UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
DISCIPLINA: EST0035 – PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

2ª ETAPA

PROFESSOR:
FERNANDO CÉSAR DE MIRANDA

NATAL/RN

ESTADO ABSORVENTE

Definição. Um estado j de uma cadeia de Markov é chamado um estado:

$$\boxed{\text{Absorvente se } P_{jj} = 1 \text{ e } P_{ji} = 0, \ \forall\, i \neq j}$$

Exemplo: Na cadeia de ruína do jogador sobre o espaço de estados S={0, 1, 2, ..., N - 1, N} os estados "0" e "N" são estados absorventes pois,

$P_{00} = 1$ e $P_{0j} = 0 \quad j \neq 0$

$P_{NN} = 1$ e $P_{Nj} = 0 \quad j \neq N$

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & N-1 & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & p & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ESTADOS RECORRENTES E TRANSITÓRIOS

Definição. Seja $\{X_n \; n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados S e função de transição P. Denotaremos por:

$\rho_{ij} = P_i\,[Tj < \infty]$ a probabilidade de que uma cadeia de Markov iniciando no estado i, visite o estado j em algum instante positivo de tempo.

Um estado j de uma cadeia de Markov é chamado um estado:

$\boxed{\text{Recorrente se } \rho_{jj} = 1}$ $\boxed{\text{Transitório se } \rho_{jj} < 1}$

Observações:

① Se j é um estado **Recorrente**, então uma cadeia de Markov que inicia no estado j retornará a este estado com probabilidade 1.

② Se j é um estado **Transitório**, então uma cadeia de Markov que inicia no estado j tem probabilidade 1 - ρ_{jj} de nunca retornar.

③ Se j é um estado **Absorvente**, então j é necessariamente um estado **Recorrente**.

Prova:
$$\begin{aligned} \rho_{jj} &= P_j\,[Tj < \infty] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} P_j[T_j = m] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \rho_{jj}^{(m)} \\ &= \rho_{jj}^{(1)} + \rho_{jj}^{(2)} + \rho_{jj}^{(3)} + \ldots + \ldots = 1 + 0 + 0 + 0\ldots = 1 \end{aligned}$$

$* \rho_{jj}^{(1)} = P_{jj} = 1$

$* \rho_{jj}^{(2)} = \sum_{k \neq j} P_{jk}\ \rho_{kj}^{(1)} = 0$

$* \rho_{jj}^{(3)} = \sum_{k \neq j} P_{jk}\ \rho_{kj}^{(2)} = 0$

Número de Visitas que uma Cadeia de Markov faz a um Estado

Considere: $I_j(X_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } X_n = j \\ 0 & \text{se } X_n \neq j \end{cases}$ Isto é, $I_j(X_n)$ assumirá o valor 1 se no instante n, ela se encontra no estado j e zero caso contrário.

Seja N_j o nº total de vezes em que a cadeia visitará o estado j. Então: $N_j = \sum_{n=1}^{\infty} I_j(X_n)$

Resultado 1. Para que uma cadeia de Markov que inicia no estado i visite o estado j exatamente m vezes, é necessário que a cadeia faça uma visita ao estado j, retorne ao estado j (m-1) vezes e depois nunca mais retorna ao estado. A probabilidade de que isto ocorra será:

$$P_i[N_j = m] = \rho_{ij}\ \rho_{jj}^{m-1}(1-\rho_{jj})\ , \qquad m \geq 1$$

Prova: Inicialmente vejamos:

$* \ P_i[N_j = 0] = P_i[T_j = \infty]$
$= 1 - P_i[T_j < \infty]$
$= 1 - \rho_{ij}$

$* \ P_i[N_j \geq 1] = 1 - P_i[N_j = 0]$
$= 1 - 1 - \rho_{ij}$
$= P_i[T_j < \infty]$

$* \ P_i[N_j \geq 2] = P_i[T_j < \infty]\ P_j[T_j < \infty]$
$= \rho_{ij}\ \rho_{jj}$

$*$ Para m, têm-se: $P_i[N_j \geq m] = \rho_{ij}\ \rho_{jj}^{m-1}$

Então: $P_i[N_j = m] = P[N_j \geq m] - P[N_j \geq m+1]$
$= \rho_{ij}\ \rho_{jj}^{m-1}\ \rho_{ij}\ \rho_{jj}^{m}$

$$P_i[N_j = m] = \rho_{ij}\ \rho_{jj}^{m-1}(1-\rho_{jj})$$

Número Esperado de Visitas a um Estado J

G_{ij} é o nº esperado de visitas a um estado j quando a cadeia se inicia no estado i.

