UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
DISCIPLINA: EST0035 – PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

PROFESSOR:
FERNANDO CÉSAR DE MIRANDA

NATAL/RN

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

INTRODUÇÃO

Definição 1. Um processo estocástico $\{X(t), t \in T\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias onde t representa, na maioria das vezes, o tempo. E X(t) representa o estado do processo no tempo t.

O Conjunto T é chamado o conjunto índice do processo.

- Se T é um conjunto enumerável, então $\{X(t), t \in T\}$ é um processo estocástico discreto no tempo.
- Se T é um conjunto não enumerável ou T é um intervalo aberto ou fechado da reta, então $\{X(t), t \in T\}$, é um processo estocástico contínuo no tempo.

Exemplos:

a) $\{X_n , n = 0, 1, 2...\}$ é um processo estocástico discreto no tempo indicado por inteiros não-negativos.
b) $\{X_t, t \geq 0\}$ é um processo estocástico contínuo no tempo indicado por números reais não-negativos.

O Espaço de estados de um processo estocástico é definido como o conjunto de todos os valores possíveis que a variável aleatória X(t) pode assumir.

O Espaço de estados será representado por S.

Definição 2. Um processo estocástico contínuo $\{X(t), t \in T\}$, diz-se ter incrementos independentes se para todos os inteiros $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$, as variáveis aleatórias $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), ... , X(t_n) - X(t_{n-1})$ são independentes.

Definição 3. Um processo estocástico contínuo $\{X(t), t \in T\}$ tem incrementos estacionários se $X(t_1 + s) - X(t_1)$ tem a mesma distribuição de $X(t_2 + s) - X(t_2)$, para todo valor de $t \in T$.

Resumindo:

Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias que descreve a evolução de algum processo através do tempo.

CADEIAS DE MARKOV DISCRETAS

Definição 1. Seja T = {0, 1, 2, 3, ...} e seja $\{X_n, n \in T\}$ um processo estocástico discreto. Supõe:

$$\boxed{P(X_{n+1} = j / X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j / X_n = i)}$$

Para quaisquer que sejam os estados i_0, i_1, ..., i_{n-1}, i, j e todo $n \geq 0$. Então o processo estocástico $\{X_n, n \in T\}$ é chamado uma Cadeia de Markov.

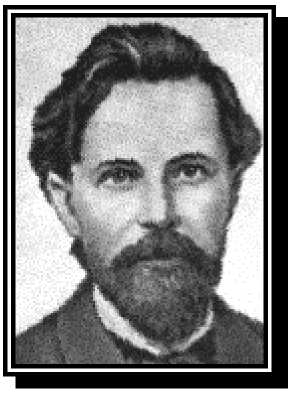
Observações:

A equação acima é denominada propriedade Markoviana e tem a seguinte interpretação: a distribuição condicional de qualquer estado futuro X_{n+1} dado os estados passados X_0, X_1, ..., X_{n-1} e o estado presente X_n, é independente dos estados passados e depende unicamente do estado presente.

a) $X_n = i$, significa que o processo está no estado i na etapa n.
b) Notação: $P(X_{n+1} = j / X_n = i) = P_{ij}$; Ex: $P(X_3 = 1 / X_2 = 0) = P_{01}$
c) Os P_{ij} são conhecidos como as probabilidades de transição em uma etapa da Cadeia de Markov.
d) As probabilidades de transição são estacionárias, isto é, elas independem de n, isto é, $P(X_{n+1} = j / X_n = i) = P_{ij}\ \forall\ n$.
e) $P_{ij} \geq 0\ \forall$ i, j, $\sum_j P_{ij} = 1$, i, j = 0, 1, 2,... . P_{ij} é a probabilidade de que o processo estando no estado i, terá probabilidade nula ou positiva de ir para o estado j.
f) Matriz de Transição

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

P é a Matriz (quadrada) de Transição em uma etapa da cadeia de Markov.



MARKOV
(1856-1922)

Andrei Andreyevich Markov nasceu no dia 14 de junho de 1856 em Ryazan, na Rússia. Se formou na universidade de St Petersburg (1878), onde se tornou professor em 1886. Os primeiros trabalhos de Markov foram principalmente em teoria dos números e análise, frações contínuas, limites de integrais, teoria da aproximação e a convergência de séries.

Após 1900 Markov aplicou o método das frações contínuas, inicialmente desenvolvido por Chebyshev, na teoria da probabilidade. Ele também estudou seqüências de variáveis mutuamente independentes, esperando estabelecer as leis da probabilidade de forma mais geral. Ele também provou o teorema do limite central.

Markov é particularmente lembrado pelo seu estudo de cadeias de Markov. Cadeias de Markov são um formalismo de modelagem de sistemas que descrevem o sistema como um processo estocástico. Deste ponto de vista o sistema modelado é caracterizado pelos seus estados e a forma pela qual eles se alternam.

Markov morreu no dia 20 de julho de 1922 em Petrograd (agora St Petersburg), Rússia.

Exemplo 01. Considere uma máquina que no início de um dado dia particular ou está quebrada ou está operando em perfeita condição. Supondo que essa máquina esteja quebrada no início do n-ésimo dia, ela terá uma probabilidade p de que no início do (n+1) ésimo dia ela estará consertada e em condições perfeitas de funcionamento. Supõe ainda, que se no início do n-ésimo dia ela estiver operando em perfeitas condições, ela terá uma probabilidade q de que no início de (n+1) ésimo dia estará quebrada. Defina os estados e encontre a matriz de transição.

