

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

CURSO  
**CONTROLE ESTATÍSTICO DE QUALIDADE**  
(Notas de Aula)

**PROF. ADILSON DOS ANJOS**

Curitiba, 5 de agosto de 2008

---

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade . . . . .	1
1.2	Histórico da qualidade . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Conceitos da qualidade</b>	<b>6</b>
2.1	Terminologias da Qualidade . . . . .	6
2.2	Sistemas da Qualidade . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Ferramentas da Qualidade</b>	<b>13</b>
3.1	Ferramentas do Controle Estatístico de Processos . . . . .	13
3.1.1	Folha de verificação . . . . .	13
3.1.2	Fluxograma . . . . .	14
3.1.3	Gráfico de Pareto . . . . .	15
3.1.4	Diagrama de causa e efeito . . . . .	17
3.1.5	Gráfico de dispersão . . . . .	19
3.1.6	Gráfico de tendência . . . . .	19
3.2	Controle do erro tipo II . . . . .	20
3.2.1	Exemplo . . . . .	22
3.2.2	Curva Característica de Operação (CCO) . . . . .	23
3.2.3	CCO para obter o tamanho de amostra . . . . .	23

<b>4</b>	<b>Gráficos de Controle</b>	<b>26</b>
4.1	Introdução . . . . .	26
4.1.1	O gráfico . . . . .	28
4.1.2	Construção do gráfico . . . . .	28
4.1.3	Análise do padrão de gráficos de controle . . . . .	30
4.2	Gráficos de controle para variáveis . . . . .	33
4.2.1	Gráficos de controle para $\bar{x}$ e R . . . . .	34
4.2.2	Gráficos de controle para $\bar{x}$ e s . . . . .	38
4.2.3	Gráfico s . . . . .	38
4.3	Gráficos de controle para atributos . . . . .	41
4.3.1	Gráfico p . . . . .	41
4.3.2	Gráfico np . . . . .	43
4.3.3	Gráfico c . . . . .	44
4.3.4	Gráfico $\mu$ . . . . .	45
4.4	Tamanho de amostra para gráficos de controle . . . . .	46
4.4.1	Introdução . . . . .	46
4.4.2	Uso da CCO . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Índices de Capacidade</b>	<b>52</b>
5.1	Capacidade do Processo . . . . .	52
5.1.1	Coefficiente de capacidade potencial do processo - $C_p$ . . . . .	53
5.1.2	Coefficiente de capacidade atual - $C_{pk}$ . . . . .	55
5.1.3	Coefficiente de capacidade - $C_{pm}$ . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Amostragem por aceitação</b>	<b>62</b>
6.1	Introdução . . . . .	62
6.2	Tipos de planos amostrais por aceitação . . . . .	64

---

6.2.1	Plano de amostragem simples para atributos . . . . .	64
6.2.2	Plano de amostragem duplo para atributos . . . . .	67
6.2.3	Amostragem para variáveis . . . . .	68
<b>A</b>	<b>Constantes para gráficos de controle</b>	<b>69</b>

# Lista de Figuras

2.1	Limites de especificação com 6 sigmas. . . . .	11
2.2	Limites de especificação com 3 sigmas. . . . .	11
3.1	Estrutura de um fluxograma. . . . .	15
3.2	Exemplo de um fluxograma. . . . .	16
3.3	Exemplo de um gráfico de Pareto. . . . .	17
3.4	Exemplo de um diagrama de causa e efeito. . . . .	18
3.5	Exemplo de um gráfico de dispersão. . . . .	20
3.6	Exemplo de um gráfico de tendência. . . . .	21
3.7	Dist. de $Z_0$ e do Erro do tipo II. . . . .	22
3.8	Curva Característica de Operação ( $\alpha = 0,05$ ). . . . .	24
3.9	Curva Característica de Operação. . . . .	25
4.1	Gráfico de controle: idéia básica. . . . .	27
4.2	Gráfico de controle: idéia básica. . . . .	30
4.3	Gráfico de controle: processo tendencioso. . . . .	31
4.4	Gráfico de controle: processo cíclico. . . . .	31
4.5	Efeito da média e desvio padrão em relação aos limites de controle. . . . .	33
4.6	Curva Característica de Operação para o gráfico $\bar{x}$ com L=3 sigmas . . . . .	49
4.7	Curva Característica de Operação para o gráfico $p$ com L=3 sigmas. . . . .	50

---

4.8	Curva Característica de Operação para o gráfico $p$ com $L=3$ sigmas. . .	51
5.1	Exemplo do uso do $C_{pm}$ . . . . .	58
5.2	Região da média para $C_{pm} \geq 1$ . . . . .	61
6.1	Plano de amostragem simples para atributos. . . . .	65
6.2	Curva característica de operação para uma amostragem simples de atributos, com $n=89$ e $c=2$ . . . . .	66
6.3	CCO teórica, ideal. . . . .	67
6.4	Plano de amostragem duplo. . . . .	68

# Lista de Tabelas

2.1	Descrição das Normas ISO. . . . .	9
2.2	Relação entre nível sigma e defeitos em ppm em um processo. . . . .	12
3.1	Folha de frequência. . . . .	14
4.1	Valores tabelados para $d_2$ . . . . .	35
5.1	Relação entre $C_p$ , $C_{pk}$ e ppm. . . . .	56
A.1	Valores tabelados. . . . .	69

# Capítulo 1

## Introdução

### Sumário

---

1.1	Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade . . . . .	1
1.2	Histórico da qualidade . . . . .	3

---

### 1.1 Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade

O *Controle de Qualidade* implica em diferentes ações sobre um sistema. Ações que vão do simples estudo de um processo a uma drástica mudança de atitudes pessoais e administrativas.

Muitas transformações podem surgir depois que informações são obtidas de um processo.

Muitas destas “informações” são dados (numéricos ou não) que precisam de uma análise estatística para serem compreendidos ou melhor visualizados.

A análise de dados, voltada para a melhoria da qualidade de processos ou serviços, é chamada de **controle estatístico de qualidade** ou **controle estatístico de processos (CEP)**.

O controle estatístico de qualidade envolve o uso de técnicas ou métodos elementares de estatística, utilizados em qualquer área do conhecimento, e métodos específicos voltados, quase que, exclusivamente para o entendimento de sistemas de produção e/ou serviços.



No decorrer do texto serão abordados os principais métodos estatísticos voltados ao controle de qualidade.

Sempre que possível, os exemplos serão abordados com enfoque computacional.

## 1.2 Histórico da qualidade

A preocupação com a qualidade de produtos ou serviços, de uma maneira geral, sempre existiu. Notadamente, com a revolução industrial, a produção em grandes quantidades, foi motivo de preocupação, e gerou estudos sobre meios mais eficientes de produção.

Historicamente, os conflitos militares foram impulsionadores da qualidade. Desde a preocupação com a natureza de ligas metálicas para fabricação de espadas e armaduras, até os métodos de amostragem de material bélico, nos tempos mais recentes.

Em Montgomery (1997), há uma tabela com datas referentes ao desenvolvimento do controle estatístico de qualidade. As principais datas referenciadas são:

- Em 1924, Shewhart apresenta o gráfico de controle;
- Em 1922 e 1923, Fischer desenvolve algumas técnicas referentes ao planejamento de experimentos;
- Entre 1940 e 1943, são desenvolvidos planos de amostragem para o exército dos Estados Unidos;
- Em 1946 é fundada a ASQC: American Society for Quality Control e a JUSE: Japanese Union of Scientists and Engineers. Deming é convidado para ir ao Japão auxiliar na reconstrução e inicia seminários em controle de qualidade;
- Em 1948, Taguchi inicia estudos sobre o planejamento de experimentos;
- Em 1950, Kaori Ishikawa cria o diagrama de causa e efeito;
- Em 1951, é criado o Prêmio Deming;
- Em 1960, Kaori Ishikawa cria os primeiros *círculos de qualidade* no Japão. Os círculos de controle de qualidade são pequenos grupos de funcionários com treinamento básico em técnicas de controle de qualidade (incluindo técnicas elementares de estatística);
- Entre 1975 e 1978 livros sobre planejamento de experimentos começam a aparecer na indústria, principalmente aquelas da área química.

Deming, em 1950, definiu os chamados “14 pontos de Deming”, como uma filosofia de qualidade para organizações. Os 13 pontos são:

1. Devem ser estabelecidos, de forma constante, objetivos de melhoria do produto e/ou serviço;
2. Adotar uma nova filosofia. Cada empresa ou instituição deve pensar que produtos com defeitos ou serviços mal executados são custos;
3. Não realizar inspeção em massa para realizar o controle de qualidade. Inspeccionar produtos ou serviços depois que eles foram fabricados ou realizados e descobrir que existem problemas para serem remediados é um custo muito alto. É melhor trabalhar com prevenção de falhas ou defeitos durante o processo.
4. Não comprar produtos ou contratar serviços pelo menor preço. Considere critérios de qualidade. Muitas vezes o menor preço não implica em maiores lucros. O “barato pode sair caro”;
5. Aprimorar constantemente os métodos de produção e de prestação de serviços;
6. Promover treinamento para todos da empresa;
7. Realizar uma liderança com o objetivo de ajudar e não de punir. O trabalho e o produto devem ser melhorados;
8. Acabar com o medo dos empregados. Permitir que as pessoas contribuam com informações (positivas ou negativas) é saudável em um processo de melhoria contínua da qualidade;
9. Os entraves entre departamentos da empresa devem ser eliminados. Todos devem trabalhar como um time;
10. Acabar com metas de produção sem que existam meios apropriados e desenvolvidos para isso;
11. Acabar com quotas de produção e padrões de trabalho;
12. Os empregados devem ter liberdade de executar seu trabalho;
13. Inserir na empresa, programas de educação para todos os empregados. Por exemplo, técnicas básicas de estatística podem ajudar a resolver muitos problemas;
14. Criar e desenvolver na empresa uma condição que permita que os 13 pontos anteriores possam ser aplicados.

Todos esses “pontos” propostos implicam em mudanças. Deve haver um comprometimento do ponto de vista gerencial para que estas mudanças possam ocorrer.

Outros autores destacam-se pela aplicação do controle de qualidade, com mais ou menos enfoque na aplicação de métodos estatísticos, como por exemplo: Joseph M. Juran, Armanda V. Feigenbaum, entre outros.

# Capítulo 2

## Conceitos da qualidade

### Sumário

---

<b>2.1 Terminologias da Qualidade . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>2.2 Sistemas da Qualidade . . . . .</b>	<b>8</b>

---

### 2.1 Terminologias da Qualidade

Em todas as fases de um processo de produção ou serviços, muitos termos são utilizados para designar diferentes mecanismos ou características do controle de qualidade. Alguns dos principais termos são apresentados a seguir.

Engenharia da qualidade: um conjunto de técnicas que permitem assegurar que um produto ou serviço atenda as necessidades dos clientes;

Qualidade: existem várias definições sobre qualidade. Isso pode variar de cliente para cliente, de um fornecedor, de um produto ou serviço, para outro.

Basicamente, pode-se dizer que: “qualidade é a capacidade de um produto ou serviço satisfazer as necessidades de um cliente”.

Montgomery (2001) define qualidade como sendo “inversamente proporcional à variabilidade”.

Retrabalho: quando algum produto ou serviço não estiver dentro de um padrão aceitável, para torná-lo aceitável, pode-se consertar o produto ou refazer o serviço. Isso implica em custos e dependendo da quantidade de retrabalho necessária, isso pode ser impensável do ponto de vista financeiro.

Desempenho: capacidade de um produto ou serviço executar uma tarefa.

Confiabilidade: é a capacidade de um produto operar sem a necessidade de reparos.

Durabilidade: se refere ao tempo de vida de um produto. Um consumidor prefere um produto que dure por mais tempo.

Assistência técnica: facilidade para reparar um produto.

Estética: aparência de um produto.

Características: aquilo que o produto pode desempenhar.

Qualidade percebida: refere-se sobre o julgamento que as pessoas têm sobre o produto ou serviço oferecido pela empresa. Em geral, a *marca* do produto ou o *nome da empresa* são critérios utilizados pelo consumidor.

Conformidade com especificação está associado a capacidade de um produto funcionar para aquilo que foi planejado.

O termo qualidade pode ser entendido sobre vários aspectos. Cada consumidor possuirá um ponto de vista sobre o que é importante em um produto ou serviço. Por esse motivo, muitas características são consideradas para a elaboração de um produto ou serviço.

Especificação: é a medida requerida para que um produto atenda aos critérios de qualidade.

Variável: é uma medida, normalmente contínua, exemplo: altura, diâmetro.

Atributo: em geral é uma medida discreta, como contagem.

Valor nominal (target): é o valor de uma medida que permite que o produto atenda as características de qualidade. Em geral, um valor nominal é expresso na forma de um intervalo.

O maior valor nominal é chamado de Limite Superior de Especificação (LSE) e o menor valor de Limite Inferior de Especificação (LIE). Dependendo da variável ou atributo de interesse, apenas um dos limites pode ser especificado. Por exemplo, o número de falhas de um processo.

Conformidade: quando um produto possui medidas dentro dos limites de especificação, diz-se que ele está **conforme**. Caso contrário, ele será chamado de **não-conforme**.

Claro, em algumas situações, o produto pode não atender aos critérios de especificação mas, mesmo assim, ainda poderá ser utilizado. Suponha um copo plástico descartável. Se a espessura for maior do que a especificada, o produto ainda poderá ser utilizado pelo consumidor. Quando um produto apresentar um característica não-conforme que o impeça que seja utilizado sem problemas, diz-se que ele possui um **defeito**.

## 2.2 Sistemas da Qualidade

Um “Sistema da Qualidade” pode ser visto como um conjunto de normas, procedimentos e técnicas que visam assegurar a qualidade de produtos ou serviços.

Obviamente, para cada ramo de atividade existem critérios específicos para serem utilizados. Por esse motivo, hoje em dia, existem muitos sistemas da qualidade implantados nas mais diferentes empresas e instituições.

Alguns dos principais sistemas da qualidade são:

### 1. 5S

É uma sistema que foi desenvolvido no Japão e está relacionado com à forma de educação dos filhos pelos pais ao modo japonês. No Brasil, o “5S” teve início na década de 90.

O termo “5S” é devido às cinco palavras, iniciadas pela letra S (em japonês), que correspondem as fases do método: Seiri, Seiton, Seiso, Seiketsu e Shitsuke.

O significado dos “5S” são:

Seiri → Organização: separar o necessário (descarte);

Seiton → Ordenação : agrupar o necessário;

Seiso → Limpeza: eliminar a sujeira;

Seiketsu → Asseio: conservar a higiene;

Shitsuke → Disciplina: cumprir normas.

### 2. Normas ISO (International Standard Organization)

Essa normas foram criadas em 23 de fevereiro de 1947. Inicialmente, para garantir a qualidade ao cliente e criar normas técnicas para o relacionamento comercial entre países, por isso a vinculação com a ONU (Organização das Nações Unidas).

No Brasil, as “Normas ISO” são gerenciadas e representadas pela ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas). No Brasil as normas ISO são chamadas de NBR ([www.inmetro.gov.br](http://www.inmetro.gov.br)).

A série ISO 9000 é um conjunto de 5 normas sobre gestão e garantia da qualidade (tabela 2.1). No Brasil estão em vigor desde 1987.

Tabela 2.1: Descrição das Normas ISO.

NBR	ISO	Descrição
19.000	9.000	Orientações gerais sobre o uso das normas.
19.001	9.001	Garantia da qualidade no projeto, desenv. e produção.
19.002	9.002	Normas para garantia da qualidade na produção.
19.003	9.003	Normas para garantia da qualidade na inspeção e ensaios finais.
19.004	9.004	Diretrizes para gestão da qualidade

As Normas 9.001, 9.002 e 9.003 são passíveis de certificação, ou seja, para que uma empresa possa utilizar o ‘selo ISO’ ou ‘NBR’ é necessário que ela seja avaliada por outra empresa. A Norma 9.001 é a mais abrangente e a 9.003 uma das mais simples.