Resultado 2. $G_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n$

Prova: Inicialmente vejamos:

$$* \ N_j = \sum_{n=1}^{\infty} I_j(X_n)$$

$$\begin{aligned} * \ E_i[I_j(X_n)] &= 1P_i[I_j(X_n) = 1] \\ &= P(X_n = j / X_0 = i) \\ &= P_i(X_n = j) \\ &= P_{ij}^n \end{aligned}$$

Então:
$$\begin{aligned} G_{ij} &= E_i[N_j] \\ &= E_i\left[\sum_{n=1}^{\infty} I_j(X_n)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_i[I_j(X_n)] \end{aligned}$$
$$G_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n$$

Resultado 3. Se j é um estado transitório, então: $P_i[N_j < \infty] = 1$ e $\boxed{G_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{1-\rho_{jj}}}$, $\forall$ j.

Prova: Se j é um estado transitório $0 \leq \rho_{jj} < 1$

$$* \ P_i[N_j \geq m] = \rho_{ij}\ \rho_{jj}^{m-1}$$
$$\begin{aligned} * \ P_i[N_j = \infty] &= \lim_{m\to\infty} P_i[N_j \geq m] \\ &= \lim_{m\to\infty} \rho_{ij}\ \rho_{jj}^{m-1} = 0 \end{aligned}$$

Então:
$$\begin{aligned} P_i[N_j < \infty] &= 1 - P_i[N_j = \infty] \\ &= 1 - 0 \end{aligned}$$
$$P_i[N_j < \infty] = 1$$

Sabemos que $P_i[N_j = m] = \rho_{ij}\ \rho_{jj}^{m-1}(1-\rho_{jj})$

Então:
$$\begin{aligned} G_{ij} &= E_i[N_j] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m P_i[N_j = m] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m\,\rho_{ij}\ \rho_{jj}^{m-1}(1-\rho_{jj}) \\ &= \rho_{ij} \sum_{m=1}^{\infty} m\,(1-\rho_{jj})\rho_{jj}^{m-1} \end{aligned}$$

Lembrete:
Seja X : G(P)
$P(X = x) = P(1-P)^{x-1}$
x = 1, 2...

$$Ex = \sum_{x=1}^{\infty} xP(1-P)^{x-1}$$

$$X : G(P) \qquad Ex = \frac{1}{P}$$

Exemplo 20. Analise os estados das cadeias dadas abaixo e encontre os G_{11} e G_{22}.

$$a)\ \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Solução:

a)

$\rho_{00} = 1$ O estado "zero" é recorrente e absorvente.

$$\rho_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{11}^{(n)} = \rho_{11}^{(1)} + \rho_{11}^{(2)} + \rho_{11}^{(3)} + \ldots = \frac{1}{2} + 0 + 0 + \ldots = \frac{1}{2}$$ O estado "1" é transitório.

$$\rho_{22} = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{22}^{(n)} = \rho_{22}^{(1)} + \rho_{22}^{(2)} + \rho_{22}^{(3)} + \ldots = \frac{1}{2} + 0 + 0 + \ldots = \frac{1}{2}$$ O estado "2" é transitório.

$$G_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{1-\rho_{jj}} \Rightarrow G_{11} = \frac{\rho_{11}}{1-\rho_{11}} \Rightarrow G_{11} = \frac{1/2}{1-1/2} \Rightarrow G_{11} = 1$$

($G_{11} = 1 \rightarrow$ nº esperado de visitas que a cadeia estando em 1 visite o estado 1)

$$G_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{1-\rho_{jj}} \Rightarrow G_{22} = \frac{\rho_{22}}{1-\rho_{22}} \Rightarrow G_{22} = \frac{3/4}{1-3/4} \Rightarrow G_{22} = 3$$

($G_{22} = 3 \rightarrow$ nº esperado de visitas que a cadeia estando em 2 visite o estado 2)

b)

$\rho_{00} = 1$ O estado "zero" é recorrente e absorvente.