Solução:

$$X_n = \begin{cases} 0 \text{ se a máquina está quebrada no } n-\text{ésimo dia} \\ 1 \text{ se a máquina está funcionando no } n-\text{ésimo dia} \end{cases} \qquad S = \{0, 1\}$$

$P(X_{n+1} = 1 / X_n = 0) = p \quad \Rightarrow P_{01}$
$P(X_{n+1} = 0 / X_n = 1) = q \quad \Rightarrow P_{10}$
$P(X_{n+1} = 0 / X_n = 0) = 1\text{-}p \quad \Rightarrow P_{00}$
$P(X_{n+1} = 1 / X_n = 1) = 1\text{-}q \quad \Rightarrow P_{11}$

$$\text{Matriz de transição: } P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo 02. Suponha que choverá ou não amanhã, dependerá das condições previstas pela meteorologia se chove ou não hoje e não das condições meteorológicas passadas. Suponha também que se chove hoje, então choverá amanhã com probabilidade α, e se não chove hoje, então choverá amanhã com probabilidade β. Defina os estados e encontre a matriz de probabilidade de transição.

Solução: $$X_n = \begin{cases} 0 \text{ se não chove no } n-\text{ésimo dia} \\ 1 \text{ se chove no } n-\text{ésimo dia} \end{cases} \qquad S = \{0, 1\}$$

$P(X_{n+1} = 1 / X_n = 0) = \beta \quad \Rightarrow P_{01}$
$P(X_{n+1} = 0 / X_n = 0) = 1 - \beta \quad \Rightarrow P_{00}$
$P(X_{n+1} = 1 / X_n = 1) = \alpha \quad \Rightarrow P_{11}$
$P(X_{n+1} = 0 / X_n = 1) = 1- \alpha \quad \Rightarrow P_{10}$

$$\text{Matriz de transição: } P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo 03. O nível econômico de um homem é classificado em três categorias: rico (R), classe média (M) e pobre (P). Supõe que dos filhos de um homem rico, 95% são ricos e 5% são de classe média. No caso de um indivíduo da classe média, 10% são ricos, 70% da classe média e 20% são pobres. No caso de um homem pobre 30% são de classe média e 70% são pobres. Supondo que cada homem tem apenas um filho, ache a Cadeia de Markov que representará uma família através de gerações sucessivas.

Solução: $$X_n = \begin{cases} R \text{ se na } n-\text{ésima geração a família é rica} \\ M \text{ se na } n-\text{ésima geração a família é classe média} \\ P \text{ se na } n-\text{ésima geração a família é pobre} \end{cases} \qquad S = \{R, M, P\}$$

$P(X_{n+1} = R / X_n = R) = 95\% = 0{,}95$
$P(X_{n+1} = M / X_n = R) = 5\% = 0{,}05$
$P(X_{n+1} = P / X_n = R) = 0$
$P(X_{n+1} = R / X_n = M) = 10\% = 0{,}10$
$P(X_{n+1} = M / X_n = M) = 70\% = 0{,}70$
$P(X_{n+1} = P / X_n = M) = 20\% = 0{,}20$
$P(X_{n+1} = R / X_n = P) = 0$
$P(X_{n+1} = M / X_n = P) = 30\% = 0{,}30$
$P(X_{n+1} = P / X_n = P) = 70\% = 0{,}70$

$$\text{Matriz de transição: } P = \begin{array}{c} \\ R \\ M \\ P \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R & M & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}10 & 0{,}70 & 0{,}20 \\ 0 & 0{,}30 & 0{,}70 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo 04. Considerando o exemplo anterior, suponha que todo homem não tem necessariamente um filho e que a probabilidade de ter um filho é 0,90. Supondo que um homem não tenha filho, a geração finda e o espólio vai para o Estado. Defina os estados e encontre a matriz de transição.

Solução:

$$X_n = \begin{cases} \text{R se na n – ésima geração a família é rica} \\ \text{M se na n – ésima geração a família é classe média} \\ \text{P se na n – ésima geração a família é pobre} \\ \text{E se na n – ésima geração a família extingui - se e o espólio vai para o estado} \end{cases}$$

S={R, M, P, E}

$P(X_{n+1} = R / X_n = R)$ = P(ele ter um filho e continuar rico)
= P(ter filho). P(rico continuar rico) = 0,90.0,95 = 0,855

$P(X_{n+1} = M / X_n = R)$ = P(ele ter um filho e passar p/ c. média)
= P(ter filho). P(rico passar p/ média) = 0,90.0,05 = 0,045

$P(X_{n+1} = P / X_n = R)$ = P(ele ter um filho e passar p/ pobre)
= P(ter filho). P(rico passar p/ pobre)= 0,90.0 = 0

$P(X_{n+1} = E / X_n = R)$ = P(ele não ter um filho) = 0,10

$$\text{Matriz de transição: } P = \begin{array}{c} \\ R \\ M \\ P \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R & M & P & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}855 & 0{,}045 & 0 & 0{,}10 \\ 0{,}09 & 0{,}63 & 0{,}18 & 0{,}10 \\ 0 & 0{,}27 & 0{,}63 & 0{,}10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

♣ CADEIA DE RUÍNA DO JOGADOR

Exemplo 05. Considere um jogador que em cada lance de um jogo ou ganha R$ 1,00 com probabilidade p ou perde R$ 1,00 com probabilidade 1−p. Suponha que ele pare de jogar quando ficar sem dinheiro, ou quando consegue acumular R$ N,00. Se X_n representa o capital do jogador num instante n, defina os estados e encontre a matriz de probabilidade de transição.

Solução:

X_n = {i, se no n-ésimo lance ele tem i reais, i = 0, 1, 2, ... N}

S = {0, 1, 2, ... N} R$

$$P(X_{n+1} = j / X_n = i) = P_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 0; \quad i = j = N \\ p & j = i + 1; \quad i = 1, 2 \ldots N - 1 \\ q = 1 - p & j = i - 1; \quad i = 1, 2 \ldots N - 1 \end{cases}$$

$$\text{Matriz de transição: } P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & N-1 & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & \cdots & p & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

CADEIA DE EHRENFEST

Exemplo 06. Suponha duas caixas I e II e três bolas numeradas por 1, 2 e 3. Inicialmente, algumas destas bolas estão na caixa I e o restante na caixa II. Um inteiro é selecionado ao acaso entre 1, 2 e 3 e a bola correspondente àquele inteiro é removida da caixa em que se encontra e colocada na caixa oposta. Este procedimento é repetido indefinitivamente, sendo as seleções independentes de ensaio para ensaio. Se X_n representa o nº de bolas na caixa I após o n-ésimo ensaio, ache a matriz de transição.