Basicamente, as normas ISO tratam, de maneira intensa, da normalização.

Mais informações podem ser obtidas no site [www.iso.org](http://www.iso.org).

### 3. Modelos da Qualidade Total (Total Quality Control - TQC)

Os modelos da qualidade total surgiram no Japão após a segunda guerra mundial. Nos modelos da qualidade total é marcante o uso de métodos estatísticos.

Os principais idealizadores foram: Edwards Deming, Joseph Juran e Armand V. Feigenbaum. O principal enfoque é que os modelos devem atingir toda a instituição (por isso a palavra ‘Total’).

Existem diferentes modelos propostos para a Qualidade Total. Muitas vezes, os modelos devem ser adaptados as condições de cada empresa.

### 4. Prêmio Deming

O Prêmio Deming foi criado no Japão em 1951. Ele procurava incentivar as empresas a utilizarem métodos de Controle de Qualidade pela avaliação dos processos que utilizavam. Por sua vez, as empresas premiadas procuravam ligar a imagem do prêmio com seus produtos.

O prêmio Deming foi o precursor do Prêmio Nacional da Qualidade em vários países.



No Brasil existe o Prêmio Nacional da Qualidade ([www.fpnq.org.br](http://www.fpnq.org.br)). Para premiação, apenas é definido “o que” deve ser realizado. Não é estabelecido “como” atingir os resultados. Na verdade, cada empresa pode possuir qualquer modelo de qualidade.

A cada ano, critérios são estabelecidos para a premiação das empresas. Em geral, esses critérios abordam aspectos como: liderança, planejamento estratégico, gestão de pessoas e processos, resultados do negócio entre outros.

No Brasil, algumas das empresas premiadas foram: IBM do Brasil, Xerox do Brasil, SERASA, ALCOA, Citibank, WEG e Siemens.

#### 5. Seis Sigma (Motorola)

Foi lançado pela Motorola, nos Estados Unidos, em 15 de janeiro de 1987, por Bob Galvin, um diretor executivo. Foi apresentado na forma de uma palestra e posteriormente em fitas de vídeo e em material impresso para toda a empresa.

Tinha como meta, melhorar a qualidade de produtos e serviços em 10 vezes até o ano de 1989 e, no mínimo, 100 vezes até 1991 e, então, possuir Seis Sigma até 1992.

O programa, basicamente, possuía duas linhas de atuação: uma em nível gerencial, onde cada indivíduo tornou-se responsável pelos processos de produção e serviços; outra, era baseada em métodos estatísticos.

A idéia é que, ao avaliar alguma característica do produto e medir o desvio padrão, esse valor deve ser tal que, seja possível ajustar  $\pm 6$  desvios dentro dos limites de especificação (figura 2.1).

O Seis Sigma não deve ser confundido com  $\pm 3$  sigmas (figura 2.2).

Uma medida para confrontar o Seis Sigma como uma medida de qualidade é ppm (partes por milhão). Por exemplo, na tabela 2.2, pode-se ver uma relação entre o nível sigma de um produto e ppm.

Figura 2.1: Limites de especificação com 6 sigmas.

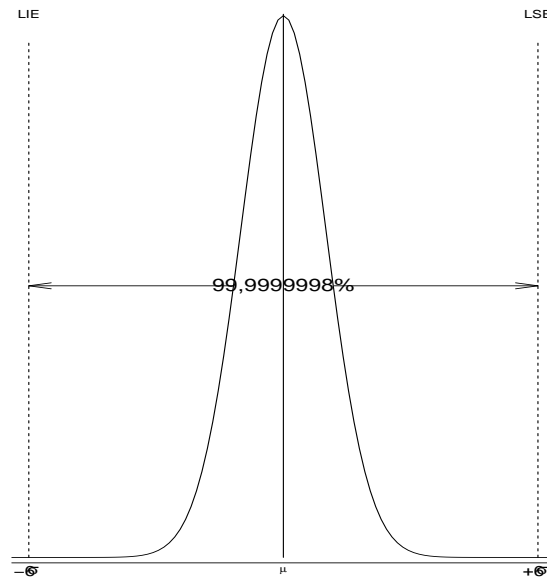


Figura 2.2: Limites de especificação com 3 sigmas.

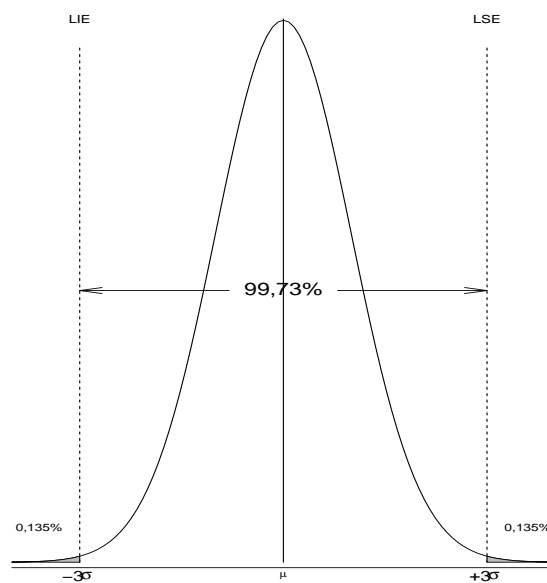


Tabela 2.2: Relação entre nível sigma e defeitos em ppm em um processo.

Nível sigma	ppm (defeitos)	Normal
$\pm 1,0\sigma$	317.320	
$\pm 2,0\sigma$	45.500	
$\pm 3,0\sigma$	2.700	
$\pm 4,0\sigma$	63,5	99,994 %
$\pm 4,5\sigma$	6,9	99,99931 %
$\pm 5,0\sigma$	0,6	99,999939 %
$\pm 6,0\sigma$	0,002	99,9999998 %

# Capítulo 3

## Ferramentas da Qualidade

### Sumário

---

<b>3.1 Ferramentas do Controle Estatístico de Processos . . . .</b>	<b>13</b>
3.1.1 Folha de verificação . . . . .	13
3.1.2 Fluxograma . . . . .	14
3.1.3 Gráfico de Pareto . . . . .	15
3.1.4 Diagrama de causa e efeito . . . . .	17
3.1.5 Gráfico de dispersão . . . . .	19
3.1.6 Gráfico de tendência . . . . .	19
<b>3.2 Controle do erro tipo II . . . . .</b>	<b>20</b>
3.2.1 Exemplo . . . . .	22
3.2.2 Curva Característica de Operação (CCO) . . . . .	23
3.2.3 CCO para obter o tamanho de amostra . . . . .	23

---

### 3.1 Ferramentas do Controle Estatístico de Processos

#### 3.1.1 Folha de verificação

Quando algum defeito surge, inicialmente, deve-se obter dados com a finalidade de tentar esclarecer as causas. Uma forma simples, mas bastante útil, é organizar

os dados obtidos em uma “planilha”, identificando o problema e a frequência de ocorrência, conforme a tabela 3.1.

Tabela 3.1: Folha de frequência.

Problemas	Mês				Freq.	Freq. Acum.	Freq. Relativa
	1	2	3	4			
A	2	4	3	4	13	13	59,09
B	1	1		2	4	17	77,27
C	1	1	1		3	20	90,91
D		1		1	2	22	100,0
Total					22		

A construção da folha de verificação deve considerar os seguintes aspectos:

- (a) definir, claramente, qual característica estará sendo estudada. Por exemplo, o ruído excessivo de um compressor.
- (b) Definir o período de coleta de dados. Em alguns casos, deve-se considerar características de sazonalidade como verão e inverno, período de férias, turnos etc.
- (c) A construção deve ser simples, clara e as colunas devem ser identificadas. Deve existir espaço suficiente para o registro das ocorrências.
- (d) A obtenção dos dados deve ser de forma fidedigna, ou seja, os dados devem ser consistentes e confiáveis. Por exemplo, as pessoas responsáveis pela coleta devem ser treinadas para a atividade e, devem ter tempo disponível para realizar a tarefa.

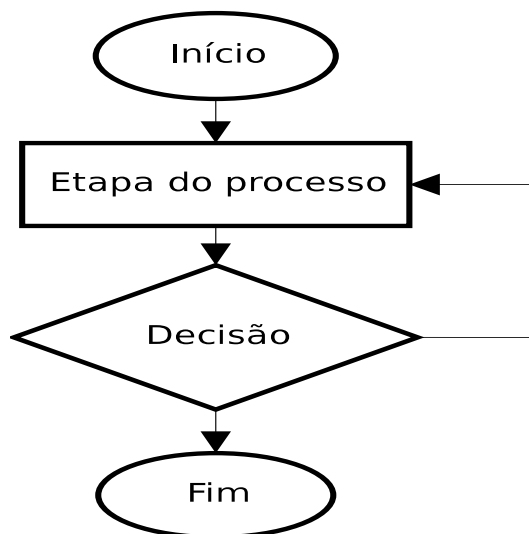
### 3.1.2 Fluxograma

Um fluxograma é uma representação gráfica de um processo. Basicamente, um fluxograma possui um início, seguido das etapas do processo e as respectivas decisões que devem ser tomadas em casos específicos (figura 3.1).

Pela análise do fluxograma, pode-se identificar possíveis fontes de problemas no processo.

Um fluxograma pode ser aplicado a qualquer processo ou serviço. As pessoas com maior conhecimento sobre o processo ou serviço são quem devem construir e analisar o fluxograma do processo ou serviço.

Figura 3.1: Estrutura de um fluxograma.



Exemplo de Fluxograma: Ligando um computador pessoal (PC) e se conectando a uma rede.

### 3.1.3 Gráfico de Pareto

Um gráfico de Pareto é um gráfico de barras da distribuição de frequências de problemas encontrados em um produto ou serviço. As informações podem ser obtidas de um folha de verificação ou de outras fontes.

O gráfico de Pareto indica sobre quais problemas devem ser concentrados esforços para solucioná-los. Na verdade, o gráfico mostra qual o problema que teve a maior frequência e não o mais importante. Além da frequência, outros critérios podem ser utilizados, como: custos relativos a cada problema, importância sobre a qualidade (funcionalidade), conformidade etc.

Pode-se, ainda, adicionar ao gráfico, uma linha com os percentuais acumulados das categorias. Esses percentuais podem, também, ser utilizados como um critério de atuação sobre o processo. Por exemplo, pode-se atuar, somente, e inicialmente, sobre os problemas que representem 50% ou mais da frequência total.

Exemplo de um gráfico de Pareto (figura 3.3):

Figura 3.2: Exemplo de um fluxograma.

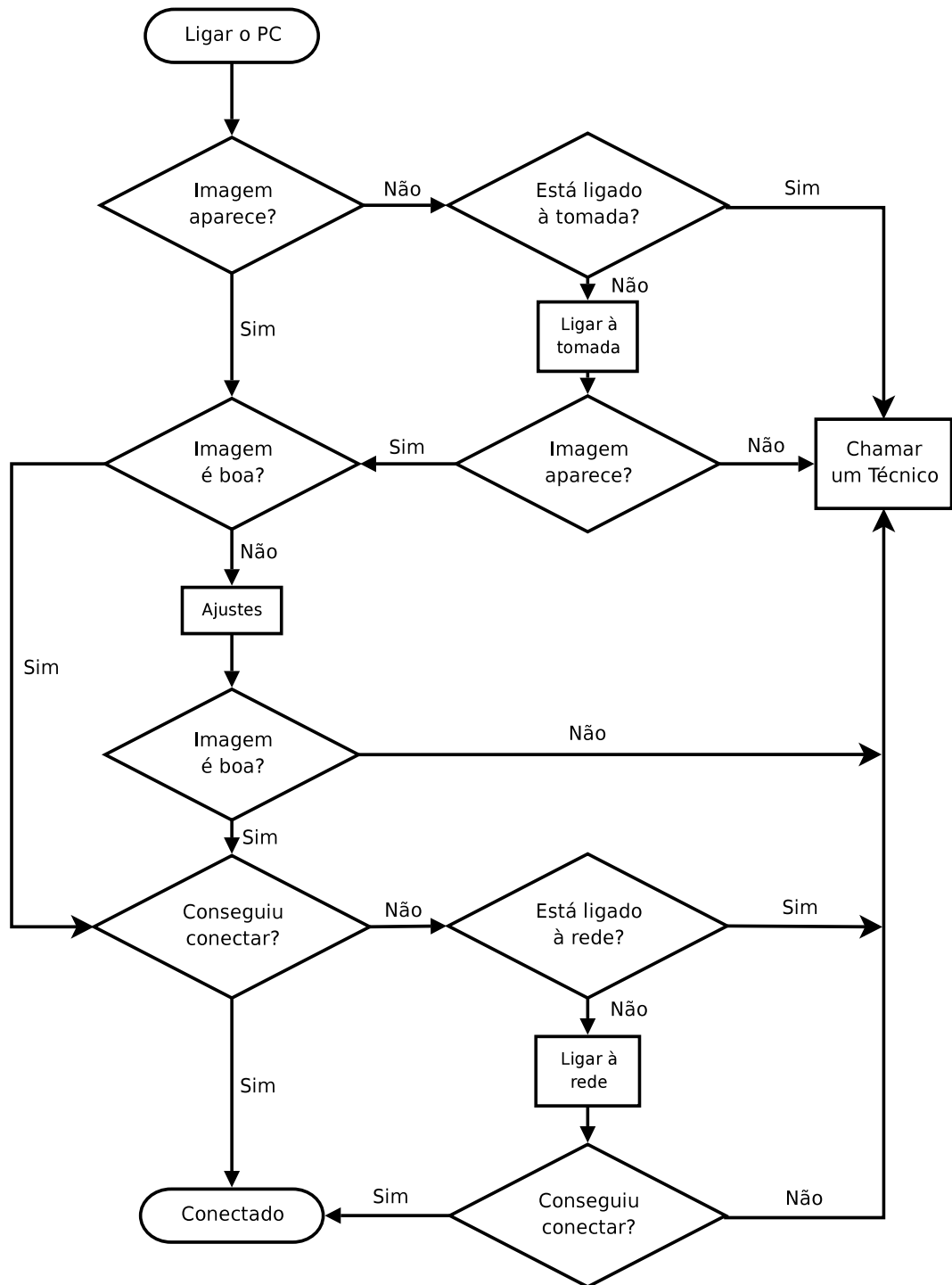
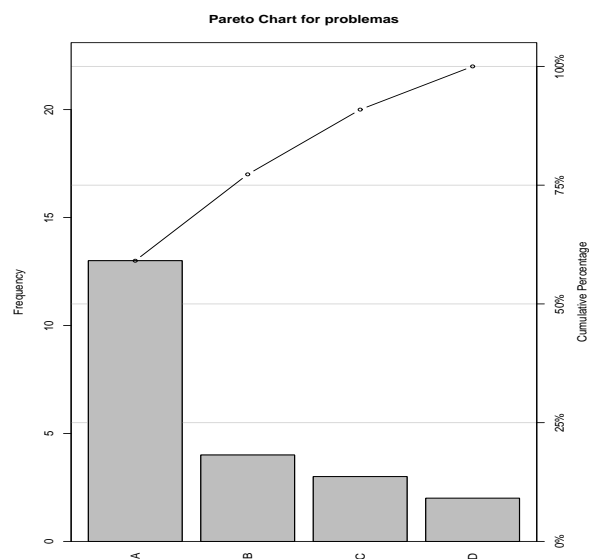


Figura 3.3: Exemplo de um gráfico de Pareto.