$$\rho_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{11}^{(n)} = \rho_{11}^{(1)} + \rho_{11}^{(2)} + \rho_{11}^{(3)} + \rho_{11}^{(4)} + \ldots + \rho_{11}^{(n)} = 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} \qquad \rho_{11} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1/4}{1-1/2} = \frac{1}{2}$$ O estado "1" é transitório.

$$\rho_{22} = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{22}^{(n)} = \rho_{22}^{(1)} + \rho_{22}^{(2)} + \rho_{22}^{(3)} + \ldots = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 + \ldots = \frac{3}{4}$$ O estado "2" é transitório.

$$G_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{1-\rho_{jj}} \Rightarrow G_{11} = \frac{\rho_{11}}{1-\rho_{11}} \Rightarrow G_{11} = \frac{1/2}{1-1/2} \Rightarrow G_{11} = 1$$

($G_{11} = 1 \rightarrow$ nº esperado de visitas que a cadeia estando em 1 visite o estado 1)

$$G_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{1-\rho_{jj}} \Rightarrow G_{22} = \frac{\rho_{22}}{1-\rho_{22}} \Rightarrow G_{22} = \frac{1/2}{1-1/2} \Rightarrow G_{22} = 1$$

($G_{22} = 1 \rightarrow$ nº esperado de visitas que a cadeia estando em 2 visite o estado 2)

Resultado 4.

Se j é um estado recorrente, então:

a) $P_j[N_j = \infty] = 1$, $G_{jj} = \infty$
b) $P_i[N_j = \infty] = P_i[T_j < \infty] = \rho_{ij} \quad i \in S$
c) Se $\rho_{ij} = 0$, então $G_{ij} = 0$
d) Se $\rho_{ij} > 0$, então $G_{ij} = +\infty$

Provas a e b:
Se j é um estado recorrente então $\rho_{jj} = 1$ e conseqüentemente,

$$P_i[N_j = \infty] = \lim_{m\to\infty} P_i[N_j \geq m]$$
$$= \lim_{m\to\infty} \rho_{ij}\, \rho_{jj}^{m-1}$$
$$= \rho_{ij} \lim_{m\to\infty} \rho_{jj}^{m-1}$$
$$= \rho_{ij}$$

Em particular se i = j, $P_i[N_j = \infty] = \rho_{jj} = 1$

<u>Obs</u>: Se uma variável aleatória pode assumir o valor infinito com probabilidade positiva, então sua esperança será infinita. $G_{jj} = E_j(N_j) \;\Rightarrow\; G_{jj} = \infty$

Prova c:
Se $\rho_{ij} = 0 \;\Rightarrow\; P_i[T_j < \infty] = 0$

Mas, $\rho_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \rho_{ij}^{(m)} = 0 \;\Rightarrow\; \rho_{ij}^{(m)} = 0$, $\forall$ m.

Mas, $P_{ij}^{n} = \sum_{m=1}^{n} \rho_{ij}^{(m)} \rho_{jj}^{n-m} = 0$, $\forall$ n.

$$G_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{n} = 0$$

Se $\rho_{ij} > 0$
$P_i[N_j = \infty] = \rho_{ij} > 0$
$G_{ij} = \infty$

Observação: Se j é um estado transitório, então: $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n} = 0$

Prova: $G_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{n} = \dfrac{\rho_{ij}}{1-\rho_{jj}} < \infty$ A série $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{n}$ converge, logo $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n} = 0$

Definição. Se j é um estado recorrente, então N_j representará o tempo esperado de retorno ao estado j.

$$\boxed{N_j = \sum_{n=1}^{\infty} n \rho_{jj}^{(n)}}$$

Observações Importantes:

Os resultados 3 e 4 descrevem a diferença fundamental entre um estado transitório e um recorrente.

Se o estado é transitório, não importa onde a cadeia começa, ela fará um número finito de visitas a ele e o número esperado de visitas será finito.

Suponha agora que um estado seja recorrente. Então se a cadeia de Markov começa nele, ela retornará a ele infinitas vezes. Se a cadeia começar em algum outro estado, pode ser que ela nunca a visite, mas se isto ocorrer, ela a visitará infinitas vezes.

Exemplo 21. Considere a matriz de transição de uma cadeia de Markov, dada abaixo, onde S = {0, 1, 2, 3}.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Calcule os ρ_{ij} e diga quais os estados recorrentes e transitórios.

b) Determine G_{00} , G_{11} , G_{22} e G_{33}.

c) Se o estado for recorrente, determine o tempo médio de retorno.