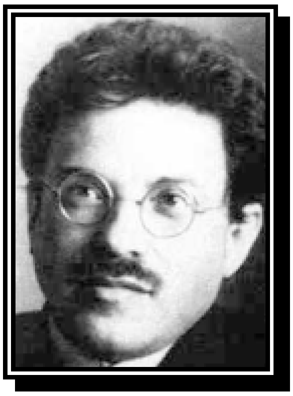
Solução: X_n = {nº de bolas na caixa I após a n-ésimo ensaio, i = 0, 1, 2, 3}
S = {0, 1, 2, 3}

$$\text{Matriz de transição: } P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo 07. Considerando o exemplo anterior, suponha agora quatro bolas.

Solução: X_n = {nº de bolas na caixa I após a n-ésimo ensaio, i = 0, 1, 2, 3, 4}
S = {0, 1, 2, 3, 4}

$$\text{Matriz de transição: } P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 2/4 & 0 & 2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



EHRENFEST
(1880-1933)

Paul Ehrenfest, veio de uma família judia pobre. Ele teve cinco irmãos, sendo ele o caçula. Quando criança Paul era muito doente e ficou órfão aos 16 anos, portanto o desempenho dele na escola não era muito bom, o único assunto que ele continuou superando era matemática. Os interesses intelectuais dele cresceram no assunto, talvez como uma forma de ego-proteção.

Estudou no Technische Hochschule em Viena. Lá ele formou uma amizade íntima com três outros estudantes de matemática, Heinrich Tietze, Hans Hahn e Herglotz. Chamados de "quarteto inseparável".

Enquanto assistia palestras de matemática, Ehrenfest sentiu falta de uma jovem estudante russa Tatyana. Ele desejou saber por que ela não ia às palestras, entretanto descobriu que a razão era que na época as mulheres não tinham permissão para assistir. Ehrenfest desafiou esta regra e, depois de uma real batalha, pôde mudá-la. Era o começo da amizade deles que conduziu ao matrimônio.

Junto com a esposa trabalhou no artigo sobre mecânica estatística que levou muito mais tempo para concluir do que esperava.

Ehrenfest foi de grande importância para a Física e a Estatística.

CADEIA DE NASCIMENTO E MORTE

Exemplo 08. Considere uma Cadeia de Markov com espaço de estados S = {0, 1, 2, ...} ou S = {0, 1, 2, ..., d} tal que iniciando no estado i, a cadeia estará ou em i − 1, ou i ou i + 1 após uma etapa. As probabilidades de transição para esta cadeia são dadas por:

$$P_{ij} = \begin{cases} q_i, & j = i-1, \quad i \geq 1 \\ r_i, & j = i, \quad i \geq 0 \\ p_i, & j = i+1, \quad i \geq 0 \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases} \qquad q_i + r_i + p_i = 1$$

- Se S for finito, admita-se que haja d+1, estados, então, Pd = 0.

- Se S for infinito, a matriz de transição será:

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

- Se a cadeia for finita:

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ d_{i-1} \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & d-1 & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{d-1} & r_{d-1} & p_{d-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q_j & r_j \end{pmatrix} \end{array}$$

As cadeias de Ehrenfest e Ruína do Jogador são exemplos da cadeia de Nascimento e Morte.

A frase "Nascimento e Morte" origina-se de aplicações em que os estados da cadeia formam uma população de algum "sistema vivo". Nestas aplicações, uma transição do estado i para o estado i + 1 corresponde a um "nascimento" enquanto uma transição do estado i para o estado i − 1 corresponde a uma "morte".

CADEIA DE FILA

Exemplo 09. Considere um serviço de atendimento, como por exemplo, uma fila em um supermercado. As pessoas chegam em vários instantes de tempo e são eventualmente atendidas. Se existem fregueses para serem atendidos no início de qualquer período, exatamente um freguês será atendido durante aquele período, e se não existem fregueses para serem atendidos no início de um período, então ninguém será atendido.

Seja ξ_n o número de fregueses que chegam à fila durante o n-ésimo período. Supõe que $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ são variáveis aleatórias independentes com valores inteiros não-negativos que têm uma densidade comum f.

Seja X_n o número de fregueses na fila ao final do n-ésimo período. Então se:

$$X_n = 0 \Rightarrow X_{n+1} = \xi_{n+1} \qquad X_n \geq 1 \Rightarrow X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1} - 1$$

O processo estocástico $\{X_n, n \geq 0\}$ é uma Cadeia de Markov com espaço de estados S = {0, 1, 2, ...} e a função de probabilidade de transição será determinada por:

Solução:

i = 0

$P(X_{n+1} = j / X_n = 0)$
$= P(\xi_{n+1} = j)$
$= f(j)$

$f(j) = f(0)$,
$f(j) = f(1)$,
$f(j) = f(2)$...

i > 0

$P(X_{n+1} = j / X_n = i)$
$= P(X_n + \xi_{n+1} - 1 = j / X_n = i)$
$= P(\xi_{n+1} = j + 1 - i)$
$= f(j + 1 - i)$

$f(j + 1 - i) = f(0 + 1 - 1) = f(0)$
$f(j + 1 - i) = f(1 + 1 - 1) = f(1)$
$f(j + 1 - i) = f(2 + 1 - 1) = f(2)$...