### 3.1.4 Diagrama de causa e efeito

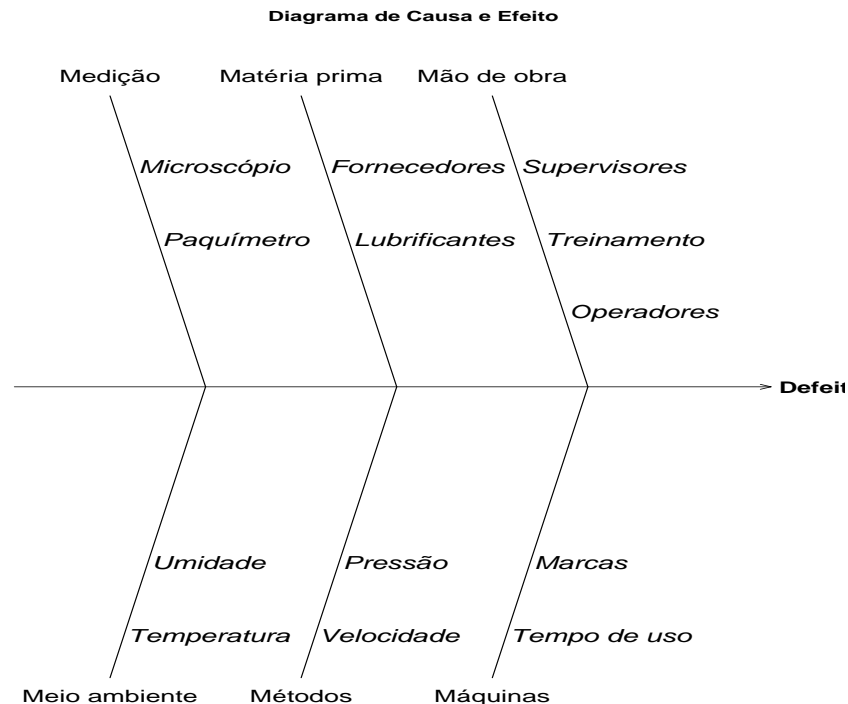
Após definir qual problema deve ser estudado, deve-se buscar as **causas** que geram o **efeito**. Normalmente, as causas de um problema não são óbvias. Por isso, o diagrama de causa e efeito é uma técnica útil para identificar as possíveis causas de um problema. Inicialmente, deve-se definir o problema a ser solucionado. Em seguida, tenta-se identificar as possíveis causas do problema, pela observação detalhada do processo ou serviço, ou utilizando uma *sessão de Brainstorming* (tempestade de idéias).

O próximo passo é construir o diagrama propriamente dito. As causas principais são inseridas ao longo de um linha reta, de forma a representar o formato de um espinha de peixe. Ao final dessa linha reta, coloca-se o efeito dentro de um retângulo. Costuma-se discriminar as causas entre primárias e secundárias. As causas primárias podem ser, normalmente, classificadas em 6 categorias: material, matéria prima, máquinas, métodos (medidas), mão de obra (pessoas) e meio ambiente. Em cada uma das causas primárias podem existir várias outras causas secundárias (figura 3.4). Obviamente, as causas primárias listadas aqui, são uma sugestão; podem existir diversas outras, dependendo do problema a ser estudado. Após a construção do diagrama, procure identificar quais as causas mais prováveis que estejam atuando sobre o problema. Se necessário, introduza modificações no processo para certificar-se de que suas suspeitas estavam corretas.



É importante, para a solução do problema, eliminar a fonte do problema e não os sintomas.

Figura 3.4: Exemplo de um diagrama de causa e efeito.



### Sessão de Brainstorming

Brainstorming é uma técnica de solução de problemas que consiste em reunir um grande número de idéias, sobre um problema, em pouco tempo. Realiza-se, normalmente, uma reunião, chamada de “reunião de Brainstorming”. A reunião de Brainstorming pode ser conduzida de duas maneiras:

1. Estruturada: todas as pessoas participantes da reunião devem fornecer uma idéia sobre a possível causa do problema. É permitido “passar a vez” mas, quando chegar a vez do participante, deve-se apresentar alguma idéia, mesmo que, possa não ser uma causa óbvia. Neste tipo, mesmo os mais inibidos devem participar.
2. Não estruturada: Neste tipo, os participantes fornecem idéias a medida que elas surgem (sem obrigação, pressão). O ambiente da reunião, nesse formato, é

mais atraente, pois não exige que todos participem. Por outro lado, isso pode gerar um dominação da reunião por aqueles mais desinibidos.

Nas duas situações deve-se estabelecer o seguinte:

- nunca criticar as idéias apresentadas;
- colocar em um quadro as idéias apresentadas (escolher um relator/anotador);
- a reunião deve ser marcada com antecedência para que as pessoas tenham tempo de organizar dados e idéias;
- os membros da reunião devem ter conhecimentos afins ou realizar atividades relacionadas com o problema;
- se não existir unanimidade com a causa, deve-se repensar a idéia;
- escrever exatamente as palavras do autor e não tentar interpretar as idéias;
- a reunião deve ser rápida: em geral, 15 a 20 minutos devem ser suficientes para levantar todas as idéias.

### 3.1.5 Gráfico de dispersão

Utiliza-se um gráfico de dispersão para estudar a relação entre duas variáveis. É possível que exista uma relação de causa e efeito entre as variáveis e, isso pode auxiliar na resolução de problemas.

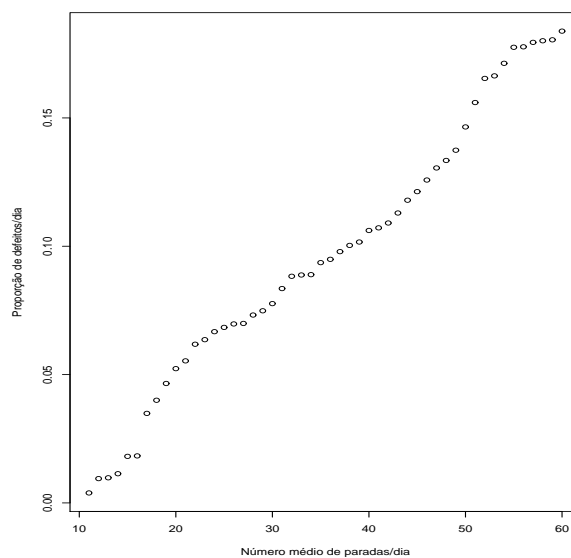
Por exemplo, em uma fábrica ocorrem muitas paradas de funcionamento da linha de produção. Um engenheiro suspeita que isso pode causar um aumento no número médio de produtos defeituosos. Por isso, um gráfico do número médio de paradas da linha de produção *vs* o número médio de defeitos por dia pode esclarecer essa relação (figura 3.5).

Observa-se que, existe uma associação positiva entre o número médio de paradas/dia e a proporção de produtos defeituosos.

### 3.1.6 Gráfico de tendência

Um gráfico de tendência é utilizado para avaliar se um processo ou serviço sofre alterações ao longo do tempo. Além disso, pode-se obter informações sobre

Figura 3.5: Exemplo de um gráfico de dispersão.



variações sazonais, ou seja, variações que ocorrem com um determinado "padrão" ao longo do tempo.

No eixo  $x$  coloca-se a seqüência de obtenção dos dados no tempo. No eixo  $y$ , coloca-se a medida realizada. Normalmente, utiliza-se a média como um ponto de referência para os pontos observados.

Este gráfico tem apenas uma função descritiva e deve ser utilizado para identificar tendências do processo.

## 3.2 Controle do erro tipo II

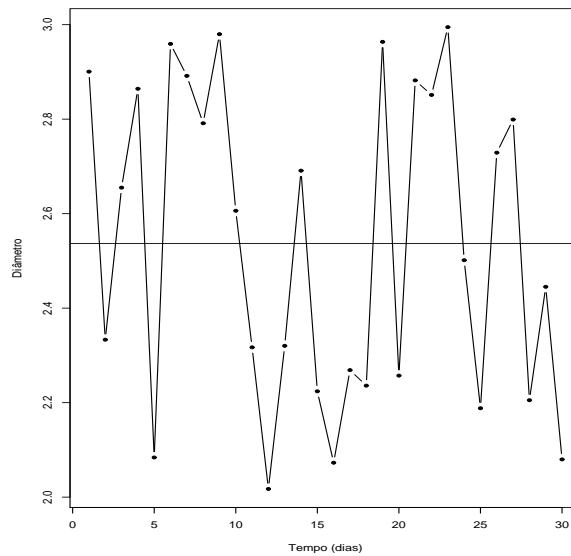
Considere a hipótese

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Essa hipótese pode ser testada pela seguinte estatística de teste:

Figura 3.6: Exemplo de um gráfico de tendência.



$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Sob a hipótese nula,  $Z_0 \sim N(0, 1)$ .

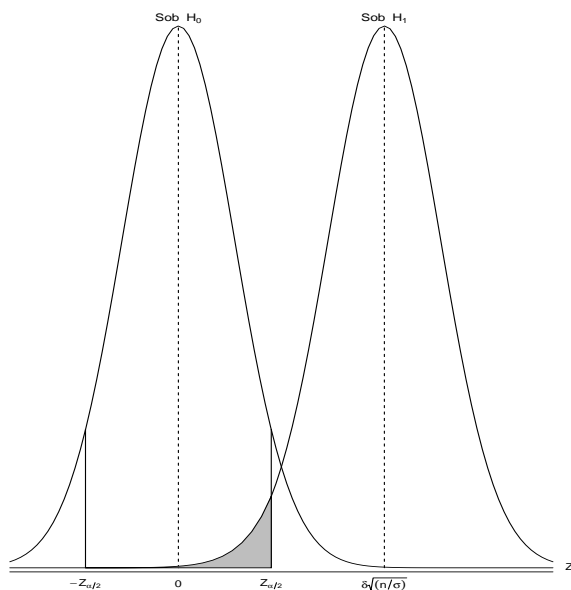
Para encontrar a probabilidade de erro tipo II, deve-se assumir que a hipótese nula  $H_0 : \mu = \mu_0$  é falsa. Supondo que a média da distribuição é realmente  $\mu_1 = \mu_0 + \delta$ , onde  $\delta > 0$ , então, a hipótese alternativa  $H_1 : \mu \neq \mu_0$  é verdadeira, e, sob essa suposição a distribuição da estatística de teste  $Z_0$  será

$$Z_0 \sim N\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}, 1\right)$$

Na figura 3.7 pode-se observar o comportamento da distribuição de  $Z_0$ :

Veja que, a probabilidade do erro tipo II é a probabilidade de  $Z_0$  entre  $-Z_{\alpha/2}$  e  $Z_{\alpha/2}$ , dado que  $H_1$  é verdadeira. Essa probabilidade pode ser encontrada fazendo  $F(Z_{\alpha/2}) - F(-Z_{\alpha/2})$  e  $F$  é a função de distribuição acumulada de  $N(\delta\sqrt{n}/\sigma, 1)$ . Considerando a distribuição Normal padrão acumulada, tem-se que

$$\beta = \Phi\left(Z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-Z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

Figura 3.7: Dist. de  $Z_0$  e do Erro do tipo II.

é a probabilidade do erro tipo II.

### 3.2.1 Exemplo

Considere uma empresa que faz o envase de leite em caixinha. Por norma, o conteúdo médio deve ser de 1000ml. Sabe-se que, o desvio padrão é de 3ml.

Tem-se a seguinte hipótese:

$$H_0 : \mu = 1000$$

$$H_1 : \mu \neq 1000$$

Uma amostra aleatória de  $n=16$  caixas foi utilizada. A probabilidade do erro tipo I foi fixada em  $\alpha = 0,05$ .

A estatística de teste é dada por

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - 1000}{\frac{3}{\sqrt{16}}}$$

$H_0$  será rejeitada se  $|Z_0| > Z_{0,025} = 1,96$ .

Como encontrar a probabilidade do erro tipo II?

Supondo que tem-se interesse em encontrar a probabilidade do erro tipo II se o verdadeiro conteúdo da caixa de leite é  $\mu_1 = 1003ml$ .

Conhecendo essa informação, isso implica que  $\delta = \mu_1 - \mu_0 = 1003 - 1000 = 3ml$ , tem-se

$$\begin{aligned}\beta &= \Phi\left(Z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-Z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\ \beta &= \Phi\left(1,96 - \frac{3\sqrt{16}}{3}\right) - \Phi\left(-1,96 - \frac{3\sqrt{16}}{3}\right) \\ \beta &= \Phi(1,96 - 4) - \Phi(-1,96 - 4) \\ \beta &= \Phi(-2,04) - \Phi(-5,96) \\ \beta &= 0,02068\end{aligned}$$

Essa é a probabilidade de errar ao não rejeitar  $H_0$ . Pode-se dizer que o poder do teste é de  $1 - \beta = 1 - 0,02068 = 0,97932$ .

### 3.2.2 Curva Característica de Operação (CCO)

Sabe-se que,  $\beta$  é uma função de  $n$ ,  $\delta$ ,  $\sigma$  e  $\alpha$ . Por esse motivo, é possível construir uma curva, relacionando esses parâmetros. O conjunto de tais curvas é chamado de **curva característica de operação** (figura 3.8).

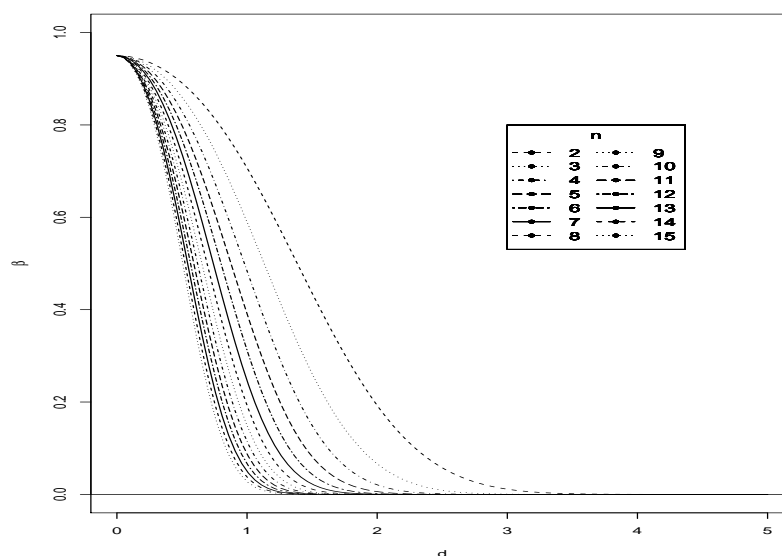
No eixo  $x$ , utiliza-se  $d = |\delta|/\sigma$  e no eixo  $y$ , valores de  $\beta$ , para diferentes valores de  $n$  e um nível  $\alpha$ .

Observe que, para um determinado  $d$  e  $\alpha$ , a probabilidade do erro tipo II diminui, a medida que  $n$  aumenta.

Observe também que, a medida que  $d$  cresce (aumenta o acréscimo em  $\mu_1$ ), a probabilidade do erro tipo II, para uma dado  $n$  e  $\alpha$  também diminui. Em outras palavras, para  $\alpha$  e  $n$  fixos, um teste irá detectar grandes diferenças mais facilmente do que para pequenas diferenças.

### 3.2.3 CCO para obter o tamanho de amostra

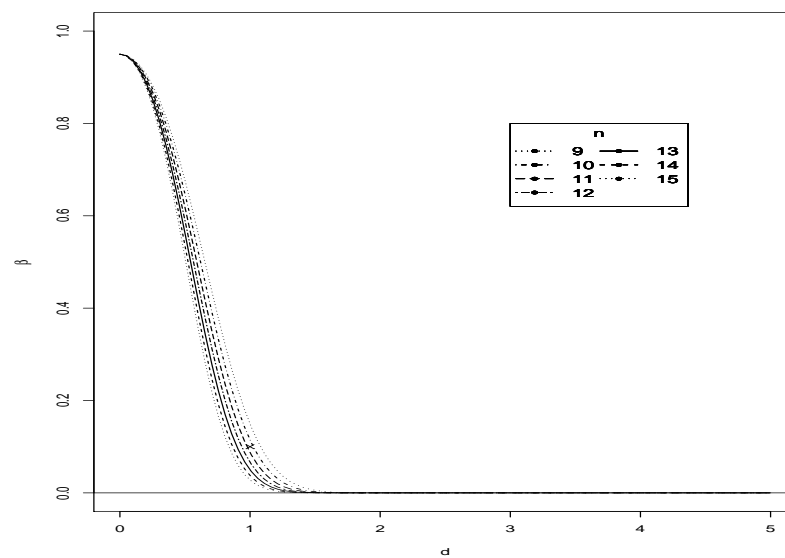
Uma CCO pode ser utilizada para definir o tamanho da amostra necessário para detectar uma diferença especificada com uma determinada probabilidade.