Solução:

a)

$\rho_{00} = \sum_{n=1}^{\infty}\rho_{00}^{(n)} = \rho_{00}^{(1)} + \rho_{00}^{(2)} + \ldots + \rho_{00}^{(n)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.1 + 0 + \ldots = 1$ O estado "zero" é recorrente.

$$\rho_{11} = \sum_{n=1}^{\infty}\rho_{11}^{(n)} = \rho_{11}^{(1)} + \rho_{11}^{(2)} + \rho_{11}^{(3)} + \rho_{11}^{(4)} + \ldots + \rho_{11}^{(n)} = 0 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$S = \frac{a_1}{1-q}$ $\quad \rho_{11} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ O estado "1" é recorrente.

$\rho_{22} = \sum_{n=1}^{\infty}\rho_{22}^{(n)} = \rho_{22}^{(1)} + \rho_{22}^{(2)} + \rho_{22}^{(3)} + \ldots = \frac{2}{3} + 0 + 0 + \ldots = \frac{2}{3}$ O estado "2" é transitório.

$\rho_{33} = \sum_{n=1}^{\infty}\rho_{33}^{(n)} = \rho_{33}^{(1)} + \rho_{33}^{(2)} + \rho_{33}^{(3)} + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$ O estado "3" é transitório.

$$\rho_{01} = \sum_{n=1}^{\infty}\rho_{01}^{(n)} = \rho_{01}^{(1)} + \rho_{01}^{(2)} + \rho_{01}^{(3)} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

$\rho_{02} = 0$ $\quad \rho_{03} = 0$ $\quad \rho_{10} = 1$ $\quad \rho_{12} = 0$ $\quad \rho_{21} = 1$ $\quad \rho_{23} = 0$ $\quad \rho_{30} = \frac{1}{2}$ $\quad \rho_{32} = \frac{1}{2}$

b)

$G_{00} = G_{11} = \infty$; quando o estado é recorrente, ele vai fazer infinitas visitas.

$$G_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{1-\rho_{jj}} \Rightarrow G_{22} = \frac{\rho_{22}}{1-\rho_{22}} \Rightarrow G_{22} = \frac{2/3}{1-2/3} \Rightarrow G_{22} = 2$$

($G_{22} = 2 \rightarrow$ nº esperado de visitas que a cadeia estando em 2 visite o estado 2)

$$G_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{1-\rho_{jj}} \Rightarrow G_{33} = \frac{\rho_{33}}{1-\rho_{33}} \Rightarrow G_{33} = \frac{0}{1-0} \Rightarrow G_{33} = 0$$

($G_{33} = 0 \rightarrow$ nº esperado de visitas que a cadeia estando em 3 visite o estado 3)

c)

$$N_j = \sum_{n=1}^{\infty}n\rho_{jj}^{(n)} \Rightarrow N_0 = \sum_{n=1}^{\infty}n\rho_{00}^{(n)} = 1\rho_{00}^{(1)} + 2\rho_{00}^{(2)} + 3\rho_{00}^{(3)} + \ldots = 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2} + 3.0 + \ldots = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$N_j = \sum_{n=1}^{\infty}n\rho_{jj}^{(n)} \Rightarrow N_1 = \sum_{n=1}^{\infty}n\rho_{11}^{(n)} = 1\rho_{11}^{(1)} + 2\rho_{11}^{(2)} + 3\rho_{11}^{(3)} + \ldots = 1.0 + 2.\frac{1}{2} + 3.\frac{1}{2^2} + 4.\frac{1}{2^3} + \ldots$$

$$= 2\left(2.\frac{1}{2^2} + 3.\frac{1}{2^3} + 4.\frac{1}{2^4} + \ldots\right) \quad = 2\left[-\frac{1}{2} + \left(1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2^2} + 3.\frac{1}{2^3} + \ldots\right)\right] \quad = 2\left(-\frac{1}{2} + 2\right) = 3$$

$Ex = \frac{1}{p}$ $\quad X{:}G(1/2)$ $\quad Ex = \frac{1}{1/2} = 2$

Exemplo 22. Seja S = {0, 1, 2, ...} onde

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & \cdots \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

Determine ρ_{00} e ρ_{11}.

OBS: É muito complicado achar todos os ρ_{jj}, por isso, é necessário o estudo de vários resultados, vejamos as dificuldades.