Matriz de Transição:

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} f(0) & f(1) & f(2) & f(3) & \cdots \\ f(0) & f(1) & f(2) & f(3) & \cdots \\ 0 & f(0) & f(1) & f(2) & \cdots \\ 0 & 0 & f(0) & f(1) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

CÁLCULO COM AS FUNÇÕES DE TRANSIÇÃO

01. DISTRIBUIÇÃO INICIAL - π_0

Definição. A função π_0 (i), i $\in$ S, definida por: $\boxed{\pi_0(i) = P(X_0 = i) \quad , i \in S}$

onde, $\pi_0(i) \geq 0 \ \forall \ i \in S$ e $\sum_i \pi_0(i) = 1$, é denominada Distr. Inicial da cadeia de Markov.

Exemplo 10. Se $\{X_n, n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov com espaço de estados S={0, 1, 2, 3} e $\pi_0 = \left(\frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{3}{16}\right)$ é a Distribuição Inicial da cadeia. Então:

$\pi_0(0) = P(X_0 = 0) = 1/16$ $\qquad$ $\pi_0(2) = P(X_0 = 2) = 7/16$

$\pi_0(1) = P(X_0 = 1) = 5/16$ $\qquad$ $\pi_0(3) = P(X_0 = 3) = 3/16$

02. DISTRIBUIÇÃO CONJUNTA DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS $X_0, X_1, \ldots, X_N$ NA CADEIA DE MARKOV

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = \boxed{= \pi_0(i_0)\, P_{i_0 i_1} \,.\, P_{i_1 i_2} \,., \ldots, P_{i_{n-1} i_n}}$$

Prova:

Lembrete: $P(A \cap B \cap C \ldots N) = P(A).P(B/A).P(C/A \cap B).P(D/A \cap B \cap C) \ldots P(N/A \cap B \cap \ldots N\text{-}1)$

$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n)$

$= P(X_0=i_0)P(X_1=i_1 / X_0=i_0)P(X_2= i_2 / X_0= i_0 , X_1= i_1)\ldots P(X_n= i_n)/X_0=i_0, X_1= i_1, X_{n-1}=i_{n-1})$

$= P(X_0=i_0)P(X_1=i_1 / X_0=i_0)P(X_2= i_2 / X_1= i_1)\ldots P(X_n= i_n)/ X_{n-1}=i_{n-1})$

$= \pi_0(i_0)\, P_{i_0 i_1} \,.\, P_{i_1 i_2} \,., \ldots, P_{i_{n-1} i_n}$

Exemplo 11. Considere a matriz de transição

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 2/8 & 1/8 & 3/8 \\ 1/16 & 3/16 & 5/16 & 7/16 \\ 1/5 & 0 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix} \end{array},$$

onde S = {0, 1, 2, 3} e $\pi_0 = \left(\frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{3}{16}\right)$. Determine:

a) $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0)$

b) $P(X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1)$

c) $P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3)$

d) $P(X_0 = 3, X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1)$

Solução:

a) $P(X_0= 0, X_1= 1, X_2= 0) = P(X_0 = 0)\, P(X_1 = 1/ X_0 = 0)\, P(X_2 = 0/ X_0 = 0, X_1 = 1)$

$= P(X_0 = 0)\, P(X_1 = 1/ X_0 = 0)\, P(X_2 = 0/ X_1 = 1)$

$= \pi_0(0)\, P_{01}\, P_{10} = \frac{1}{16}.\frac{1}{8}.\frac{1}{4} = \frac{1}{512}$

b) $P(X_0= 0, X_1= 0, X_2= 1, X_3= 1) =$

$= P(X_0= 0)\, P(X_1= 0/ X_0= 0)\, P(X_2= 1/ X_0= 0, X_1 = 0)\, P(X_3= 1/ X_0= 0, X_1= 0, X_2= 1)$

$= P(X_0= 0)\, P(X_1= 0/ X_0= 0)\, P(X_2= 1/ X_1 = 0)\, P(X_3= 1/ X_2= 1)$

$= \pi_0(0)\, P_{00}\, P_{01}\, P_{11} = \frac{1}{16}.\frac{1}{8}.\frac{1}{8}.\frac{2}{8} = \frac{1}{4096}$

c) $P(X_0= 1, X_1= 2, X_2= 3) =$

$= \pi_0(1)\, P_{12}\, P_{23}$

$= \frac{5}{16}.\frac{1}{8}.\frac{7}{16} = \frac{35}{2048}$

d) $P(X_0= 3, X_1= 1, X_2= 2, X_3= 1) =$

$= \pi_0(3)\, P_{31}\, P_{12}\, P_{21}$

$= \frac{3}{16}.0.\frac{1}{8}.\frac{3}{16} = 0$

03. FUNÇÃO DE TRANSIÇÃO EM M-ETAPAS.

Definição. A função de transição em m-etapas para uma cadeia de Markov é:

$$\boxed{P_{ij}^{m} = P(X_{n+m} = j \,/\, X_n = i),\ \ n \geq 0 \quad i, j \in S}$$

Exemplos: $P_{ij}^{4} = P(X_4 = j \,/\, X_0 = i)$ $\qquad$ $P_{ij}^{4} = P(X_{10} = j \,/\, X_6 = i)$

$\boxed{P_{ij}^{0} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}}$ P_{ij}^{m} é a probabilidade de que a cadeia visite o estado j após m-etapas (ou transições) dado que no instante n, encontra-se no estado i.

04. AS EQUAÇÕES DE CHAPMAN-KOLMOGOROV

Para que uma cadeia de Markov que está inicialmente no estado i visite o estado j após n+m etapas, é necessário que a partir do estado i a cadeia visite um estado k após n-etapas e a partir deste estado k, visite o estado j após m-etapas adicionais.

