Gabarito da 2a. Avaliação de CM044 - Cálculo IV

1. Dadas a função $f(z) = \dfrac{\text{sen } z}{z^{2n}}$, com $n \in \mathbb{N}$, e γ a curva $|z| = 1$, utilizar a fórmula integral de *Cauchy* para derivadas, para calcular $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$. **(20 pontos)**

   Solução: Seja $g(z) = \text{sen } z$, para todo $z \in \mathbb{C}$; então g é analítica em todo o plano complexo (e em particular, sobre a curva γ e na região interna à mesma curva). Logo, pela fórmula integral de *Cauchy* para derivadas deve-se ter:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma \frac{\text{sen } z}{z^{2n}} dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z^{2n}} dz = \frac{2\pi i}{(2n-1)!} \frac{d^{(2n-1)}}{dz^{2n-1}} [g(z)]_{z=0}$$

   Tem-se então:

   $g(z) = \text{sen } z \Rightarrow g(0) = 0$

   $g'(z) = \cos z \Rightarrow g'(0) = 1$

   $g''(z) = -\text{sen } z \Rightarrow g''(0) = 0$

   $g'''(z) = -\cos z \Rightarrow g'''(0) = -1$

   $g^{(4)}(z) = \text{sen } z \Rightarrow g^{(4)}(0) = 0$

   $g^{(5)}(z) = \cos z \Rightarrow g^{(5)}(0) = 1$

   $\vdots$

   Nota-se que $g^{(2n)}(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $g^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde se conclui que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \frac{(-1)^{n+1} 2\pi i}{(2n-1)!}.$$

2. Decida se cada uma das séries a seguir é convergente ou é divergente e justifique:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3i}{5n-i}$ **(10 pontos)**

   Solução: Tem-se que tal série é divergente pois o limite do termo geral da série é diferente de zero; de fato, tem-se que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3i}{5n-i} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3i}{n}}{5-\frac{i}{n}} = \frac{2}{5} \neq 0.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n2^n}$ **(10 pontos)**

   Solução: Pelo critério da razão tem-se que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{(n+1)+i}{(n+1)2^{n+1}}|}{|\frac{n+i}{n2^n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)+i|}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{|n+i|} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} |\frac{(n+i+1}{(n+i)}| \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} |1 + \frac{1}{n+i}| \cdot \lim_{n\to\infty} [1 - \frac{1}{n+1}] = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1;$$

   e portanto, a série é convergente.

3. Determine a série de *MacLaurin* de $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^3}$ e, em seguida, o raio de convergência da mesma. **(20 pontos)**

Solução: Nota-se que $f(z) = (1-z)^{-3}$, $f'(z) = 3(1-z)^{-4}$, $f''(z) = 3\cdot 4(1-z)^{-5}$, $f'''(z) = 3\cdot 4\cdot 5(1-z)^{-6}$, $\cdots$, e mais geralmente, $f^{(n)}(z) = \dfrac{(n+2)!}{2}(1-z)^{-(n+3)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, segue que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{(n+2)!}{2n!} \cdot 1 = \dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, deve-se ter

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} z^n.$$

Resulta que

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}{\frac{(n+3)(n+2)}{2}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = 1.$$

4. Para algum z_0 de sua escolha, determine todas as possíveis séries de *Laurent* da função $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ com centro em z_0. **(20 pontos)**

Solução: Nota-se inicialmente, que se $z_0 = 2 + iy$, onde $y \in \mathbb{R}$ é qualquer, então $|z_0 - 1| = |z_0 - 3|$ e daí existem apenas duas possíveis séries de *Laurent* de f com centro em z_0; o mesmo se passa, evidentemente, se $z_0 = 1$ ou se $z_0 = 3$. Sendo assim, para $z_0 = 1$, por exemplo, tem-se que existem apenas duas séries de *Laurent* de f com centro em tal z_0 - a saber, uma série em cada uma das regiões $0 < |z-1| < 2$ e $|z-1| > 2$. De fato, tem-se que:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)-2} = \frac{1}{z-1}\cdot\frac{-1}{2[1-(-\frac{z-1}{2}]} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1}, \end{aligned}$$

para $|z-1| > 0$ e $|\frac{z-1}{2}| < 1$, ou seja, para $0 < |z-1| < 2$.