Solução:

$$\rho_{00} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots = 1$$

Os estados "0 e 1" são recorrentes.

$$\rho_{11} = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = 1$$

Observação Importante:

Uma cadeia de Markov é chamada de Transitória se todos os estados forem transitórios. E será Recorrente se todos os estados forem Recorrentes.

Se uma cadeia de Markov tiver um espaço finito de estados então, pelo menos um deles é recorrente, portanto a cadeia não poderá ser transitória.

Prova: Suponha que S seja um espaço de estados finito onde todos os estados da cadeia são transitórios. Seja j um estado transitório então $G_{ij} < \infty \;\; \forall\, i \in S$.

Mas $G_{ij} = \sum_n P_{ij}^n < \infty \;\; \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = 0 \;\; \forall\, j$, pois a série é convergente.

Como todo estado é transitório tem-se: $0 = \sum_{j\in S} \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in S} P_{ij}^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$,

absurdo, logo pelo menos um estado deve ser recorrente.

DECOMPOSIÇÃO DE ESPAÇO DE ESTADOS

Definição. Sejam i e j dois estados não necessariamente distintos. Diz-se que o estado i conduz ao estado j se $\rho_{ij} > 0$.

Notação: $i \to j$ i conduz a j

$i \not\to j$ i não conduz a j

Teorema 1. Um estado i conduz a um estado j se, e somente se $P_{ij}^n > 0$ para algum inteiro positivo n.

Prova:

Se $i \to j \Rightarrow \rho_{ij} > 0$

Mas $\rho_{ij} = P_i\,[T_j < \infty] = \sum_{m=1}^{\infty} \rho_{ij}^{(m)} > 0 \qquad \Rightarrow \exists\, m_0 \in N$ tal que $\rho_{ij}^{(m)} > 0$

Hipótese: Suponha agora que $P_{ij}^n > 0$ para algum n.

Tese: $i \to j$

Se $\rho_{ij}^n > 0$ para algum n, digamos n_0, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{ij}^n \geq \rho_{ij}^{n_0} > 0 \Rightarrow G_{ij} > 0 \Rightarrow G_{ij} = E_i[N_j] > 0 \Rightarrow P_i[N_j \geq 1] > 0 \Rightarrow P_i[T_j < \infty] > 0 \Rightarrow \rho_{ij} > 0 \Rightarrow i \to j$$

Parêntesis

E $G_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} P_i[N_j \geq m] > 0 \quad \Rightarrow$ existe pelo menos um m_0 tal que $P_i\,[N_j \geq m_0] > 0$

$\Rightarrow p_i\,[N_j \geq 1] \geq p_i\,[N_j \geq m_0] > 0 \Rightarrow \rho_{ij} > 0.$

Teorema 2. Se $i \rightarrow j$ e $j \rightarrow k$, então $i \rightarrow k$

Prova: $P_{ik}^{n_0+m_0} = \sum_{l} P_{il}^{n_0} P_{lk}^{m_0} \geq P_{ij}^{n_0} P_{jk}^{m_0} > 0$

Se $i \rightarrow j \quad \Rightarrow \exists\, n_0$ tal que $P_{ij}^{n_0} > 0$

Se $j \rightarrow k \quad \Rightarrow \exists\, m_0$ tal que $P_{jk}^{m_0} > 0$

Logo existirá $n' = n_0 + m_0$ tal que $P_{ik}^{n'} > 0$, então $i \rightarrow k$

Exemplo 23. Considere a matriz de transição $P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Solução:

$0 \rightarrow 0$	$1 \rightarrow 0$	$1 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow 3$	$1 \rightarrow 3$	$2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$
$1 \rightarrow 1$	$2 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow 0$	$0 \not\rightarrow i,\ i \neq 0$		$3 \rightarrow 1 \rightarrow 0$
$1 \leftrightarrow 2$	$1 \leftrightarrow 3$	$2 \leftrightarrow 3$	$0 \not\leftrightarrow j,\ j \neq 0$		

Exemplo 24. Considere a matriz de transição $P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Solução: $0 \rightarrow 1 \quad 0 \rightarrow 2 \quad 1 \rightarrow 0 \quad 1 \rightarrow 2 \quad 2 \rightarrow 1 \quad 0 \leftrightarrow 1 \quad 0 \leftrightarrow 2 \quad 1 \leftrightarrow 2$