Figura 3.8: Curva Característica de Operação ( $\alpha = 0,05$ ).

Considere o exemplo das caixas de leite. Queremos determinar qual o tamanho da amostra para ter 0,90 de probabilidade de rejeitar  $H_0 : \mu = 1000$  quando a verdadeira média é  $\mu = 1003$ .

Com  $\delta = 1003 - 1000 = 3$ , tem-se,  $d = |\delta|/\sigma = 3/3 = 1$ . Na figura 3.9, deve-se buscar  $\beta = 0,10$  e  $d = 1$ . Para esses valores tem-se a necessidade de  $n = 11$  amostras, aproximadamente. Esse é o tamanho necessário para se ter um erro do tipo II de 10%.

Figura 3.9: Curva Característica de Operação.





# Capítulo 4

## Gráficos de Controle

### Sumário

---

<b>4.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>26</b>
4.1.1	O gráfico	28
4.1.2	Construção do gráfico	28
4.1.3	Análise do padrão de gráficos de controle	30
<b>4.2</b>	<b>Gráficos de controle para variáveis</b>	<b>33</b>
4.2.1	Gráficos de controle para $\bar{x}$ e R	34
4.2.2	Gráficos de controle para $\bar{x}$ e s	38
4.2.3	Gráfico s	38
<b>4.3</b>	<b>Gráficos de controle para atributos</b>	<b>41</b>
4.3.1	Gráfico p	41
4.3.2	Gráfico np	43
4.3.3	Gráfico c	44
4.3.4	Gráfico $\mu$	45
<b>4.4</b>	<b>Tamanho de amostra para gráficos de controle</b>	<b>46</b>
4.4.1	Introdução	46
4.4.2	Uso da CCO	47

---

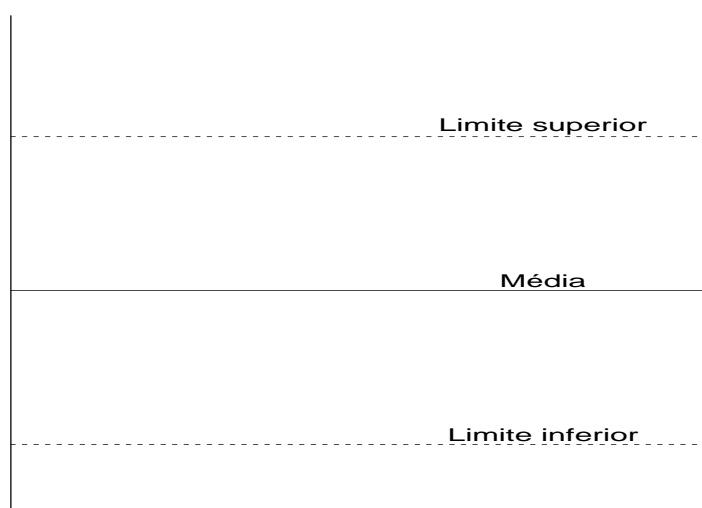
### 4.1 Introdução

Todo processo de fabricação possui uma variabilidade intrínseca. Muitos fatores conhecidos podem originar variáveis na qualidade: características dos materiais

utilizados, métodos de operação, treinamento entre outros. Durante o acompanhamento da produção, deve-se avaliar a variabilidade de variáveis e decidir quando ou não intervir no processo. Essa decisão pode ser baseada em vários critérios. Um desses critérios pode ser o uso de gráficos de controle ou carta de controle, que foram propostos por Shewart na década de 20.

Basicamente, um gráfico de controle consiste no acompanhamento de uma característica de interesse ao longo do tempo. As medidas observadas são comparadas com uma linha superior e uma linha inferior, além de uma linha representando a média do processo.

Figura 4.1: Gráfico de controle: idéia básica.



As variáveis observadas no gráfico de controle podem fornecer informações valiosas sobre o processo. Muitas vezes, o gráfico de controle permite evitar que produtos defeituosos ocorram. Uma simples observação do gráfico pode ser suficiente para corrigir o processo de fabricação.

Diz-se que um processo está *sob controle* ou estável quando a variação observada é devida somente à causas de variação naturais do processo, ou seja, o gráfico mostra apenas flutuações aleatórias. Caso contrário, o processo é dito *fora de controle*.

### 4.1.1 O gráfico

Os gráficos de controle são elaborados em função do tipo de variável e da característica da amostra. Por exemplo, para atributos e para variáveis contínuas são elaborados gráficos diferentes. Também, dependendo do tamanho da amostra ( $n$ ), metodologias específicas devem ser utilizadas.

O objetivo principal de um gráfico de controle é identificar se a variação existente é uma função de causas naturais de variação ou de causas especiais. No caso de causas especiais, é necessário intervir no processo para reduzir a variabilidade.

### 4.1.2 Construção do gráfico

No eixo horizontal são inseridos os números das amostras de tamanho  $n$  (em geral constante), retiradas do processo. No eixo vertical é inserida a unidade de medida da variável que está sendo estudada ou controlada. As amostras são chamadas também de subgrupos.

No gráfico, são representadas as médias de cada amostra, que irão refletir o comportamento de variação do processo.

A linha central, dependendo das informações disponíveis, representa, em geral, a média do processo. Se existem informações anteriores sobre o processo, pode-se utilizar um valor de referência. Por último, se for conhecida, a média da população,  $\mu$ , pode ser utilizada.

A linha central, ou o valor médio  $\bar{x}$  é obtida pela média das médias amostrais e pode, também, ser denotada por  $\bar{\bar{x}}$ .

As duas linhas que definem os limites de controle: LSC - limite superior de controle e LIC - limite inferior de controle são utilizadas, entre outras, para decidir quando o processo está sob controle ou não.

Não se deve confundir Limites de Controle com Limites de especificação.

Os limites de especificação são definidos pela natureza do produto. É uma questão técnica, definida pelo projeto do produto.

Os limites de controle, por outro lado, podem ser definidos de duas maneiras:

1. Utilizando a distribuição da variável  $X$  que mede o desempenho do processo. Nesse caso, pode-se encontrar limites de controle de tal forma que,

$$P(LIC \leq X \leq LSC) \geq 1 - \alpha$$

em que  $\alpha$  é um número arbitrário e fixo, normalmente pequeno ( $\alpha = 0,01$ ). Esse limite é chamado de limite probabilístico. Espera-se que, devido  $\alpha$  ser pequeno, um valor além dos limites inferior e superior devam ocorrer raramente se o processo estiver sob controle. Nesse caso, um ponto fora dos limites indicará que o processo está fora de controle e que uma ou mais causas de variação especiais estão atuando sobre o processo.

2. Outra maneira é definir os limites de controle através de múltiplos do desvio padrão da variável X:

$$LSC = \mu_x + k\sigma_x$$

$$LIC = \mu_x - k\sigma_x$$

$\mu_x$  é a média de X,  $\sigma_x$  é o desvio padrão de X e  $k$  é uma constante positiva. Em geral, costuma-se utilizar  $k = 3$ .

Se X tiver uma distribuição Normal, a probabilidade de um ponto cair fora dos limites é aproximadamente 0,003.

Oportunamente, veremos que o tamanho e o tipo de variável influenciam na construção dos limites de controle.

É importante que os limites sejam definidos para um processo que esteja sob controle. Ou seja, como os limites dependem da variabilidade do processo  $\sigma$ , se o processo não estiver sob controle, os limites podem não refletir o verdadeiro comportamento do processo.

### Limites de aviso ou de alerta

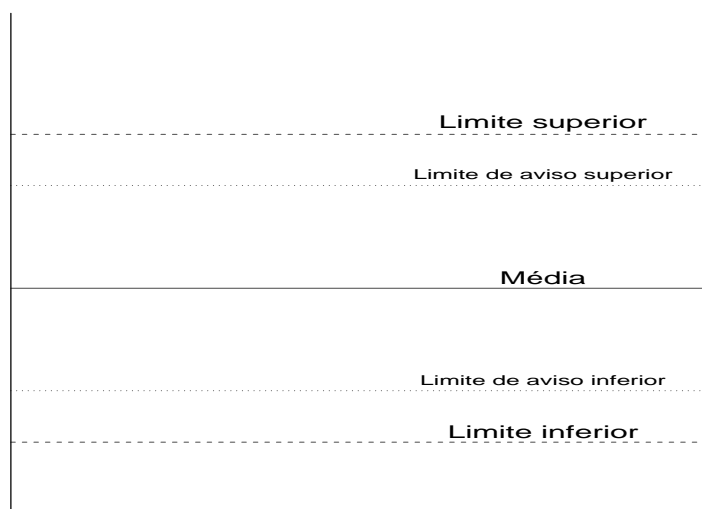
Pode-se utilizar, além dos limites superior e inferior, limites de aviso. Quando um ponto ultrapassa os limites de  $\pm 3\sigma$  ações corretivas devem ser utilizadas. No entanto, um limite menor, por exemplo,  $2\sigma$  pode ser utilizado como um limite de advertência.

Quando um ponto atinge os limites de aviso, pode-se, por exemplo, coletar

amostras com um  $n$  maior e/ou amostras com maior frequência, para obter informações sobre o processo mais rapidamente.

Limites de aviso aumentam a sensibilidade do gráfico de controle. Por outro lado, esses mesmos limites podem gerar alarmes falsos ou falsos positivos. Por isso eles devem ser utilizados com cautela, pois podem, inclusive, aumentar custos sem necessidade.

Figura 4.2: Gráfico de controle: idéia básica.



### 4.1.3 Análise do padrão de gráficos de controle

Estabelecidos os limites de controle, deve-se analisar/interpretar as informações fornecidas pelo gráfico.

Se todos os pontos estiverem dentro dos limites de controle, isso não indica, necessariamente, que o processo esteja sob controle. A ausência de aleatoriedade nos pontos pode indicar uma fonte de variação especial.

Por exemplo, na figura 4.3 há somente 2 pontos abaixo da média e 8 acima. Em geral, espera-se uma distribuição proporcional dos pontos acima e abaixo da média.

Na figura 4.4 observa-se um comportamento cíclico. Nesse caso, o gráfico pode indicar problemas no processo, como por exemplo, o cansaço de operadores.

Figura 4.3: Gráfico de controle: processo tendencioso.

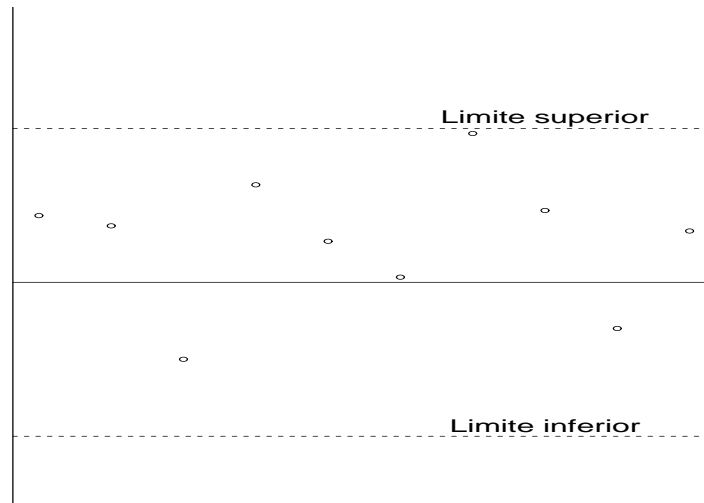
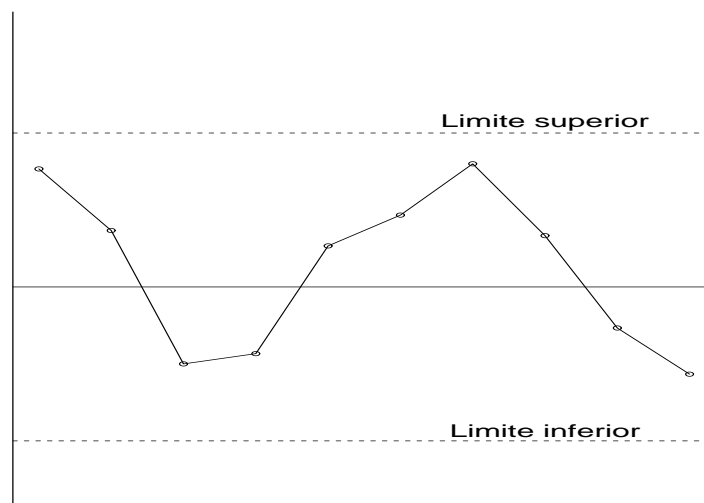


Figura 4.4: Gráfico de controle: processo cíclico.



Obviamente, quando um ou mais pontos ultrapassam os limites, o processo deve ser estudado/analísado. Claro que, outras regras podem ser adotadas, dependendo do processo, variáveis etc.

Algumas regras podem ser:

1. um ou mais pontos fora dos limites de controle;
2. dois de três pontos consecutivos além dos limites de  $2\sigma$  (mas ainda dentro dos limites de controle);
3. quatro de cinco pontos consecutivos além do limite de  $1\sigma$ ;
4. oito pontos consecutivos acima ou abaixo da linha central;
5. seis pontos em uma linha crescente ou decrescente;
6. quinze pontos em linha, acima ou abaixo da média;
7. quatorze pontos alternados para cima e para baixo;
8. oito pontos em linha em ambos os lados da linha central e nenhum em até  $1\sigma$ ;
9. um padrão incomum ou não aleatório;
10. um ou mais pontos próximos dos limites de controle.

Em resumo, um gráfico de controle ajuda a:

- reduzir a variabilidade;
- serve para monitorar um processo ao longo do tempo;
- permite que sejam realizadas correções, diminuindo o número de produtos defeituosos;
- permite que pontos fora de controle e tendências sejam rapidamente detectadas.

## 4.2 Gráficos de controle para variáveis

### Introdução

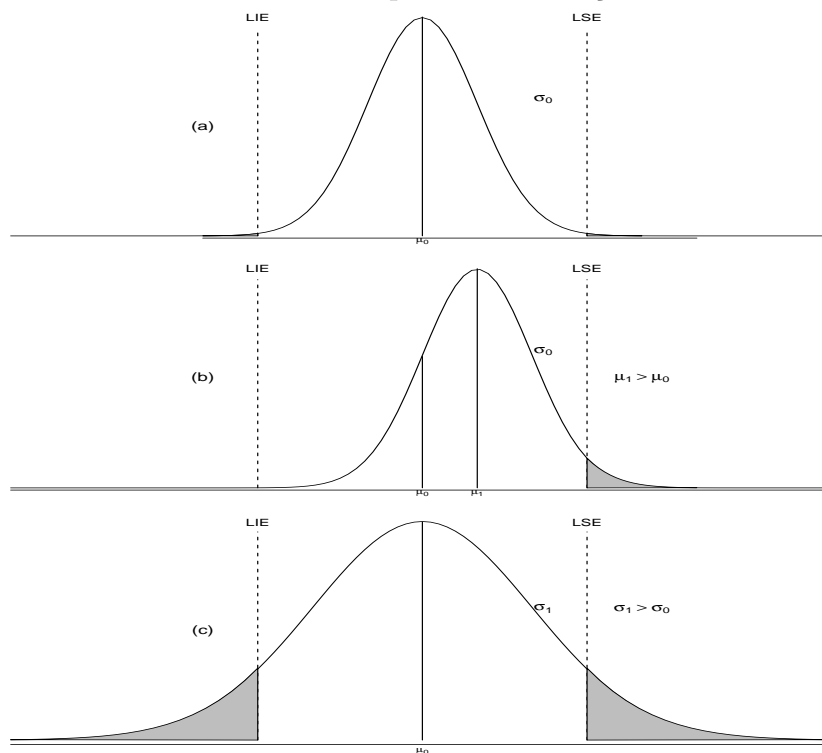
Quando trabalha-se com variáveis do tipo comprimento, largura, diâmetro, ou seja, variáveis que possuem uma escala contínua, são utilizados gráficos de controle para variáveis, que serão apresentados nessa seção.