Ou seja:

$$\boxed{P_{ij}^{n+m} = \sum_k P_{ik}^{n}\, P_{kj}^{m}}$$

Observação: As probabilidades P_{ij}^{n+m} podem ser facilmente obtidas através do produto de matrizes das probabilidades de transição em n e m etapas respectivamente. Isto é $P^{n+m} = P^n . P^m$

Prova: $P_{ij}^{n+m} = P(X_{n+m} = j \,/\, X_0 = i) = \dfrac{P(X_{n+m} = j, X_0 = i)}{P(X_0 = i)}$ ①

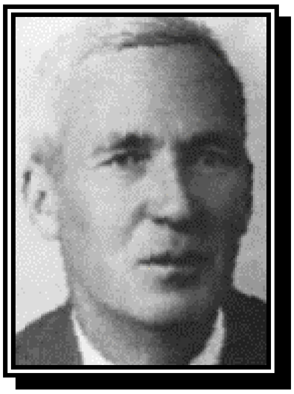
$$P(X_{n+m} = j, X_0 = i) = \sum_k P(X_{n+m} = j, X_n = k, X_0 = i)$$

$$= \sum_k P(X_0 = i)P(X_n = k \,/\, X_0 = i)P(X_{n+m} = j, X_0 = i, X_n = k)$$

$$= P(X_0 = i)\sum_k P(X_n = k \,/\, X_0 = i)P(X_{n+m} = j, X_n = k)$$

$$= P(X_0 = i)\sum_k P_{ik}^{n}\, P_{kj}^{m} \quad ②$$

Substituindo ② em ①: $P_{ij}^{n+m} = \dfrac{P(X_0 = i)\sum_k P_{ik}^{n}\, P_{kj}^{m}}{P(X_0 = i)}$, então $P_{ij}^{n+m} = \sum_k P_{ik}^{n}\, P_{kj}^{m}$.



KOLMOGOROV
(1903-1987)

Andrei Nikolayevich Kolmogorov. O mais influente matemático soviético do século XX nascido em Tambov, Rússia, iniciador da moderna teoria da probabilidade, criou para ela uma base axiomática fundamentada na teoria dos conjuntos.

Graduou-se em física e matemática na Universidade Estatal de Moscou (1925) e para lá foi nomeado professor (1931) e diretor do Instituto de Matemática (1933).

Estudando problemas teóricos do cálculo de probabilidades, sua primeira publicação de importância foi a axiomática de Kolmogorov, que provê o cálculo de probabilidades de uma base lógica formal.

Sua obra abrange ainda pesquisas em álgebra e topologia, que ajudaram a estabelecer as bases de estudos posteriores de análise matemática. Eleito membro da Academia de Ciências da União Soviética (1939), depois (1950) dedicou-se ao estudo de problemas da teoria da informação, sistemas dinâmicos e mecânica clássica.

Com originais contribuições no campo das teorias das probabilidades, Kolmogorov foi de grande importância para o desenvolvimento da Estatística.

Exemplo 12. Considere a matriz de transição $P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 2/8 & 1/8 & 3/8 \\ 1/16 & 3/16 & 5/16 & 7/16 \\ 1/5 & 0 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix} \end{array}$,

Determine P^2_{00}, P^2_{21}, P^2_{23} e P^3_{00}.

Solução:

$$P^2_{00} = \sum_k P_{0k}P_{k0} = P_{00}P_{00} + P_{01}P_{10} + P_{02}P_{20} + P_{03}P_{30} = \frac{1}{8}.\frac{1}{8} + \frac{1}{8}.\frac{1}{4} + \frac{1}{2}.\frac{1}{16} + \frac{1}{4}.\frac{1}{5} = \frac{41}{320}$$

$$P^2_{21} = \sum_k P_{2k}P_{k1} = P_{20}P_{01} + P_{21}P_{11} + P_{22}P_{21} + P_{23}P_{31} = \frac{1}{16}.\frac{1}{8} + \frac{3}{16}.\frac{2}{8} + \frac{5}{16}.\frac{3}{16} + \frac{7}{16}.0 = \frac{29}{256}$$

$$P^2_{23} = \sum_k P_{2k}P_{k3} = P_{20}P_{03} + P_{21}P_{13} + P_{22}P_{23} + P_{23}P_{33} = \frac{1}{16}.\frac{1}{4} + \frac{3}{16}.\frac{3}{8} + \frac{5}{16}.\frac{7}{16} + \frac{7}{16}.\frac{2}{5} = \frac{509}{1280}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}375 \\ 0{,}0625 & 0{,}1875 & 0{,}3125 & 0{,}4375 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}375 \\ 0{,}0625 & 0{,}1875 & 0{,}3125 & 0{,}4375 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}1281 & 0{,}1406 & 0{,}3344 & 0{,}3969 \\ 0{,}1766 & 0{,}1172 & 0{,}3453 & 0{,}3609 \\ 0{,}1617 & 0{,}1133 & 0{,}3273 & 0{,}3977 \\ 0{,}13 & 0{,}1 & 0{,}385 & 0{,}385 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P^3_{00} = \sum_k P_{0k}P^2_{k0}$$
$$= P_{00}P^2_{00} + P_{01}P^2_{10} + P_{02}P^2_{20} + P_{03}P^2_{30}$$
$$= \frac{1}{8}.0{,}1281 + \frac{1}{8}.0{,}1766 + \frac{1}{2}.0{,}1617 + \frac{1}{4}.0{,}13$$
$$= 0{,}15$$

Exemplo 13. Considere a cadeia de Markov com S={0, 1, 2} e matriz de transição $P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$. Determine P^{100} e P^{101}.