Comunicação de Estados

Definição. Um estado i se comunica com um j se i conduz a j e j conduz a i.
Notação: $i \leftrightarrow j$ i se comunica com j
$i \not\leftrightarrow j$ i não se comunica com j

Teorema 3. Se i, j e k são três estados de uma cadeia de Markov, então:

a) Se $i \leftrightarrow j$ então $j \leftrightarrow i$
b) Se $i \leftrightarrow k$ e $k \leftrightarrow j$ então $i \leftrightarrow j$

Prova: $p_{ii}^{0} = P(X_0 = i \mid X_0 = i) = 1$
$i \rightarrow k,\ k \rightarrow j \ \Rightarrow i \rightarrow j$
$j \rightarrow k,\ k \rightarrow i \ \Rightarrow j \rightarrow i$
$i \leftrightarrow j$

Corolário

Se o estado i é recorrente e comunica-se com o estado j, então j é recorrente.

Prova:

Se i comunica-se com j então existem $l \geq 1$ e $m \geq 1$, tais que $P_{ij}^{l} > 0$ e $P_{ji}^{m} > 0$. Para qualquer n, $n \geq 1$:

$$P_{jj}^{m+n+l} \geq P_{ji}^{m} P_{ii}^{n} P_{ij}^{l} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{m+n+l} \geq \sum_{n=1}^{\infty} P_{ji}^{m} P_{ii}^{n} P_{ij}^{l} = P_{ji}^{m} P_{ij}^{l} \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{m+n+l} = \infty; \text{ j é recorrente.}$$

OBS: $\rho_{ij} = \rho_{ji} = 1$

Da mesma forma pode-se dizer que, se i comunica-se com j e i é um estado transitório, então j é um estado transitório. Os estados que se comunicam formam uma mesma classe.

CLASSES FECHADAS

Definição. Um subconjunto $C \subset S$ de estados se diz fechado, se nenhum estado dentro de C conduz a qualquer estado fora de C, isto é, se:

$$\rho_{ij} = 0 \text{ para } i \in C \text{ e } j \notin C.$$

Resultado. O conjunto $C \subset S$ é fechado se, e somente se, $P_{ij}^{n} = 0$, $i \in C$, $j \notin C$ e $n \geq 1$.

Prova:
Suponha que C é um conjunto fechado de estados.
Então $\rho_{ij} = 0$, $i \in C$ e $j \notin C$

$$\Rightarrow P_i[T_j < \infty] = 0,\ i \in C,\ j \notin C \quad \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \rho_{ij}^{(m)} = 0,\ i \in C \text{ e } j \notin C \quad \Rightarrow \rho_{ij}^{(m)} = 0\ \forall\ m \geq 1$$

$$\Rightarrow P_{ij}^{n} = \sum_{m=1}^{n} \rho_{ij}^{(m)} P_{jj}^{n-m} = 0 \quad \forall\ n \geq m,\ n \geq 1\ i \in C \text{ e } j \notin C$$

$$\Rightarrow P_{ij}^{n} = 0\ \forall\ n \geq 1,\ i \in C \text{ e } j \notin C$$

Hipótese: $P_{ij}^{n} = 0\ \forall\ n \geq 1,\ i \in C \text{ e } j \notin C$

Se $P_{ij}^{n} = 0\ \forall\ n$ $\Rightarrow i \not\to j,\ i \in C \text{ e } j \notin C$
$\Rightarrow \rho_{ij} = 0,\ i \in C \text{ e } j \notin C$
$\Rightarrow$ O conjunto $C \subset S$ é uma classe fechada.

Um conjunto fechado $C \subset S$ de estados de uma cadeia de Markov é chamado **IRREDUTÍVEL se todos os estados de uma classe se comunicam**. Isto é, se $i \leftrightarrow j\ \forall\ i \in C,\ j \in C$. Tem-se então do corolário, visto anteriormente. Se C é um conjunto fechado irredutível então, ou todo estado em C é recorrente, ou todo estado em C é transitório.

Teorema: Seja C um conjunto finito de estados fechado irredutível. Então cada estado em C é recorrente.

Prova: Como $C \subset S$ é finito, então C tem pelo menos um estado recorrente. Como $C \subset S$ é fechado e irredutível, então todos estados de C são do mesmo tipo e conseqüentemente todos são recorrentes.

