo, colocando-se $g(z) = \dfrac{1}{(z+i)^2}$ e $h(z) = \dfrac{1}{(z-i)^2}$ pode-se expressar

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^2} = \frac{h(z)}{(z+i)^2}.$$

Dado que $z_0 = i$ não é zero de $g(z)$ e $z_1 = -i$ não é zero de $h(z)$, conclui-se que z_0 e z_1 são pólos de ordem 2 de $f(z)$.

Sendo assim, aplicando-se a *Fórmula dos Resíduos*, obtem-se que:

$$\mathrm{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}[(z-i)^2 f(z)] = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}[\frac{1}{(z+i)^2}] = \lim_{z\to i} \frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}. \qquad (*)$$

Tem-se também que:

$$\mathrm{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}[(z+i)^2 f(z)] = \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}[\frac{1}{(z-i)^2}] = \lim_{z\to -i} \frac{-2}{(z-i)^3} = -\frac{1}{4i} = \frac{i}{4}.$$

6. Dadas $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ e $\Gamma(t) = 1 + i + 2e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$, calcule $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\, dz$ das seguintes formas:

(a) utilizando o *Teorema dos Resíduos*; (**10 pontos**)

(b) utilizando a *Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas.* (**10 pontos**)

Solução: (a) Inicialmente, nota-se que a curva Γ em questão é a circunferência de centro em $1 + i$ e raio 2, tratando-se portanto, de uma curva fechada, simples e suave; em seguida, vê-se $z_0 = i$ é o único pólo de f interior à região interna a Γ. Portanto, utilizando-se o *Teorema dos Resíduos* e o resíduo calculado em $(*)$ acima, conclui-se que:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{z=i} f(z) = -\frac{2\pi i^2}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Utilizando-se a *Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas*, segue-se que:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_\Gamma \frac{\frac{1}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\, dz = \int_\Gamma \frac{g(z)}{(z-i)^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} g^{(1)}(i)$$
$$= 2\pi i \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{(z+i)^2}\right\}_{z=i} = 2\pi i \left\{\frac{-2}{(z+i)^3}\right\}_{z=i} = 2\pi i \frac{(-2)}{2^3\, i^2\, i} = \frac{\pi}{2}.$$