No caso de variáveis, existem 3 gráficos usuais:  $\bar{x}$ ,  $R$  e  $s$ .

O gráfico  $\bar{x}$  é utilizado para monitorar a média do processo, enquanto que o gráfico  $R$  e  $s$  são utilizados para monitorar a variabilidade do processo.

Nos gráficos a seguir, pode-se perceber a importância de se monitorar a média e a variância de um processo.

Figura 4.5: Efeito da média e desvio padrão em relação aos limites de controle.



Na figura 4.5(a), o processo comporta-se dentro dos limites de especificação. Já, nas figuras 4.5(b) e 4.5(c), existe uma chance maior de produtos serem defeituosos ou não-conformes.



### 4.2.1 Gráficos de controle para $\bar{x}$ e R

Considere uma variável com distribuição Normal com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$  ( $\mu$  e  $\sigma$  desconhecidos). Se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é uma amostra de tamanho  $n$ , então a média da amostra é dada por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

e  $\bar{x}$  é normalmente distribuído com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{n}$ .

Sabe-se, também, que, a probabilidade é  $1 - \alpha$  de que alguma média amostral saia do intervalo

$$\mu \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Como visto antes,  $z_{\alpha/2}$ , é geralmente substituído por 3, que significa um limite de 3 sigmas.

Em geral, para construção do gráfico de controle são necessárias 20 a 25 amostras de tamanho  $n$ . Normalmente, as amostras têm tamanho pequeno, 4 a 6 observações. Tamanho e frequência de amostragem em um gráfico de controle serão estudados mais adiante no texto.

Sejam agora,  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$  a média de cada uma das  $m$  amostras, então,

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m}$$

é o melhor estimador da média do processo. Nesse caso,  $\bar{\bar{x}}$  representa a linha central do gráfico de controle.

Os limites de controle podem ser estimados a partir dos desvio padrão ou da amplitude das  $m$  amostras.

Inicialmente, vamos trabalhar com a amplitude. Se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é uma amostra de tamanho  $n$ , a amplitude é a diferença entre o maior e o menor valor observado na amostra.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

Considerando  $R_1, R_2, \dots, R_m$ , a amplitude das  $m$  amostras, então,

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

é definido como a amplitude média.

Os limites de controle para o gráfico  $\bar{x}$  serão dados por

$$LSC = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}$$

$$\text{Linha central} = \bar{\bar{x}}$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}$$

$A_2$  é uma constante tabelada para diferentes tamanhos de  $n$ .

### Desenvolvimento de $A_2$

Sabe-se que, existe uma relação entre a amplitude de uma amostra e o desvio padrão para uma distribuição Normal, dada por  $w = \frac{R}{\sigma}$ , chamada de *amplitude relativa*.

Pode-se mostrar que, para um determinado tamanho de amostra  $n$ , a amplitude  $R$  pode ser obtida multiplicando-se  $\sigma$  por uma constante, chamada de  $d_2$ :

$$\bar{R} = \frac{d_2}{\sigma}.$$

Portanto, tem-se que  $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ . Para  $n = 4$ ,  $d_2 = 2,059$ . Os valores de  $d_2$  encontram-se tabelados e podem ser obtidos por simulação.

Tabela 4.1: Valores tabelados para  $d_2$ .

n	2	3	4	5	6	7
$d_2$	1,13	1,69	2,06	2,33	2,53	2,70

Para o gráfico  $\bar{x}$  os limites de controle podem ser obtidos por

$$\mu = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Considerando o critério  $z_{\alpha/2} = 3$  tem-se

$$z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

mas,  $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$  então,

$$3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R}$$

Fazendo  $\frac{3}{d_2 \sqrt{n}} = A_2$ , então os limites de controle para o gráfico  $\bar{x}$  serão:

$$LSC = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R}$$

$$\text{Linha central} = \bar{\bar{x}}$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R}$$

O gráfico  $\bar{x}$  monitora a média do processo, enquanto que o gráfico R monitora a variabilidade.

Os limites de controle para o gráfico R são

$$LSC = D_4 \bar{R}$$

$$\text{Linha central} = \bar{R}$$

$$LIC = D_3 \bar{R}$$

Onde  $D_3$  e  $D_4$  são tabelados para vários valores de  $n$ .

### Desenvolvimento de $D_3$ e $D_4$

Definindo  $d_3$  como o desvio padrão de  $w$ , onde  $w = \frac{R}{\sigma}$ , sabe-se que  $d_3$  é uma função de  $n$ .

O desvio padrão de  $R = w\sigma$  é

$$\sigma_R = d_3\sigma$$

$\sigma$  pode ser estimado por

$$\sigma_R = d_3 \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Logo, considerando os limites com 3 desvios, tem-se

$$LSC = \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R$$

$$\text{Linha central} = \bar{R}$$

$$LIC = \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R$$

Substituindo  $\hat{\sigma}_R$  por  $d_3 \frac{\bar{R}}{d_2}$ , tem-se

$$LSC = \bar{R} + 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2}$$

$$\text{Linha central} = \bar{R}$$

$$LIC = \bar{R} - 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2}$$

fazendo  $D_3 = 1 - \frac{3d_3}{d_2}$  e  $D_4 = 1 + \frac{3d_3}{d_2}$ , obtêm-se os limites de controle do gráfico R.

### Comentários sobre o gráfico R

Embora o gráfico R tenha sido elaborado inicialmente para facilitar a obtenção dos limites de controle, ele é simples de ser construído e interpretado e isso é um ponto importante;

Para amostras com  $n$  pequeno (4, 5, 6) a informação fornecida pela amplitude não é muito diferente daquela fornecida pelo desvio padrão;

O gráfico R é sensível à dados discrepantes (outliers). Por isso, é importante analisar a origem de um outlier antes de tirar conclusões sobre o gráfico R. Claro

que, um processo que produz outliers deve ter problemas.

### 4.2.2 Gráficos de controle para $\bar{x}$ e $s$

Além de avaliar a variabilidade pela amplitude, é possível também, utilizar o desvio padrão em um gráfico de controle.

Em geral, o gráfico de  $\bar{x}$  e  $s$  é utilizado quando:

- $n > 10$  observações por amostra;
- $n$  é variável de amostra para amostra;

Para  $n > 10$ , é preferível adotar o gráfico  $s$  ao invés do gráfico  $R$ , pois a precisão será melhor.

### 4.2.3 Gráfico $s$

Para construção dos gráficos utilizam-se métodos semelhantes aos utilizados nos gráficos de controle  $\bar{x}$  e  $s$ , com modificações nas expressões.

Para cada amostra, deve-se obter a média e o desvio padrão. Uma estimativa da variância amostral pode ser obtida por

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Mas, o desvio padrão amostral de  $s$  não é um estimador não viesado de  $\sigma$ . Considerando uma distribuição Normal,  $s$  estima  $c_4\sigma$ . Aqui,  $c_4$  é uma constante que varia em função do tamanho amostral  $n$ . Ainda, o desvio padrão de  $s$  é dado por  $\sigma\sqrt{1 - c_4^2}$ .

Considerando, também, que,  $E(s) = c_4\sigma$ , a linha central é obtida por  $c_4\sigma$ . Assim, os limites de controle 3 sigmas para  $s$  são obtidos por:

$$LSC = c_4\sigma + 3\sigma\sqrt{1 - c_4^2}$$
$$LIC = c_4\sigma - 3\sigma\sqrt{1 - c_4^2}$$

Também, como nos gráficos de controle para  $\bar{x}$  e R, pode-se definir constantes. Nesse caso,

$$B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2}$$

$$B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2}$$

Logo, os limites de confiança podem ser reescritos como:

$$LSC = B_6\sigma$$

$$\text{Linha central} = c_4\sigma$$

$$LIC = B_5\sigma$$

Valores de  $B_5$  e  $B_6$  são tabelados para vários tamanhos de  $n$ .

Se o valor de  $\sigma$  não é fornecido, ele pode ser estimado de dados anteriores. Considerando que se tenham  $m$  amostras, cada uma com tamanho  $n$  e seja  $s_i$  o desvio padrão da  $i$ -ésima amostra, a média dos desvios padrões é

$$\bar{s} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i$$

A estatística  $\frac{\bar{s}}{c_4}$  é um estimador não viesado de  $\sigma$ . Logo, pode-se reescrever os parâmetros do gráfico de controle s:

$$LSC = \bar{s} + 3\frac{\bar{s}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}$$

$$\text{Linha central} = \bar{s}$$

$$LIC = \bar{s} - 3\frac{\bar{s}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}$$

Definindo como constantes

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$$

$$B_4 = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$$

Pode-se reescrever as expressões do gráfico de controle

$$LSC = B_4 \bar{s}$$

$$\text{Linha central} = \bar{s}$$

$$LIC = B_3 \bar{s}$$

Observe, ainda, que,  $B_4 = B_6/c_4$  e  $B_3 = B_5/c_4$

### Gráfico $\bar{x}$

Utilizando  $\frac{\bar{s}}{c_4}$  como estimador de  $\sigma$ , pode-se definir os limites de controle para o gráfico  $\bar{x}$  como:

$$LSC = \bar{\bar{x}} + \frac{3\bar{s}}{c_4\sqrt{n}}$$

$$\text{Linha central} = \bar{\bar{x}}$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - \frac{3\bar{s}}{c_4\sqrt{n}}$$

Definindo-se a constante  $A_3 = 3/(c_4\sqrt{n})$  tem-se

$$LSC = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{s}$$

$$\text{Linha central} = \bar{\bar{x}}$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{s}$$

Nota:

$$c_4 = \left( \frac{2}{n-1} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]}$$

### 4.3 Gráficos de controle para atributos

Muitas características não podem ser representadas por medidas numéricas. São os casos onde as características são inspecionadas e classificadas como conforme ou não-conforme. As características que são classificadas desta maneira são chamadas de *atributos*. Dependendo do tipo de informação obtida, podem ser elaborados diferentes tipos de gráficos de controle para atributos:

- gráfico p: gráfico para a fração de não-conformes;
- gráfico np: gráfico para o número de não-conformes;
- gráfico c: gráfico para o número de não-conformes por unidade;
- gráfico u: gráfico para o número médio de não-conformes por unidade.

Dependendo do produto avaliado, existem muitas características que necessitam ser medidas para atestar a qualidade do produto. Por isso, pode ser mais fácil, apenas decidir se o produto ou característica é defeituoso ou não. Assim, utilizam-se gráficos de controle por atributos.

#### 4.3.1 Gráfico p

A fração de não-conformes é a razão entre o número de itens não conformes na população e o número total de itens na população. Nesse caso, cada produto possui várias características de qualidade que são simultaneamente avaliadas. Se uma determinada característica do produto não atende a uma ou mais especificações, o produto é dito não-conforme.

Em um processo, a probabilidade de que algum produto seja não-conforme é  $p$  e os produtos produzidos são independentes. Nesse caso, cada produto produzido é um ensaio de Bernoulli com parâmetro  $p$ . Ao selecionarmos uma amostra de tamanho  $n$  de um produto, e definindo  $D$  como o número de produtos com não conformidades, então  $D$  tem distribuição Binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ .



$$P(D = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}; \quad x = 0, 1, \dots, n$$

Sabe-se que a média de  $D$  é  $np$  e a variância é  $np(1-p)$ .

A fração amostral de não-conformes é definida como a razão do número de não conformes na amostra ( $D$ ) sobre o tamanho da amostra

$$\hat{p} = \frac{D}{n}$$

Sabe-se que  $\mu = p$  e  $\sigma_p^2 = \frac{p(1-p)}{n}$

O gráfico de controle pode ser obtido por

$$\begin{aligned} LSC &= \mu_w + L\sigma_w \\ \text{Linha central} &= \mu_w \\ LIC &= \mu_w - L\sigma_w \end{aligned}$$

Aqui,  $w$  é a estatística que mede uma característica de qualidade,  $\mu_w$  é a média dessa característica,  $\sigma_w^2$  é a variância e  $L$  representa um múltiplo do desvio padrão, em geral  $L = 3$ .

Quando  $p$  é fornecido, ou seja, quando há um valor de referência ou um valor padrão especificado, os limites e a linha central do gráfico são definidos como

$$\begin{aligned} LSC &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ \text{Linha central} &= p \\ LIC &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \end{aligned}$$

Assim como nos gráficos de controle para variáveis, dado que, amostras de tamanho  $n$  são obtidas e a proporção de não conformes  $\hat{p}$  é estimada, se todos os pontos ficam dentro dos limites de controle, então o processo está sob controle, caso contrário, se algum ponto sai dos limites de controle, o processo está fora de controle.

Se a proporção  $p$  não é fornecida, deve-se estimá-la dos dados. De maneira geral, tomam-se  $m$  amostras com tamanho  $n$  ( $m = 20$  ou  $25$ ).

Considerando que existem  $D_i$  itens não conformes na  $i$ -ésima amostra, tem-se que

$$\hat{p}_i = \frac{D_i}{n}; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

e a média destas frações é obtida por

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i}{m}$$

$\bar{p}$  é um estimador da fração de não-conformes.

Logo, os limites de controle e a linha central serão:

$$LSC = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$\text{Linha central} = \bar{p}$$

$$LIC = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

Da mesma forma que para gráficos de controle para variáveis, amostras iniciais precisam ser obtidas para calibração dos limites dos gráficos.

### 4.3.2 Gráfico np

Em algumas situações pode-se trabalhar com o número de não-conformes ao invés da proporção de não-conformes. O gráfico de controle baseado nessa informação é chamado de gráfico  $np$ . O gráfico pode ser obtido da seguinte forma:

$$LSC = np + 3\sqrt{\frac{np(1-p)}{n}}$$

Linha central =  $p$

$$LIC = np - 3\sqrt{\frac{np(1-p)}{n}}$$

Se o valor de  $p$  não está disponível, pode-se usar  $\bar{p}$  como um estimador de  $p$ .

### 4.3.3 Gráfico c

Um produto não-conforme é aquele que não satisfaz uma ou mais especificações. por isso, um produto não-conforme possui pelo menos uma não-conformidade.

Como visto anteriormente, um produto que possua várias características não-conformes não necessariamente será um produto defeituoso. Em alguns casos, é de interesse avaliar a quantidade de não-conformidades por produto. Assim, é possível construir um gráfico de controle para estas condições, ou seja, o número total de não-conformes por produto fabricado.

Para esse tipo de gráfico, assume-se que a ocorrência de não conformidades em amostras de tamanho constante pode ser representada por uma distribuição Poisson. Isso implica que, deve existir a possibilidade de ocorrência de um grande número de não-conformidades no produto e que a chance de ocorrência seja pequena e constante. Claro, em cada produto, deve-se sempre examinar as mesmas características considerando que inspeciona-se um produto para avaliar a ocorrência de defeitos, essa inspeção pode ser feita em um único produto ou em um grupo de produtos.

Considerando que defeitos ocorrem com uma distribuição de Poisson,

$$p(x) = \frac{e^{-c}c^x}{x!}; \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$x$  é o número de não-conformidades e  $c > 0$  é o parâmetro da distribuição de Poisson.