Exemplo 25. Considere as cadeias de Markov cujas matrizes de transições são dadas abaixo. Analise-as.

$$a)\ P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$b)\ P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solução:

a)
$0 \leftrightarrow 0$; zero é um estado absorvente e recorrente.
$1 \to 2 \to 0$
$1 \to 2 \to 2$
$1 \to 1$
{0} classe fechada irredutível
{1}, {2} são estados transitórios

b)
$0 \leftrightarrow 0$; zero é um estado absorvente e recorrente
$3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5$ $\quad 3 \leftrightarrow 4$ $\quad 3 \leftrightarrow 5$ $\quad 1 \leftrightarrow 2$
{0} classe fechada irredutível
{3,4,5} classe fechada irredutível, estados recorrentes
{1,2} classe transitória

Probabilidade de Absorção

Definição. Seja C um conjunto fechado irredutível de estados recorrentes. Defina a probabilidade de absorção pelo conjunto C para uma cadeia de Markov que inicia no estado i por: $\rho_C^{(i)} = P_i[T_C < \infty]$

Observações:

① Como C é uma classe fechada, então a cadeia ficará para sempre em C, uma vez que venha a ser absorvida por C, isto é:

$\rho_C^{(i)} = 1$ se $i \in C$ e $\rho_C^{(i)} = 0$ se i for recorrente e $i \notin C$

② Para as cadeias finitas, é sempre possível calcular $\rho_C^{(i)}$ para $i \in S_T$, onde S_T é um conjunto finito de estados transitórios, resolvendo o seguinte sistema de equações lineares: $\rho_C^{(i)} = \sum_{j \in C} P_{ij} + \sum_{j \in S_T} P_{ij}\rho_C^{(j)}$

③ A equação (1) tem solução única e $\sum_i \rho_{C_i}^{(j)} = 1$, $j \in S_T$

Exemplo 26. Considere a matriz de transição abaixo. Analise-a e encontre os ρ_{ij}.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solução:
{0} classe fechada irredutível recorrente
{1,2} classe transitória
{3,4,5} classe fechada irredutível, estados recorrentes;

$$\boxed{\rho_C^{(i)} = \sum_{j \in C} P_{ij} + \sum_{j \in S_T} P_{ij}\rho_C^{(j)}}$$

$$\rho_0^{(1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\rho_0^{(1)} + \frac{1}{4}\rho_0^{(2)}$$

$$\rho_0^{(2)} = \frac{1}{5}\rho_0^{(1)} + \frac{2}{5}\rho_0^{(2)} \quad \Rightarrow \left(1 - \frac{2}{5}\right)\rho_0^{(2)} = \frac{1}{5}\rho_0^{(1)} \quad \Rightarrow \frac{3}{5}\rho_0^{(2)} = \frac{1}{5}\rho_0^{(1)} \quad \Rightarrow \rho_0^{(1)} = 3\rho_0^{(2)}$$

$$\rho_0^{(1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\rho_0^{(1)} + \frac{1}{4}\rho_0^{(2)} \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\rho_0^{(1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\rho_0^{(2)} \; (\times 4) \quad \Rightarrow 2\rho_0^{(1)} = 1 + \rho_0^{(2)}$$

$$\Rightarrow 2(3\rho_0^{(2)}) = 1 + \rho_0^{(2)} \quad \Rightarrow 6\rho_0^{(2)} - \rho_0^{(2)} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{\rho_0^{(2)} = \frac{1}{5}}$$

$$\rho_0^{(1)} = 3\rho_0^{(2)} \quad \Rightarrow \rho_0^{(1)} = 3.\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \boxed{\rho_0^{(1)} = \frac{3}{5}}$$

$$\rho_0^{(1)} = \boxed{\rho_{10} = \frac{3}{5}} \qquad \rho_0^{(2)} = \boxed{\rho_{20} = \frac{1}{5}} \qquad \boxed{\rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{15} = \frac{2}{5}} \qquad \boxed{\rho_{23} = \rho_{24} = \rho_{25} = \frac{4}{5}}$$

$$\rho_C^{(1)} = 1 - \rho_0^{(1)} \quad \Rightarrow \rho_C^{(1)} = 1 - \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \boxed{\rho_C^{(1)} = \frac{2}{5}} \qquad \rho_C^{(2)} = 1 - \rho_0^{(2)} \quad \Rightarrow \rho_C^{(2)} = 1 - \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \boxed{\rho_C^{(2)} = \frac{4}{5}}$$