Solução: $$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

$P^3 = P$

$P^4 = P^3.P = P.P = P^2$

Resp:
$P^{100} = P^2$ e $P^{101} = P$

05. DISTRIBUIÇÃO DE XN

A distribuição de X_n é representada por Π_n.
Se $\Pi_0(i)$, $i \in S$, é a distribuição inicial da cadeia de Markov, então:

$$P(X_n = j) = \sum_i \Pi_0(i)\, P^n_{ij}, \quad \forall\, j \in S \qquad \Pi_n = [P(X_n = 0); P(X_n = 1), \ldots]$$

Em termos matriciais: $\boxed{\Pi_n = \Pi_0\, P^n}$

Prova: $\{X_n = j\} = \bigcup_i \{X_0 = i, X_n = j\}$

$$P(X_n = j) = P(\bigcup_i \{X_0 = i, X_n = j\})$$
$$= \sum_i P(X_0 = i, X_n = j)$$
$$= \sum_i P(X_0 = i)P(X_n = j / X_0 = i)$$
$$P(X_n = j) = \sum_i \Pi_0(i)\, P_{ij}^n$$

Exemplo 14. Dada a matriz de transição $P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 2/8 & 1/8 & 3/8 \\ 1/16 & 3/16 & 5/16 & 7/16 \\ 1/5 & 0 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix} \end{array}$ e a distribuição inicial $\Pi_0 = (0{,}0625;\ 0{,}3125;\ 0{,}4375;\ 0{,}1875)$. Determine Π_1, Π_2, Π_3 e Π_4.

Solução:

Π_1 $\quad \Pi_n = \Pi_0 P^n \rightarrow \Pi_1 = \Pi_0 P$

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}375 \\ 0{,}0625 & 0{,}1875 & 0{,}3125 & 0{,}4375 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Pi_1(0) = 0{,}0625\ (0{,}125)+0{,}3125\ (0{,}25)+0{,}4375\ (0{,}0625)+0{,}1875\ (0{,}2) = 0{,}151$

$\Pi_1 = (0{,}151;\ 0{,}17;\ 0{,}282;\ 0{,}397)$

Π_2 $\quad \Pi_n = \Pi_0 P^n \rightarrow \Pi_2 = \Pi_0 P^2$

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}1281 & 0{,}1406 & 0{,}3344 & 0{,}3969 \\ 0{,}1766 & 0{,}1172 & 0{,}3453 & 0{,}3609 \\ 0{,}1617 & 0{,}1133 & 0{,}3273 & 0{,}3977 \\ 0{,}13 & 0{,}1 & 0{,}385 & 0{,}385 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Pi_2(0) = 0{,}0625\ (0{,}1281)+0{,}3125(0{,}1766)+0{,}4375(0{,}1617)+0{,}1875(0{,}13)= 0{,}1583$

$\Pi_2 = (0{,}1583;\ 0{,}1137;\ 0{,}3442;\ 0{,}3838)$

Π_3 $\quad \Pi_n = \Pi_0 P^n \rightarrow \Pi_3 = \Pi_0 P^3$

$$P^3 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}1514 & 0{,}1139 & 0{,}3449 & 0{,}3898 \\ 0{,}1451 & 0{,}1161 & 0{,}3552 & 0{,}3835 \\ 0{,}1485 & 0{,}1099 & 0{,}3564 & 0{,}3852 \\ 0{,}1423 & 0{,}1134 & 0{,}3518 & 0{,}3924 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Pi_3(0) = 0{,}0625(0{,}1514)+0{,}3125(0{,}1451)+0{,}4375(0{,}1485)+0{,}1875(0{,}1423)=0{,}147$

$\Pi_3 = (0{,}147;\ 0{,}113;\ 0{,}354;\ 0{,}386)$

Π_4 $\quad \Pi_n = \Pi_0 P^n \rightarrow \Pi_4 = \Pi_0 P^4$

$$P^4 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}1469 & 0{,}1121 & 0{,}3537 & 0{,}3874 \\ 0{,}1461 & 0{,}1138 & 0{,}3515 & 0{,}3886 \\ 0{,}1454 & 0{,}1129 & 0{,}3534 & 0{,}3883 \\ 0{,}1466 & 0{,}1121 & 0{,}3523 & 0{,}3890 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Pi_4(0) = 0{,}0625(0{,}1469)+0{,}3125(0{,}1461)+0{,}4375(0{,}1454)+0{,}1875(0{,}1466)=0{,}146$

$\Pi_4 = (0{,}146;\ 0{,}113;\ 0{,}353;\ 0{,}388)$

06. MÉTODO ALTERNATIVO PARA SE OBTER $P(X_N = j)$

Pode-se determinar $P(X_n = j)$ pela seguinte expressão:

$$P(X_n = j) = \sum_i P(X_{n-1} = i)\ P_{ij}$$

Em termos matriciais: $\boxed{\Pi_n = \Pi_{n-1}\ P}$

Prova: $\{X_n = j\} = \bigcup_i \{X_{n-1} = i, X_n = j\}$

$$P(X_n = j) = P(\bigcup_i \{X_{n-1} = i, X_n = j\})$$
$$= \sum_i P(X_{n-1} = i, X_n = j)$$
$$= \sum_i P(X_{n-1} = i) P(X_n = j / X_{n-1} = i)$$
$$P(X_n = j) = \sum_i P(X_{n-1} = i)\ P_{ij}$$

Exemplo 15. Determine $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5$ em função da fórmula acima.
Solução:

Π_1
$$\begin{cases} \Pi_n = \Pi_{n-1}\ P \quad \to \Pi_1 = \Pi_{1-1}\ P \quad \to \Pi_1 = \Pi_0\ P \text{ (calculamos anteriormente)} \\ \Pi_1 = (0{,}151;\ 0{,}17;\ 0{,}282;\ 0{,}397) \end{cases}$$

Π_2
$$\begin{cases} \Pi_n = \Pi_{n-1}\ P \quad \to \Pi_2 = \Pi_{2-1}\ P \quad \to \Pi_2 = \Pi_1\ P \\ \Pi_2 = (0{,}151;\ 0{,}17;\ 0{,}282;\ 0{,}397).\begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}375 \\ 0{,}0625 & 0{,}1875 & 0{,}3125 & 0{,}4375 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} \\ \Pi_2 = (0{,}1583;\ 0{,}1137;\ 0{,}3442;\ 0{,}3838) \end{cases}$$