Para a distribuição de Poisson,  $\mu$  e  $\sigma^2$  são os mesmos, dados pela constante  $c$ .

Assim, considerando um limite de 3 desvios os limites do gráfico de controle serão

$$LSC = c + 3\sqrt{c}$$

$$\text{Linha central} = c$$

$$LIC = c - 3\sqrt{c}$$

Se um padrão não é fornecido, pode-se usar o número médio de não conformes  $\bar{c}$  obtido em uma amostra de calibração .

Neste caso, tem-se

$$LSC = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}$$

$$\text{Linha central} = \bar{c}$$

$$LIC = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}$$

#### 4.3.4 Gráfico $\mu$

Agora, se  $c$  é o número total de não-conformes em uma amostra de tamanho  $n$ , o número médio de não-conformes é dado por.

$$\mu = \frac{c}{n}$$

e o gráfico de controle será

$$LSC = \bar{\mu} + 3\sqrt{\frac{\bar{\mu}}{n}}$$

$$\text{Linha central} = \bar{\mu}$$

$$LIC = \bar{\mu} - 3\sqrt{\frac{\bar{\mu}}{n}}$$

$\bar{\mu}$  é o número médio de características não-conformes estimado para o produto.

Nota: no caso de valores negativos para o LIC, ele será substituído por zero.

No caso do gráfico  $c$ , pode ocorrer que uma não-conformidade seja mais im-

portante do que outras. Neste caso, pode-se adotar um sistema de pontuação, onde não-conformidades com maior importância podem assumir um valor maior em relação a não-conformidades de menor importância.

## 4.4 Tamanho de amostra para gráficos de controle

### 4.4.1 Introdução

Para um gráfico de controle, é possível especificar o tamanho e a frequência de amostragem.

De forma geral, quanto maior o tamanho da amostra, mais fácil será para detectar pequenas mudanças no processo e, também, quanto maior a frequência, maior será a chance de detectar problemas mais rapidamente.

Obviamente, a especificação do tamanho e da frequência de amostragem, dependerão do tipo de processo, da quantidade de produtos fabricados, do custo de realização da amostragem, da tecnologia disponível além de muitos outros aspectos.

Uma maneira, é utilizar o comprimento médio do período (CMP), que é, em outras palavras, o número médio de amostras necessárias antes que um ponto indique que um processo esteja fora de controle.

Pra um gráfico de controle, o CMP pode ser obtido por

$$CMP = \frac{1}{p}$$

onde  $p$  é a probabilidade de que um ponto ultrapasse os limites de controle.

E,

$$CMP_1 = \frac{1}{1 - \beta}$$

indica a chance de ocorrência de um falso alarme de pontos fora de controle.

Para um gráfico  $\bar{x}$ , com limites definidos com 3 desvios,  $p=0,0027$  ( $\pm 3s = 0,9973$ ), ou seja, essa é a chance de que um ponto ultrapasse os limites de confiança quando o processo está sob controle.

Assim, para o gráfico  $\bar{x}$ , o CMP será

$$CMP = \frac{1}{0,0027} = 370.$$

Para esse caso, mesmo que o processo esteja sob controle, espera-se que ocorra um ponto fora de controle a cada 370 amostras.

É possível definir essa informação em função do tempo:

$$CMT = CMP h$$

Considerando que, em um processo, amostras sejam obtidas a cada hora, para o gráfico de controle  $\bar{x}$  espera-se encontrar um alarme falso a cada 370 horas, em média.

#### 4.4.2 Uso da CCO

##### Gráfico $\bar{x}$

Pode-se avaliar a habilidade de um gráfico de controle  $\bar{x}$  detectar mudanças na qualidade do processo, através da CCO. Para o gráfico  $\bar{x}$ , com desvio padrão  $\sigma$  constante, pode-se ter interesse em detectar mudanças na média do processo, ou seja, se o processo possui uma média  $\mu_0$ , qual é a probabilidade de que, uma mudança na média para  $\mu_1 = \mu_0 + k\sigma$  não seja percebida na primeira amostra realizada após ocorrer a mudança? Essa probabilidade corresponde ao erro  $\beta$ . Essa questão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\beta = P\{LIC \leq \bar{x} \leq LSC | \mu_1 = \mu_0 + k\sigma\}$$

Sabendo que,  $\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$  e os limites como sendo  $LSC = \mu_0 + L\sigma/\sqrt{n}$  e  $LIC = \mu_0 - L\sigma/\sqrt{n}$ .

Assim, pode-se escrever que

$$\begin{aligned}\beta &= \Phi\left[\frac{LSC - (\mu_0 + k\sigma)}{\sigma\sqrt{n}}\right] - \Phi\left[\frac{LIC - (\mu_0 + k\sigma)}{\sigma\sqrt{n}}\right] \\ \beta &= \Phi\left[\frac{\mu_0 + L\sigma/\sqrt{n} - (\mu_0 + k\sigma)}{\sigma\sqrt{n}}\right] - \Phi\left[\frac{\mu_0 - L\sigma/\sqrt{n} - (\mu_0 + k\sigma)}{\sigma\sqrt{n}}\right] \\ \beta &= \Phi(L - k\sqrt{n}) - \Phi(-L - k\sqrt{n})\end{aligned}$$

onde  $\Phi$  é a função acumulada da distribuição Normal padrão.

**Exemplo:**

Considere um gráfico de controle  $\bar{x}$  com  $L = 3$  (3 desvios padrões) e um tamanho de amostra  $n = 6$ . Tem-se o interesse em determinar qual a probabilidade de detectar uma mudança  $\mu_1 = \mu_0 + 2\sigma$  na primeira amostra após essa mudança.

Temos que,  $L = 3$ ,  $k = 2$  e  $n = 6$ , logo,

$$\begin{aligned}\beta &= \Phi(3 - 2\sqrt{6}) - \Phi(-3 - 2\sqrt{6}) \\ \beta &= \Phi(-1,899) - \Phi(-7,899) \\ \beta &= 0,0288\end{aligned}$$

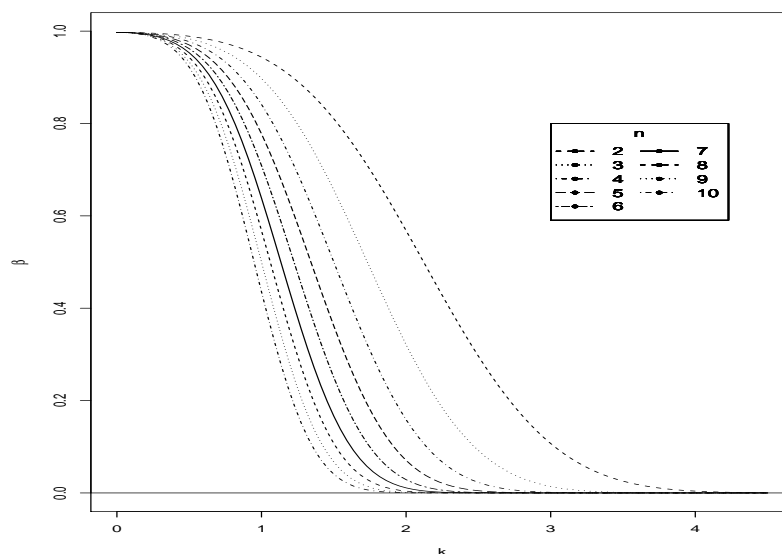
ou seja, essa é a chance de não se perceber essa mudança. Ao contrário, tem-se que  $1 - \beta = 1 - 0,0288 = 0,9712$  é a chance de que essa mudança seja observada.

Na figura 4.6 deve-se definir um valor para a constante  $k$ , um valor para  $\beta$  e encontrar a curva correspondente ao tamanho de amostra  $n$ .

**Gráfico p**

Para o gráfico **p**, a probabilidade de se obter o erro tipo II ou  $\beta$  é definida como:

$$\begin{aligned}\beta &= P\{\hat{p} < LSC|p\} - P\{\hat{p} \leq LIC|p\} \\ &= P\{D < nLSC|p\} - P\{D \leq nLIC|p\}\end{aligned}$$

Figura 4.6: Curva Característica de Operação para o gráfico  $\bar{x}$  com  $L=3$  sigmas .

Sabe-se que  $D$  tem distribuição Binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ . Assim, o erro  $\beta$  pode ser obtido pela distribuição Binomial acumulada.

**Exemplo:**

Suponha um gráfico de controle  $p$  com  $n = 50$ ,  $LIC = 0,0303$  e  $LSC = 0,3697$ .

$$\beta = P\{D < (50)(0,3697)|p\} - P\{D \leq (50)(0,0303)|p\}$$

$$\beta = P\{D < 18,49|p\} - P\{D \leq 1,52|p\}$$

Como  $D$  deve ser um inteiro

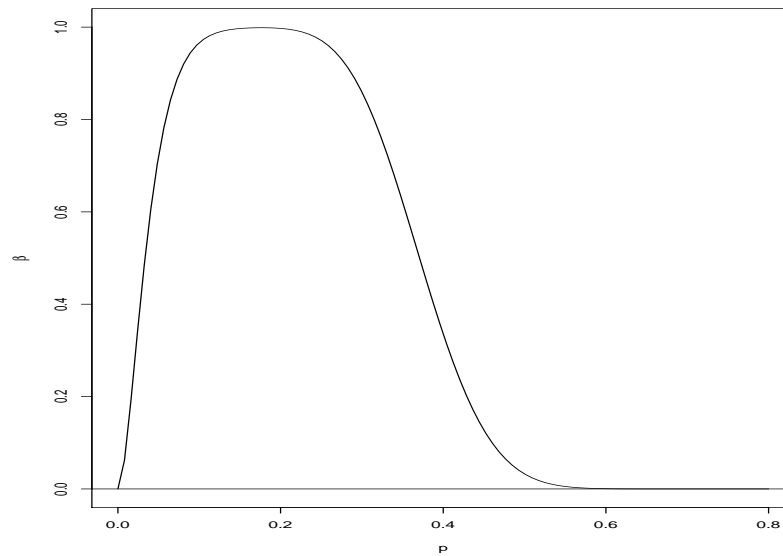
$$\beta = P\{D < 18|p\} - P\{D \leq 1|p\}$$

Para  $p=0,3$  temos que,  $P(D < 18|p) = 0,8594$  e  $P(D \leq 1|p) = 0,000$ , portanto,  $\beta = P(D < 18|p) - P(D \leq 1|p) = 0,8594$ .

Na figura 4.7 observa-se o comportamento da CCO para o gráfico  $p$ .



Figura 4.7: Curva Característica de Operação para o gráfico  $p$  com  $L=3$  sigmas.



### Gráfico c

O erro tipo II ou  $\beta$  pode ser obtido por

$$\beta = P\{x < LSC|c\} - P\{x \leq LIC|c\}$$

Para o gráfico c,  $x$  tem distribuição Poisson com parâmetro  $c$ .

#### Exemplo:

Se  $LIC = 6,48$  e  $LSC = 33,22$

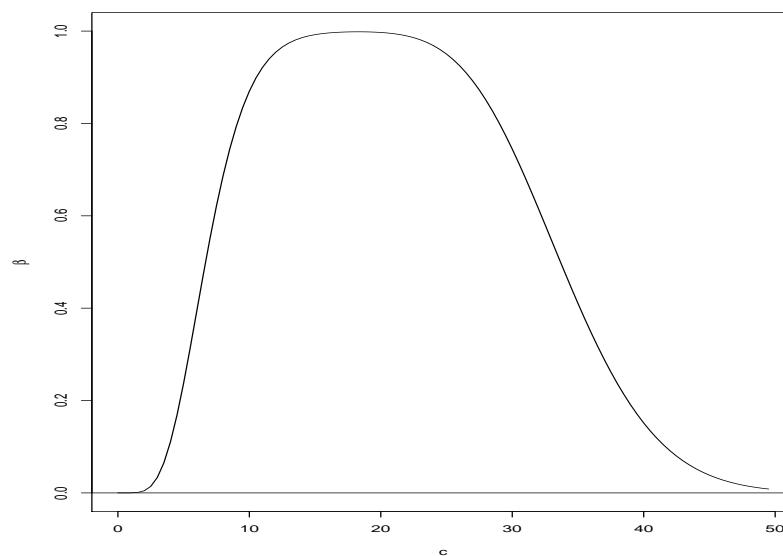
$$\beta = P\{x < 33,22|c\} - P\{x \leq 6,48|c\}$$

Como o número de não conformidades deve ser inteiro,

$$\beta = P\{x \leq 33|c\} - P\{x \leq 6|c\}$$

Para  $c = 15$ ,  $P(x \leq 33|c) = 0,999$  e  $P(x \leq 6|c) = 0,017$ , portanto,  $\beta = 0,982$ .

Na figura 4.8 observa-se o comportamento da CCO para o gráfico c.

Figura 4.8: Curva Característica de Operação para o gráfico  $p$  com  $L=3$  sigmas.

# Capítulo 5

## Índices de Capacidade

### Sumário

---

<b>5.1</b>	<b>Capacidade do Processo</b>	<b>52</b>
5.1.1	Coeficiente de capacidade potencial do processo - $C_p$	53
5.1.2	Coeficiente de capacidade atual - $C_{pk}$	55
5.1.3	Coeficiente de capacidade - $C_{pm}$	57

---

## 5.1 Capacidade do Processo

### Introdução

Diz-se que um processo é capaz quando, considerando as variações naturais do processo, ele atende às especificações definidas.

Mesmo um processo sob controle pode produzir itens defeituosos. Para avaliar se um processo está ou não atingindo às especificações, são utilizados índices, que relacionam a variabilidade e a média do processo com os limites de especificação. Existem vários índices que podem ser utilizados. Entre eles, o  $C_p$ ,  $C_{pk}$  e  $C_{pm}$  serão estudados nesse texto.

A capacidade de um processo está intimamente ligada à variabilidade e por sua vez a qualidade dos produtos. Por esse motivo, a dispersão de  $\pm 3\sigma$  é utilizada como um critério de avaliação da capacidade de um processo.

Assim, pode-se definir os limites naturais de tolerância como

$$LNTS = \mu + 3\sigma$$

$$LNTI = \mu - 3\sigma$$

LNTS e LNTI são os limites naturais de tolerância superior e inferior, respectivamente.

Deve-se lembrar que, a capacidade de um processo depende da distribuição de probabilidade considerada, que por sua vez, tem uma média, uma dispersão e uma forma específica. Nesse caso, como na maioria dos processos, estamos considerando um distribuição Normal. Não trataremos nesse texto de como lidar com outras distribuições que não a Normal.

De forma geral, o monitoramento da capacidade de um processo tem as seguintes finalidades (Montgomery, 1997):

- Selecionar fornecedores;
- Reduzir a variabilidade na produção.
- Predizer ou prever quanto um processo atenderá as tolerâncias;
- Auxiliar na seleção e modificação de processos;
- Auxiliar no estabelecimento de intervalos amostrais para monitoramento do processo;
- Definir características para novos equipamentos;

A análise da capacidade de um processo poderá ser realizada em qualquer fase do processo. Isso dependerá do grau de atuação da empresa na busca pela qualidade.

### 5.1.1 Coeficiente de capacidade potencial do processo - $C_p$

O índice  $C_p$  é definido como:

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} \quad (5.1)$$

Aqui, LSE e LIE são os limites Superior e Inferior de especificação, respectivamente. O valor do desvio padrão  $\sigma$  é estimado por  $\hat{\sigma}$ . No caso onde gráficos de controle sejam utilizados, o desvio padrão pode ser estimado, por exemplo, por  $\bar{R}/d_2$ .