Estudo da Ruína do Jogador

INICIALMENTE, SUPONHA QUE P ≠ Q

$$s_j = \frac{q_1.q_2 \ldots q_j}{p_1.p_2 \ldots p_j} = \frac{q\,.\,q \ldots q}{p\,.\,p \ldots p} = \left(\frac{q}{p}\right)^j$$

$P_i[T_0 < T_N]$ é a probabilidade de ruína do jogador quando ele inicia com o capital i. Agora, determinar-se-á a probabilidade de que o jogador perca o jogo.

$$S_1 = \sum_{j=1}^{N-1}\left(\frac{q}{p}\right)^j = \left(\frac{q}{p}\right)^i + \left(\frac{q}{p}\right)^{i+1} + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} \Rightarrow \frac{q}{p}S_1 = \left(\frac{q}{p}\right)^{1+1} + \left(\frac{q}{p}\right)^{1+2} + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} + \left(\frac{q}{p}\right)^{N}$$

$$S_1 - \frac{q}{p}S_1 = \left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^N \Rightarrow \quad S_1 = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\frac{q}{p}} \qquad \text{Logo para } i = 0\text{: } S_2 = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\frac{q}{p}}$$

$$P_i[T_0 < T_N] = \frac{\sum_{j=1}^{N-1}\left(\frac{q}{p}\right)^j}{\sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{q}{p}\right)^j} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \qquad \boxed{P_i[T_0 < T_N] = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}}$$

Se N → ∞, isto é, se o **Adversário** for muito rico, tem-se:

$$\lim P_i[T_0 < T_N] = \lim \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \boxed{= 1;\, p < q}, \quad \boxed{= \left(\frac{q}{p}\right)^i;\, p > q}$$

Supondo que o **Jogador** é muito rico, tem-se:

$$\lim P_i[T_0 < T_N] = \lim \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left[\left(\frac{q}{p}\right)^i\left(\frac{q}{p}\right)^l\right]}{1-\left[\left(\frac{q}{p}\right)^i\left(\frac{q}{p}\right)^l\right]} = \lim \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)^l \ln\frac{q}{p}\right]}{1-\left[\left(\frac{q}{p}\right)^i\left(\frac{q}{p}\right)^l \ln\frac{q}{p}\right]} \boxed{= 1-\left(\frac{q}{p}\right)^l;\, p < q}, \quad \boxed{= 0;\, p > q}$$

Se **Ambos** forem muito ricos, ter-se-á:

$$\lim P_i[T_0 < T_N] = \lim \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^{2i}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{2i}} = \lim \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i \ln\frac{q}{p}\left[1-2\left(\frac{q}{p}\right)^{2i}\right]}{-2\left(\frac{q}{p}\right)^{2i}\ln\frac{q}{p}} \boxed{= 1;\, p < q}, \quad \boxed{= 0;\, p > q}$$

SUPONHA AGORA QUE P = Q

$$P_i[T_0 < T_N] = \frac{\sum_{j=1}^{N-1} S_j}{\sum_{j=0}^{N-1} S_j} = \frac{\sum_{j=1}^{N-1} 1}{\sum_{j=0}^{N-1} 1} = \frac{N-1-i+1}{N-1+1} = \frac{N-i}{N}$$

$$\boxed{P_i[T_0 < T_N] = \frac{N-i}{N}}$$

Se o **Adversário** for muito rico, tem-se:

$$\lim_{N\to\infty} P_i[T_0 < T_N] = \lim_{N\to\infty} \frac{N-i}{N} = 1$$

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} P_i[T_0 < T_N] = 1}$$

Supondo que o **Jogador** é muito rico, tem-se:

$$\lim_{i\to\infty} P_i[T_0 < T_N] = \lim_{i\to\infty} \frac{i+l-i}{i+l} = 0$$

$$\boxed{\lim_{i\to\infty} P_i[T_0 < T_N] = 0}$$

Se **Ambos** forem muito ricos, ter-se-á:

$$\lim_{i\to\infty} P_i[T_0 < T_N] = \lim_{i\to\infty}\left(1 - \frac{i}{2i}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{i\to\infty} P_i[T_0 < T_N] = \frac{1}{2}}$$