Π_3
$$\begin{cases} \Pi_n = \Pi_{n-1}\ P \quad \to \Pi_3 = \Pi_{3-1}\ P \quad \to \Pi_3 = \Pi_2\ P \\ \Pi_3 = (0{,}1583;\ 0{,}1137;\ 0{,}3442;\ 0{,}3838).\begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}375 \\ 0{,}0625 & 0{,}1875 & 0{,}3125 & 0{,}4375 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} \\ \Pi_3 = (0{,}147;\ 0{,}113;\ 0{,}354;\ 0{,}386) \end{cases}$$

Π_4
$$\begin{cases} \Pi_n = \Pi_{n-1}\ P \quad \to \Pi_4 = \Pi_{4-1}\ P \quad \to \Pi_4 = \Pi_3\ P \\ \Pi_4 = (0{,}147;\ 0{,}113;\ 0{,}354;\ 0{,}386).\begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}375 \\ 0{,}0625 & 0{,}1875 & 0{,}3125 & 0{,}4375 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} \\ \Pi_4 = (0{,}146;\ 0{,}113;\ 0{,}353;\ 0{,}388) \end{cases}$$

Π_5
$$\begin{cases} \Pi_n = \Pi_{n-1}\ P \quad \to \Pi_5 = \Pi_{5-1}\ P \quad \to \Pi_5 = \Pi_4\ P \\ \Pi_5 = (0{,}146;\ 0{,}113;\ 0{,}353;\ 0{,}388).\begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}375 \\ 0{,}0625 & 0{,}1875 & 0{,}3125 & 0{,}4375 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} \\ \Pi_5 = (0{,}146;\ 0{,}113;\ 0{,}353;\ 0{,}388) \end{cases}$$

TEMPO DA PRIMEIRA VISITA

Definição. Seja A um subconjunto do espaço amostral S. O tempo da primeira visita ao conjunto A para a cadeia de Markov é definido por:

$$T_A = \begin{cases} \min\{n > 0,\ X_n \in A\} \\ +\infty \quad \text{se } X_n \notin A,\ n > 0 \end{cases}$$

Notação: $\rho_{ij}^{(m)}$ ou $P_i\,[T_j = m]$, probabilidade de que uma cadeia de Markov, que inicia no estado i, faça a primeira visita ao estado j no instante m.

Exemplo 16. Considere a matriz de transição

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}375 \\ 0{,}0625 & 0{,}1875 & 0{,}3125 & 0{,}4375 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Determine $\rho_{00}^{(1)}$, $\rho_{00}^{(2)}$ e $\rho_{00}^{(3)}$.

Solução:

$$\rho_{00}^{(1)} = 0{,}125$$

$$\begin{aligned} \rho_{00}^{(2)} &= P_{01}P_{10} + P_{02}P_{20} + P_{03}P_{30} \\ &= 0{,}125\,(0{,}25) + 0{,}5\,(0{,}0625) + 0{,}25\,(0{,}2) \\ &= 0{,}03125 + 0{,}03125 + 0{,}05 = 0{,}1125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{00}^{(3)} &= P_{01}(P_{11}P_{10} + P_{12}P_{20} + P_{13}P_{30}) + P_{02}(P_{21}P_{10} + P_{22}P_{20} + P_{23}P_{30}) + P_{03}(P_{31}P_{10} + P_{32}P_{20} + P_{33}P_{30}) \\ &= 0{,}125\,[0{,}25\,(0{,}25) + 0{,}125\,(0{,}0625) + 0{,}375\,(0{,}2)] + \\ &\quad 0{,}5\,[\,0{,}1875\,(0{,}25) + 0{,}3125\,(0{,}0625) + 0{,}4375\,(0{,}2)] + \\ &\quad 0{,}25\,[\,0 + 0{,}4\,(0{,}0625) + 0{,}4\,(0{,}2)] \\ &= 0{,}125\,(0{,}1453125) + 0{,}5\,(0{,}15390625) + 0{,}25\,(0{,}105) = 0{,}121367 \end{aligned}$$

Resultado.

$$\boxed{P_{ij}^{n} = \sum_{m=1}^{n} \rho_{ij}^{(m)} P_{jj}^{n-m}} \qquad , n \geq 1$$

Prova:

$$\{X_n = j\} = \bigcup_{m=1}^{n} \{T_j = m,\ X_n = j\}$$

$$\{X_n = j / X_0 = i\} = \bigcup_{m=1}^{n} \{T_j = m,\ X_n = j / X_0 = i)\}$$

$$\begin{aligned} P(X_n = j / X_0 = i) &= P(\bigcup_{m=1}^{n} \{T_j = m,\ X_n = j / X_0 = i)\} \\ &= \sum_{m=1}^{n} P(T_j = m,\ X_n = j / X_0 = i) \\ &= \sum_{m=1}^{n} P(T_j = m / X_0 = i) P(X_n = j / X_0 = i, T_j = m) \\ &= \sum_{m=1}^{n} P(T_j = m / X_0 = i) P(X_n = j / T_j = m) \\ &= \sum_{m=1}^{n} P_i(T_j = m) P_{jj}^{n-m} \\ &= \sum_{m=1}^{n} \rho_{ij}^{(m)} P_{jj}^{n-m} \end{aligned}$$

Exemplo 17. Considere a matriz de transição
$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}375 \\ 0{,}0625 & 0{,}1875 & 0{,}3125 & 0{,}4375 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Determine as probabilidades P_{00}^{2} e P_{00}^{3} em função de $\rho_{ij}^{(m)}$.