Assim,

$$\hat{C}_p = \frac{LSE - LIE}{6\hat{\sigma}} \quad (5.2)$$

e  $6\sigma$  é definido como a capacidade do processo. Em geral, considera-se que:

- $C_p < 1$  A capacidade do processo é ruim, ou seja, a variabilidade do processo é maior do que a diferença entre os limites de especificação. Nesse caso, mesmo que o processo esteja sob controle, muitos itens não-conformes serão produzidos. Em resumo, o processo não é capaz de produzir segundo as especificações. Como controlar este problema? Existem algumas possibilidades:
- Alterar os limites de especificação;
  - Manter os limites de especificação e realizar uma inspeção 100%;
  - Atuar no processo para reduzir a dispersão.
- $1 \leq C_p \leq 1,33$  A capacidade do processo está próxima da diferença entre os limites de especificação. Neste caso, se ocorre um deslocamento da média ou um aumento da variabilidade, produtos não-conformes serão fabricados. Aqui, os gráficos de controle são necessários para monitorar o processo.
- $C_p > 1,33$  A capacidade do processo é adequada. Se a capacidade estiver entre três quartos e dois terços da tolerância (LSE-LIE) amostras periódicas devem ser tomadas apenas para acompanhar o processo. Se a capacidade for menor do que a metade da tolerância, deve-se agir apenas para aumentar a qualidade do produto. Nesse caso, mesmo com algum deslocamento da média ou aumento da dispersão, não se observam produtos defeituosos, mesmo com o processo fora de controle. Nesse caso, diz-se que o processo é **robusto**.

### Exemplo

Considere os dados dos anéis de pistão (pistonrings). Os limites de especificação são dados por LSE=74,05 mm e LIE=73,95 mm. Do gráfico R, Estimou-se  $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = 0,0099$ , logo,

$$\hat{C}_p = \frac{74,05 - 73,95}{6(0,0099)} = 1,68$$

Aqui, com  $C_p = 1,68$ , dizemos que o processo é capaz, ou seja, que os limites de tolerância naturais ( $\pm 3\sigma$ ) estão bem dentro dos limites de especificação.

O  $C_p$  pode ser interpretado de outra maneira. Pode-se determinar qual o percentual dos limites de especificação utilizado pelo processo:

$$\hat{p} = \frac{1}{\hat{C}_p} 100 \quad (5.3)$$

Para o exemplo:

$$\hat{p} = \frac{1}{1,68} 100 = 59,5\%$$

O processo usa 59,5% dos limites de especificação. Nesse caso, espera-se que poucos produtos não-conformes sejam produzidos.

O valor de 1,33 de  $C_p$ , corresponde a 4 sigmas em uma distribuição Normal padrão. Esse valor foi inicialmente defendido pelos japoneses na década de 80 e hoje é um ponto de referência para muitas instituições. Espera-se, para um valor de  $C_p = 1,33$  uma fração de 0,00006 produtos defeituosos ou 6 em 100.000.

Um processo Seis Sigma implica em um  $C_p = 2,00$ .

### 5.1.2 Coeficiente de capacidade atual - $C_{pk}$

O índice  $C_p$  pressupõe que o processo esteja centrado. Um processo centrado implica que o valor médio da característica está exatamente sobre o valor especificado ou **valor nominal**. No entanto, isso nem sempre acontece. Neste caso, deve-se utilizar o índice  $C_{pk}$ , que é definido como:

$$C_{pk} = \min \left\{ \frac{\bar{x} - LIE}{3\sigma}, \frac{LSE - \bar{x}}{3\sigma} \right\} \quad (5.4)$$

O  $C_{pk}$  é inversamente proporcional a variabilidade. Quanto menor a variabilidade, maior será o valor de  $C_{pk}$ . Quando a variabilidade aumenta, também

aumentam as chances de ocorrerem produtos fora dos limites de especificação.

O  $C_{pk}$  nunca poderá ser maior do que o índice  $C_p$ . **O  $C_{pk}$  será igual ao  $C_p$  quando o processo estiver exatamente centrado.**

#### Relação entre $C_p$ , $C_{pk}$ e ppm

Em termos do nível sigma, pode-se relacionar  $C_p$ ,  $C_{pk}$  e ppm da seguinte forma (tabela 5.1):

Tabela 5.1: Relação entre  $C_p$ ,  $C_{pk}$  e ppm.

Nível sigma	$C_p$	$C_{pk}$	ppm
$\pm 1,0\sigma$	0,33	0,33	317.320
$\pm 2,0\sigma$	0,67	0,67	45.500
$\pm 3,0\sigma$	1,00	1,00	2.700
$\pm 4,0\sigma$	1,33	1,33	63,5
$\pm 4,5\sigma$	1,50	1,50	6,9
$\pm 5,0\sigma$	1,67	1,67	0,6
$\pm 6,0\sigma$	2,00	2,00	0,002

Para o nível Seis Sigma, 0,002 ppm, isso implica que ocorrerão, aproximadamente, 2 defeitos em um bilhão de produtos. ou ainda, se 1.000.000 de unidades de um produto for fabricada, espera-se, em média, que não ocorram produtos defeituosos.

#### Exemplo

Considere um processo com  $\mu_0 = 20$ , LSE=30, LIE=10 e  $\sigma = 2,0$ , o valor de  $C_p$  será,

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} = \frac{30 - 10}{(6)(2)} = 1,66$$

Considerando, ainda, o mesmo processo, com a média  $\mu_0$  deslocada para  $\mu_1 = 22$  o valor de  $C_{pk}$  será

$$\begin{aligned}
C_{pk} &= \min \left\{ \frac{30 - 22}{(3)(2)}; \frac{22 - 10}{(3)(2)} \right\} \\
C_{pk} &= \min\{8/6; 12/6\} \\
C_{pk} &= \min\{1,33; 2\} \\
C_{pk} &= 1,33
\end{aligned}$$

Quando deslocamentos da média não causam mudanças significativas no número de defeituosos, o processo é dito **robusto**. No exemplo, um  $C_p = 1,66$  corresponde, aproximadamente, ao nível Cinco Sigma ( $\sim 1,67$ ), ou seja, 0,6ppm. Já, para um  $C_{pk} = 1,33$ , isso corresponde, aproximadamente, ao nível Quatro Sigma, ou seja, 63,5 ppm.

Quando  $C_{pk} < 0$ , isso implica que a média do processo está fora dos limites de especificação.

Tanto  $C_p$  quanto  $C_{pk}$  são estimativas pontuais que devem ser interpretadas com cuidado. Principalmente quando a distribuição dos dados não for Normal, ou mesmo quando a quantidade e tamanho de amostras forem pequenas ou não representativas.

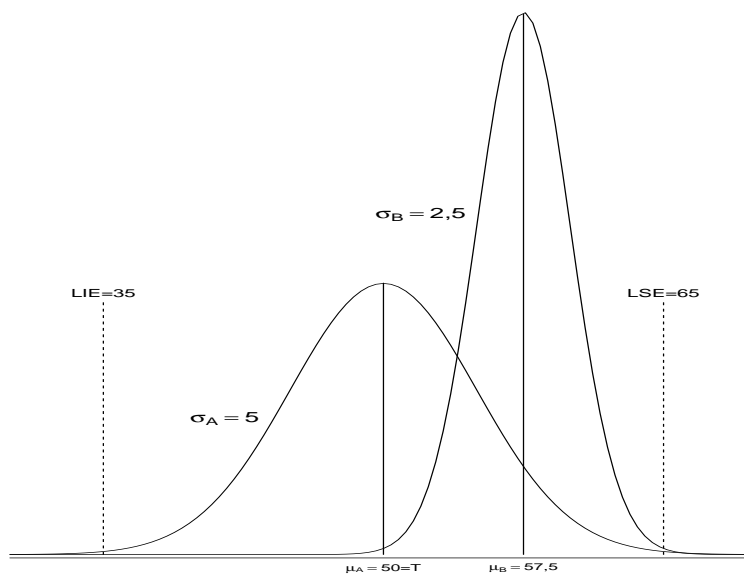
No caso de não normalidade, pode-se usar o artifício da transformação de dados ou utilizar índices que considerem distribuições específicas. Esse assunto não será abordado nesse texto.

### 5.1.3 Coeficiente de capacidade - $C_{pm}$

O índice  $C_{pk}$ , isoladamente, pode ser uma medida inadequada da centralização do processo. Por exemplo, considere a seguinte figura (figura 5.1):

Para estes dois processos, teremos, para o processo A, o valor do  $C_{pk_A}$ ,



Figura 5.1: Exemplo do uso do  $C_{pm}$ .

$$\begin{aligned}
 C_{pk_A} &= \min(C_{pi}; C_{ps}) \\
 C_{pk_A} &= \min\left(\frac{50 - 35}{3(5)}; \frac{65 - 50}{3(5)}\right) \\
 C_{pk_A} &= \min(1; 1) \\
 C_{pk_A} &= 1
 \end{aligned}$$

E, para o processo B, o valor do  $C_{pk_B}$ ,

$$\begin{aligned}
 C_{pk_B} &= \min(C_{pi}; C_{ps}) \\
 C_{pk_B} &= \min\left(\frac{57,5 - 35}{3(2,5)}; \frac{65 - 57,5}{3(2,5)}\right) \\
 C_{pk_B} &= \min(3; 1) \\
 C_{pk_B} &= 1
 \end{aligned}$$

No caso 'A',  $C_p = C_{pk}$ , ou seja, o processo está centrado.

No caso 'B',  $C_p = 2 > C_{pk} = 1$ , indicando que o processo não está centrado.

Mas, os dois possuem o mesmo  $C_{pk}$ . Portanto, o  $C_{pk}$  pode não ser uma boa medida de caracterização do processo. É necessário que o valor nominal  $T$  seja considerado. Por isso, foi proposto o índice  $C_{pm}$ , definido por

$$C_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\tau} \quad (5.5)$$

onde  $\tau$  é  $\sqrt{E[(x - T)^2]}$ .

$x - T$  é o desvio em relação ao valor nominal  $T$ .

Assim, pode-se escrever 5.5 como

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \epsilon}}$$

onde  $\epsilon = \frac{\mu - T}{\sigma}$

Demonstração;

$$\tau^2 = E[(x - T)^2] \quad (5.6)$$

$$= E[(x - \mu)^2] + (\mu - T)^2 \quad (5.7)$$

$$= \sigma^2 + (\mu - T)^2 \quad (5.8)$$

$$C_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\tau} \quad (5.9)$$

$$= \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (5.10)$$

Mas,

$$\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2} [\sigma^2 + (\mu - T)^2]} \quad (5.11)$$

$$= \sigma \sqrt{1 + \frac{(\mu - T)^2}{\sigma^2}} \quad (5.12)$$

Logo,

$$C_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\sigma \sqrt{1 + \frac{(\mu - T)^2}{\sigma^2}}}$$

Mas,  $\frac{LSE - LIE}{6\sigma} = C_p$

Então,

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \frac{(\mu - T)^2}{\sigma^2}}}$$

Fazendo  $\frac{(\mu - T)}{\sigma} = \epsilon$

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}$$

Aqui,  $\mu$  pode ser estimado por  $\bar{x}$  e  $\sigma$  por  $s$ .

No exemplo, para o processo A,

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1,0$$

O processo está centrado no valor nominal. Nesse caso, como  $\mu = T$ ,  $C_{pk} = C_{pm}$ .

Para o processo B,

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + (3)^2}} = 0,63$$

Veja que,  $C_p = \frac{65-35}{6(2,5)} = 2$  e  $\epsilon = \frac{\mu - T}{\sigma} = \frac{57,5-50}{2,5} = 3$

Agora, podemos concluir, comparando os valores de  $C_{pm}$ , que o processo B é menos capaz do que o processo A.

Sabe-se que se  $|\mu - T| \rightarrow +\infty$ ,  $C_{pm}$  se aproxima de zero, ou seja, a medida que a média do processo se afasta do valor nominal,  $C_{pm} \rightarrow 0$ .

Boyles (1991) mostrou que,

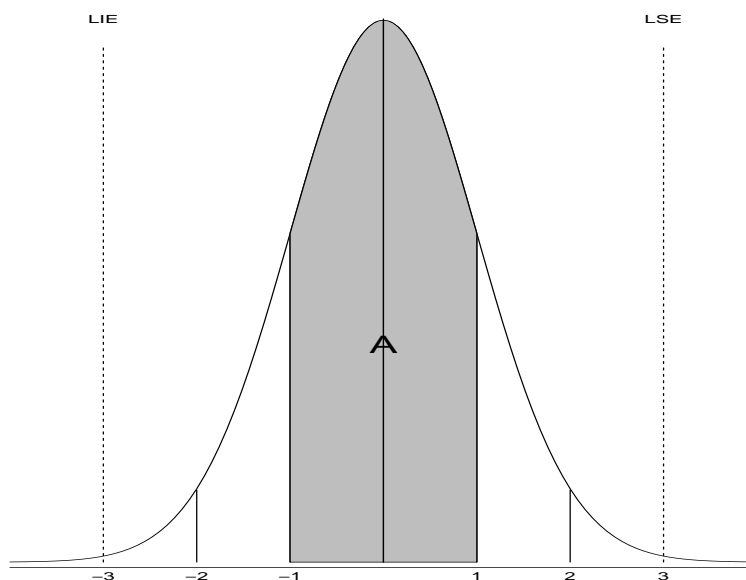
$$C_{pm} < \frac{LSE - LIE}{6|\mu - T|}$$

ou seja, uma condição necessária para se ter  $C_{pm} \geq 1$  é

$$|\mu - T| < \frac{1}{6}(LSE - LIE)$$

Dado que  $T$ , o valor nominal, é o ponto médio entre LSE e LIE, isso implica que para um  $C_{pm} \geq 1$  a média  $\mu$  deve estar dentro da área 'A' representada pela figura 5.2

Figura 5.2: Região da média para  $C_{pm} \geq 1$ .



Para um  $C_{pm} \geq 1,33$ , isto implica que  $|\mu - T| < 0,125(LSE - LIE)$ .

# Capítulo 6

## Amostragem por aceitação

### Sumário

---

<b>6.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>62</b>
<b>6.2</b>	<b>Tipos de planos amostrais por aceitação</b>	<b>64</b>
6.2.1	Plano de amostragem simples para atributos	64
6.2.2	Plano de amostragem duplo para atributos	67
6.2.3	Amostragem para variáveis	68

---

### 6.1 Introdução

O objetivo de uma amostragem, aqui, é inspecionar os produtos fabricados, com o intuito de averiguar a qualidade. A idéia é “aceitar” ou “rejeitar” lotes de produtos. O propósito da amostragem não é a de estimar parâmetros dos produtos ou de substituir os procedimentos de monitoramento, como os gráficos de controle. Para isso, existem métodos específicos. Aqui, o interesse é apenas investigar se um lote atende ou não os critérios de qualidade.

Existem inúmeras maneiras de se fazer uma amostragem de produtos fabricados. As metodologias dependem do tipo de variável a ser avaliada, do custo da amostragem, da forma de produção, da tecnologia disponível, entre outros aspectos. Ainda, o rigor necessário para garantir a qualidade é um ponto importante. Por exemplo, existem metodologias específicas para a esfera militar e para uso civil. Esta preocupação fez surgir ao longo do tempo diferentes *normas* utilizadas por diversas empresas e instituições. Nesse texto não serão abordadas normas específicas, pois

se tratam de casos particulares e que deverão ter seu uso analisado em cada caso.

Uma situação comum é: uma empresa recebe um lote de produtos de um fornecedor. Estes produtos necessitam ser avaliados com relação à aspectos de qualidade. Para tanto, uma amostra é retirada e características dos produtos são avaliadas. Dependendo dos critérios adotados, o lote será aceito ou rejeitado.

A amostragem por aceitação é mais recomendada quando (Montgomery, 1997):

- quando a avaliação é destrutiva;
- quando o custo da inspeção 100% é muito alto;
- quando a inspeção 100% é impraticável em função da tecnologia disponível ou do tempo necessário para realizá-la;
- quando há muitos itens a serem inspecionados e isso pode aumentar as taxa de erro de avaliação.
- quando o fornecedor tem um bom histórico de avaliação;
- quando existe um sério risco do produto causar um dano ao usuário em caso de falha.