Por outro lado, tem-se também que:

$$f(z) = \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)-2} = \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)[1-\frac{2}{z-1}]} = \frac{1}{(z-1)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-1)^{n+2}},$$

para $\frac{2}{|z-1|} < 1$, ou seja, para $|z-1| > 2$.

De forma análoga, se fosse $z_0 = 3$ então teria-se que:

$$f(z) = \frac{1}{z-3}\cdot\frac{1}{(z-3)+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{(z-3)}{2})} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-3)^{n-1};$$

para $0 < |z-3| < 2$; e ainda,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-3}\cdot\frac{1}{(z-3)+2} = \frac{1}{z-3}\cdot\frac{1}{(z-3)[1+\frac{2}{z-3}]} = \frac{1}{z-3}\cdot\frac{1}{(z-3)[1-(-\frac{2}{z-3})]} \\ &= \frac{1}{(z-3)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-3)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-3)^{n+2}}, \end{aligned}$$

para $\frac{2}{|z-3|} < 1$, ou seja, para $|z-3| > 2$.

5. Sejam a função $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ e a curva $\gamma(t) = 4 + \frac{3}{2}e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$.

(a) Calcule o resíduo de f em cada um dos seus pólos, utilizando suas séries de *Laurent*; (**10 pontos**)

Solução: Para o pólo $z_0 = 1$ tem-se que a série de *Laurent* de f na região $0 < |z-1| < 2$ é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1} \quad = \quad -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1} \quad = \frac{b_1}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1},$$

e daí, segue que $\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = b_1 = -\dfrac{1}{2}$.

Por sua vez, para o pólo $z_0 = 3$, tem-se que a série de *Laurent* de f na região $0 < |z-3| < 2$ é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^{n+1}}(z-3)^{n-1} = \ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^{n+1}}(z-3)^{n-1} = \frac{b_1}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^{n+1}}(z-3)^{n-1},$$

para $0 < |z-3| < 2$. Segue daí que $\operatorname{Res}_{z=3} f(z) = b_1 = \dfrac{1}{2}$.

(b) Calcule $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$, utilizando o Teorema dos Resíduos. (**10 pontos**)

Solução: Nota-se que se $z = z(t) = \gamma(t)$ então $z = 4 + \frac{3}{2}e^{it}$, e daí, $|z-4| = \frac{3}{2}|e^{it}| = \frac{3}{2}$; logo, γ é a circunferência com centro em 4 e raio $\frac{3}{2}$. O único pólo de f na região interna à curva γ é $z_0 = 3$; como f e γ estão nas condições do Teorema dos Resíduos, segue que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=3} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i.$$

6. Considere a função $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^6}$.

(a) Determine a ordem do pólo $z_0 = 0$. (**10 pontos**)

Solução: Para todo $z \in \mathbb{C}$, tem-se que:

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + - \cdots \Longrightarrow \frac{\operatorname{sen} z}{z^6} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z} - \frac{z}{7!} + - \cdots$$

Portanto, $m = 5$ é o maior número natural para o qual $b_m \neq 0$, ou seja, $z_0 = 0$ é pólo de ordem 5.

(b) Calcule $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$, onde γ é a curva $|z| = R_0$ (para algum $R_0 > 0$). (**10 pontos**)

Solução: Para qualquer $R_0 > 0$, tem-se que $z_0 = 0$ está na região interna à curva γ; como f e γ estão nas condições do Teorema dos Resíduos, segue que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1}{5!} = \frac{\pi i}{60}.$$