Solução:

$$P_{ij}^{n} = \sum_{m=1}^{n} \rho_{ij}^{(m)} P_{jj}^{n-m}$$

$$P_{00}^{2} = \rho_{00}^{(1)} P_{00} + \rho_{00}^{(2)} P_{00}^{0}$$
$$= 0{,}125(0{,}125) + 0{,}1125$$
$$= 0{,}1281$$

$$P_{ij}^{n} = \sum_{m=1}^{n} \rho_{ij}^{(m)} P_{jj}^{n-m}$$

$$P_{00}^{3} = \rho_{00}^{(1)} P_{00}^{2} + \rho_{00}^{(2)} P_{00} + \rho_{00}^{(3)} P_{00}^{0}$$
$$= 0{,}125(0{,}1281) + 0{,}1125(0{,}125) + 0{,}121363$$
$$= 0{,}1514$$

DETERMINAÇÃO DA PROBABILIDADE DA PRIMEIRA VISITA

Definição. A probabilidade da primeira visita a um estado j no instante n+1, para uma Cadeia de Markov que inicia no estado i, é dada por:

$$\rho_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \neq j} P_{ik}\, \rho_{kj}^{(n)} \quad , n \geq 1$$

Observações:

① $P_i\,[T_j = 1] = \rho_{ij}^{(1)} = P_i\,[X_1 = j] = P_{ij}$

② $P_i\,[X_n = j] = P_{ij}^{n}$

Prova:

Para n = 1 $\quad \{T_j = 2/X_0 = i\} = \bigcup_{k \neq j} \{X_1 = K, X_2 = j/X_0 = i\}$

Para n = 2 $\quad \rho_{ij}^{(2)} = P[T_j = 2/X_0 = i] = \sum_{k \neq j} P(X_1 = k, X_2 = j / X_0 = i)$

$$= \sum_{k \neq j} P(X_1 = k / X_0 = i) P(X_2 = j / X_0 = i, X_1 \neq j)$$

$$= \sum_{k \neq j} P_{ik}\, \rho_{kj}^{(1)}$$

Para n = 3 $\quad \rho_{ij}^{(3)} = \sum_{k \neq j} P(X_1 = k, X_2 \neq j, X_3 = j / X_0 = i)$

$$= \sum_{k \neq j} P(X_1 = k / X_0 = i) P(X_2 \neq j, X_3 = j / X_0 = i, X_1 = k)$$

$$= \sum_{k \neq j} P_{ij}\, \rho_{kj}^{(2)}$$

Desta forma a fórmula é válida para qualquer n.

$$\boxed{\rho_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} P_{ik}\, \rho_{kj}^{(n-1)}}$$

Exemplo 18. Considere a matriz de transição
$$\begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\\3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,125 & 0,125 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,125 & 0,375 \\ 0,0625 & 0,1875 & 0,3125 & 0,4375 \\ 0,2 & 0 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Determine $\rho_{00}^{(1)}$, $\rho_{00}^{(2)}$ e $\rho_{13}^{(2)}$.

Solução:

$$\rho_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} P_{ik}\ \rho_{kj}^{(n-1)} \quad \Rightarrow \quad \rho_{00}^{(1)} = P_{00}^{(1)} = 0{,}125$$

$$\rho_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} P_{ik}\ \rho_{kj}^{(n-1)} \quad \Rightarrow \quad \rho_{00}^{(2)} = \sum_{k \neq 0} P_{0k}\ \rho_{k0}^{(2-1)}$$

$$= P_{01}\ \rho_{10}^{(1)} + P_{02}\ \rho_{20}^{(1)} + P_{03}\ \rho_{30}^{(1)}$$

$$= 0{,}125\ (0{,}25) + 0{,}5\ (0{,}0625) + 0{,}25(0{,}2) = 0{,}1125$$

$$\rho_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} P_{ik}\ \rho_{kj}^{(n-1)} \quad \Rightarrow \quad \rho_{13}^{(2)} = \sum_{k \neq 3} P_{1k}\ \rho_{k3}^{(2-1)}$$

$$= P_{10}\rho_{03}^{(1)} + P_{11}\rho_{13}^{(1)} + P_{12}\rho_{23}^{(1)}$$

$$= 0{,}25\ (0{,}25) + 0{,}25\ (0{,}375) + 0{,}125\ (0{,}4375)$$

$$= 0{,}0625 + 0{,}09375 + 0{,}0546875 = 0{,}2109$$

Exemplo 19. Considere uma matriz de transição de uma Cadeia de Markov:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0\\1\\2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 1-p \end{pmatrix} \end{array}$$. Determine $\rho_{02}^{(1)}$, $\rho_{02}^{(2)}$, $\rho_{02}^{(3)}$ e $\rho_{02}^{(n)}$.

Solução:

$$\rho_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} P_{ik}\ \rho_{kj}^{(n-1)} \Rightarrow \rho_{02}^{(1)} = P$$

$$\rho_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} P_{ik}\ \rho_{kj}^{(n-1)} \Rightarrow \rho_{02}^{(2)} = \sum_{k \neq 2} P_{0k}\ \rho_{k2}^{(2-1)} = P_{00}\ \rho_{02}^{(1)} + P_{01}\ \rho_{12}^{(1)} = (1-p)p+0 = (1-p)p$$

$$\rho_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} P_{ik}\ \rho_{kj}^{(n-1)} \Rightarrow \rho_{02}^{(3)} = \sum_{k \neq 2} P_{0k}\ \rho_{k2}^{(3-1)} = P_{00}\rho_{02}^{(2)} = P_{00}(1-p)p = (1-p)(1-p)p = (1-p)^2p$$

$$\rho_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} P_{ik}\ \rho_{kj}^{(n-1)} \Rightarrow \rho_{02}^{(n)} = \sum_{k \neq 2} P_{0k}\ \rho_{k2}^{(n-1)} = (1-p)^{n-1}p$$