### **Vantagens e desvantagens da amostragem por aceitação**

Em relação à inspeção 100%, a amostragem por aceitação possui as seguintes vantagens:

- possui, em geral, um custo menor do que a inspeção 100%;
- há um manuseio menor dos produtos, reduzindo a chance de danos;
- se a avaliação é destrutiva, é impossível fazer uma inspeção 100%;
- em geral, a taxa de erro de avaliação é menor;
- quando um lote inteiro é devolvido, ao invés dos produtos defeituosos, o fornecedor será instigado a melhorar a qualidade.

Algumas desvantagens podem ser citadas:

- existe o risco de aceitar um lote ruim e rejeitar um lote bom;

- uma quantidade menor de informação é obtida;
- a amostragem por aceitação requer um planejamento detalhado, enquanto que a inspeção 100% não exige.

## 6.2 Tipos de planos amostrais por aceitação

Muitos planos de amostragem podem ser utilizados para classificar um lote como aceitável ou não. Em cada país, em cada empresa, podem existir diferentes critérios e maneiras de utilizar planos de amostragem por aceitação.

Basicamente, os planos de amostragem são divididos em dois: para *variáveis* e para *atributos*.

Com relação aos lotes, deseja-se, normalmente, que:

- sejam homogêneos;
- sejam grandes: são econômicos e apresentam mais eficiência para amostragem (por outro lado, a rejeição de um lote implica na devolução de uma grande quantidade de produtos);
- os lotes devem facilitar a seleção de amostras, seja através do tipo de embalagem, seja através da forma de distribuição dos produtos.

### 6.2.1 Plano de amostragem simples para atributos

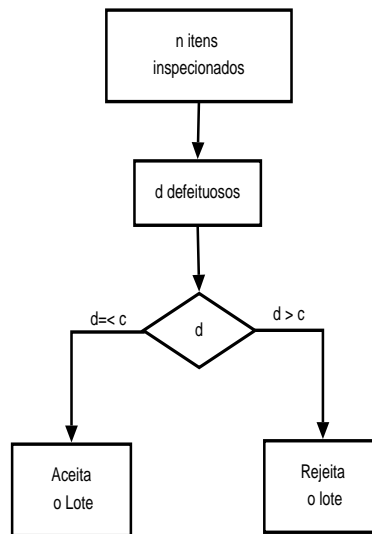
Considerando um lote de tamanho  $N$ , um plano de amostragem simples é definido por um tamanho de amostra  $n$  e por um número de aceitação  $c$ .

Então, para um lote com  $N = 10.000$ , em uma amostra aleatória com  $n = 89$  produtos, observa-se o número de defeituosos  $d$ . Se  $d$  é menor ou igual a  $c = 2$ , por exemplo, o lote será aceito, caso contrário, será rejeitado.

O plano de amostragem é dito simples, porque o julgamento do lote é feito baseado apenas em **uma** amostra de tamanho  $n$ .

Na figura 6.1, tem-se um esquema de como funciona a amostragem simples para aceitação ou rejeição de um lote.

Figura 6.1: Plano de amostragem simples para atributos.



### Uso da Curva Característica de Operação

A CCO para um plano de amostragem relaciona a probabilidade de aceitação de um lote com a proporção de defeitos. Através da CCO pode-se determinar qual o poder de discriminação do plano de amostragem, ou seja, qual a capacidade do plano em aceitar ou rejeitar um lote com uma certa quantidade de defeitos  $d$ .

#### Obtenção da curva

Considerando um lote de tamanho  $N$  grande, a distribuição do número de defeitos  $d$  em uma amostra de  $n$  produtos é Binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ . Onde  $p$  é a proporção de produtos defeituosos no lote.

Neste caso, a probabilidade de se encontrarem  $d$  defeituosos é

$$P(d) = \frac{n!}{d!(n-d)!} p^d (1-p)^{n-d}$$

A probabilidade de aceitar um lote é a probabilidade de que  $d$  seja menor ou igual a  $c$ :

$$P_A = P(d \leq c) = \sum_{d=0}^c \frac{n!}{d!(n-d)!} p^d (1-p)^{n-d}$$

#### Exemplo

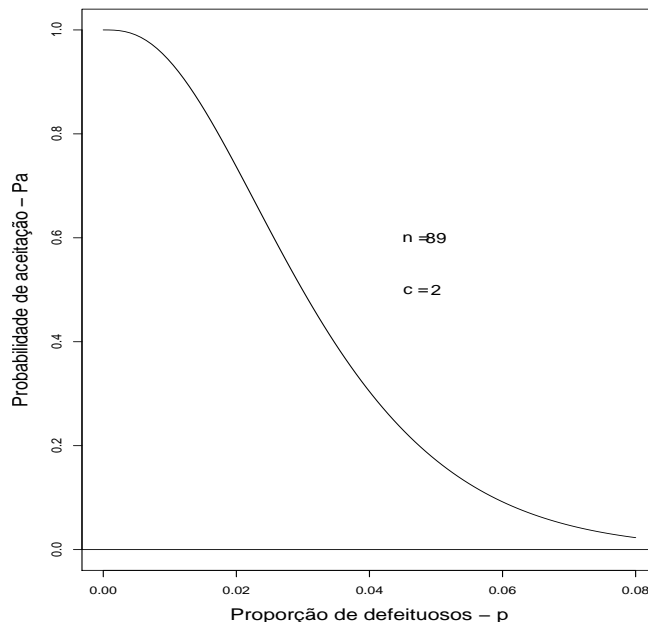


Para um lote, a fração de defeitos é  $p = 0,01$ ,  $n = 89$  e  $c = 2$ . A chance de aceitação de um lote é

$$\begin{aligned}
 P_A = P(d \leq c) &= \sum_{d=0}^2 \frac{89!}{d!(89-d)!} 0,01^d (1-0,01)^{89-d} \\
 &= \frac{89!}{0!(89-0)!} 0,01^0 (1-0,01)^{89-0} \\
 &+ \frac{89!}{1!(89-1)!} 0,01^1 (1-0,01)^{89-1} \\
 &+ \frac{89!}{2!(89-2)!} 0,01^2 (1-0,01)^{89-2} \\
 &= 0,9397
 \end{aligned}$$

A CCO é obtida para vários valores de  $p$  (figura 6.2).

Figura 6.2: Curva característica de operação para uma amostragem simples de atributos, com  $n=89$  e  $c=2$ .



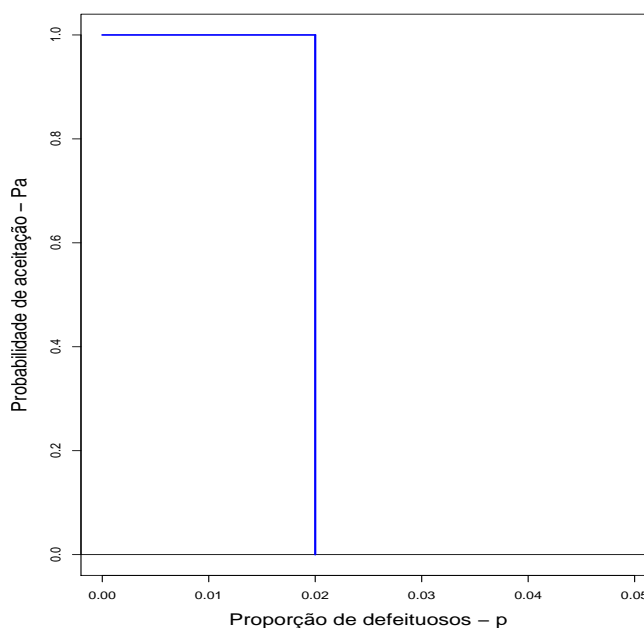
Observe que, para lotes que possuem 2% de defeituosos, a probabilidade de aceitação é de aproximadamente 74%.

Ainda, se 100 lotes forem avaliados, nessas condições, espera-se neste caso, que

74 deles sejam aceitos e 24 rejeitados.

Teoricamente, uma CCO que discriminaria perfeitamente um lote entre bom e ruim, deveria ter o formato da figura 6.3.

Figura 6.3: CCO teórica, ideal.



A única maneira de se obter tal curva é realizando uma inspeção 100%.

### 6.2.2 Plano de amostragem duplo para atributos

Um plano de amostragem duplo é realizado quando uma segunda amostra é necessária antes que uma decisão sobre o lote seja tomada.

Os parâmetros para uma amostragem dupla são:

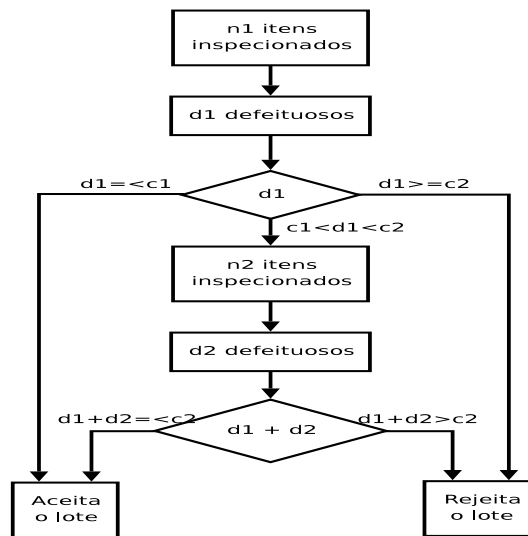
- $n_1$  = tamanho da primeira amostra;
- $c_1$  = número de aceitação da primeira amostra;
- $n_2$  = tamanho da segunda amostra;
- $c_2$  = número de aceitação de ambas as amostras.

#### Exemplo

Considere  $n_1 = 50$ ,  $c_1 = 1$ ,  $n_2 = 100$  e  $c_2 = 3$ .

Nesse caso, com uma amostra aleatória de  $n_1 = 50$  produtos de um lote, se  $d_1 \leq c_1$ , o lote é aceito na primeira amostra. Se  $d_1 > c_2 = 3$ , o lote é rejeitado na primeira amostra. Se  $c_1 < d_1 \leq c_2$  uma segunda amostra  $n_2 = 100$  é selecionada e o número de defeitos  $d_2$  é observado. Se  $d_1 + d_2 \leq c_2 = 3$ , o lote é aceito. Caso contrário, se  $d_1 + d_2 > c_2 = 3$  o lote é rejeitado. Esquemáticamente, a amostragem dupla pode ser visualizada da seguinte forma (figura 6.4):

Figura 6.4: Plano de amostragem duplo.



Com relação à CCO, ambos os planos, simples e duplo apresentam os mesmos riscos de aceitação e rejeição.

### 6.2.3 Amostragem para variáveis

No caso de variáveis onde o interesse é avaliar se o valor médio é diferente do valor definido para o lote, utilizam-se testes de hipótese. Estes não serão tratados nesse curso.

É possível, também, considerar uma variável como um atributo no seguinte sentido. Se a medida da característica de um produto não satisfaz as condições necessárias em uma amostra, diz-se que o produto é defeituoso. Neste caso, os mesmos métodos para atributos podem ser adotados.

# Apêndice A

## Constantes para gráficos de controle

Tabela A.1: Valores tabelados.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_2$	1,128	1,693	2,059	2,326	2,534	2,704	2,847	2,970	3,078
$A_2$	1,880	1,023	0,729	0,577	0,483	0,419	0,373	0,337	0,308
$D_3$	0	0	0	0	0	0,076	0,136	0,184	0,223
$D_4$	3,267	2,574	2,282	2,115	2,004	1,924	1,864	1,816	1,777

# Índice Remissivo

- 5S, 8
- ABNT, 9
- amostra, 28
  - calibração, 45
  - tamanho, 28
- amostragem, 62
  - planos, 64
- amplitude, 34, 35, 37
  - média, 35
  - relativa, 35
- anéis de pistão, 54
- ASQC, 3
- assistência técnica, 7
- atributo, 7, 68
- atributos, 28
- Bernoulli, 41
- Bob Galvin, 10
- Boyles, 60
- brainstorming, 17
  - sessão, 18
- círculo de qualidade, 3
- calibração, 45
- capacidade, 7, 53
  - processo, 54
- cco, 65
- CEP, 1
- civil, 62
- compressor, 14
- confiabilidade, 7
- conforme, 7, 41
- conformidade, 7, 15
- consumidor, 7
- controle de qualidade, 9
- curva, 23
- curva característica de operação, 23
- custos, 4
- defeito, 8, 13
- defeitos, 19, 65, 66
- Deming, 9
  - Prêmio, 9
- desempenho, 7
- desvio padrão, 36
- diagrama de casa e efeito, 17
- dispersão
  - gráfico, 19
- distribuição, 21
  - Binomial, 41, 49, 65
    - média, 42
    - variância, 42
  - Normal, 21, 29, 34, 35, 38, 53, 55, 57
  - Poisson, 44
- durabilidade, 7
- engenharia da qualidade, 6
- erro tipo II, 20
- especificação, 7
- estética, 7
- estimador da média, 34
- Feigenbaum, 9
- Fischer, 3
- fluxograma, 14

- folha de verificação, 13
- fora de controle, 42
- função, 23
- gráfico, 15
  - R, 37
  - de controle, 27, 30
  - R, 33
  - s, 33
- gráfico de controle, 3, 39
  - atributos, 41
  - c, 41
  - cco, 47
  - linha central, 34
  - np, 41, 43
  - p, 41
  - u, 41
- gráfico de controle c
  - limites, 44
- gráfico R
  - limites de controle, 36
- gráficos de controle
  - limites de controle, 34
  - precisão, 38
  - tamanho de amostra, 34, 46
  - variáveis, 33
- hipótese, 20
- inspeção
  - em massa, 4
  - custo, 63
- Ishikawa, 3
- Juran, 5, 9
- JUSE, 3
- limite
  - superior de especificação, 7
  - de advertência, 29
  - inferior de especificação, 7
  - probabilístico, 29
- limite inferior de controle, 28
- limite superior de controle, 28
- limites
  - de confiança, 39
  - de aviso, 29
  - de controle, 28, 29
  - de especificação, 10, 28, 33
  - naturais de tolerância, 52
- limites de controle, 42
  - gráfico R, 37
- limites de especificação, 52
- linha central, 28, 38
- lote, 68
- lotes, 64
- militar, 62
- Motorola, 10
- nível sigma, 10
- não-conforme, 7, 41
- normalização, 9
- normas ISO, 8
- outliers, 37
- Pareto
  - exemplo, 15
  - gráfico, 15
- pistonrings, 54
- plano de amostragem
  - duplo, 67
- planos de amostragem
  - simples, 64
- poder do teste, 23
- ppm, 10
- Prêmio Deming, 3
- prêmio Nacional da qualidade, 9
- probabilidade, 41, 65

- processo, 1, 14, 15, 19, 27, 29, 33, 46, 52,  
57  
    sob controle, 27  
    centrado, 55, 60  
    fora de controle, 27, 29  
    robusto, 54  
    sob controle, 28
- processos, 9
- produção, 3
- produto, 8, 41
- projeto, 28
- proporção, 42
- qualidade, 6, 7, 26, 42, 62
- retrabalho, 6
- robusto, 57
- Seis Sigma, 10, 55
- serviço, 4, 7, 8, 14, 19
- Shewart, 27
- Shewhart, 3
- simulação, 35
- sistema da qualidade, 8
- subgrupos, 28
- Taguchi, 3
- tamanho de amostra, 35
- taxa de erro, 63
- tendência, 19
- time, 4
- tolerância, 54
- TQC, 9
- transformação de dados, 57
- treinamento, 4, 27
- valor nominal, 7, 59
- variáveis  
    contínuas, 28
- variável, 7, 29
- variabilidade, 26