UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
DISCIPLINA: EST0035 – PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

3ª ETAPA

PROFESSOR:
FERNANDO CÉSAR DE MIRANDA

NATAL/RN

CADEIA DE NASCIMENTO E MORTE

Considere uma cadeia de Nascimento e Morte com espaço de estados:
$S = \{0, 1, 2, ..., d\}$ ou $\{0, 1, 2, ..., d, d+1, ...\}$. Sua função de transição é:

$$P_{ij} = \begin{cases} q_i, & j = i-1, \quad i \geq 1 \\ r_i, & j = i, \quad i \geq 0 \\ p_i, & j = i+1, \quad i \geq 0 \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Se a cadeia for finita: $P_d = 0$; $p_i + q_i + r_i = 1$.

Teorema 01. Para dois estados, $a \in S$ e $b \in S$, $a < b$, a probabilidade de que uma Cadeia de Nascimento e Morte, que se inicia no estado i, $a < i < b$, visite primeiro o estado *a* antes de visitar o estado *b* é dada por:

$$P_i[T_a < T_b] = \frac{\sum_{j=i}^{b-1} s_j}{\sum_{j=a}^{b-1} s_j}, \quad \text{onde:} \quad s_j = \begin{cases} 1, & \text{se } j = 0 \\ \dfrac{q_1 q_2 \ldots q_j}{p_1 p_2 \ldots p_j} & 1 \leq j < d \end{cases}$$

Prova: Faça-se: $\mu(i) = P_i[T_a < T_b]$ **(1.1)**

Se a CNM inicia no estado j, em uma etapa, ela vai ou para o estado j - 1, ou para j, ou j + 1 com probabilidades respectivamente q_j, r_j e p_j. Então:

$P_j[T_a < T_b] = p_{j,j-1} P_{j-1}[T_a < T_b] + p_{jj} P_j[T_a < T_b] + p_{j,j+1} P_{j+1}[T_a < T_b]$ **(1.2)**

Usando (1.1) em (1.2) e as probabilidades: $\mu(j) = q_j\mu(j-1) + r_j\mu(j) + p_j\mu(j+1)$ **(1.3)**

Sabe-se que $p_j + r_j + q_j = 1$, então $r_j = 1 - p_j - q_j$ **(1.4)**

Usando (1.4) em (1.3):

$$\mu(j) = q_j\mu(j-1) + (1 - p_j - q_j)\mu(j) + p_j\mu(j+1)$$
$$= q_j\mu(j-1) + \mu(j) - p_j\mu(j) - q_j\mu(j) + p_j\mu(j+1)$$
$$p_j[\mu(j+1) - \mu(j)] - q_j[\mu(j) - \mu(j-1)] = 0$$
$$p_j[\mu(j+1) - \mu(j)] = q_j[\mu(j) - \mu(j-1)]$$
$$\mu(j+1) - \mu(j) = \frac{q_j}{p_j}[\mu(j) - \mu(j-1)]$$
$$\mu(j+1) - \mu(j) = \frac{(q_1q_2\ldots q_{j-1})(p_1p_2\ldots p_{j-1})}{(p_1p_2\ldots p_j)(q_1q_2\ldots q_{j-1})}[\mu(j) - \mu(j-1)]$$
$$\mu(j+1) - \mu(j) = \frac{s_j}{s_{j-1}}[\mu(j) - \mu(j-1)], \quad a < j < b$$
$$\mu(j+1) - \mu(j) = \frac{s_j\ s_{j-1}}{s_{j-1}\ s_{j-2}}[\mu(j-1) - \mu(j-2)]$$
$$\mu(j+1) - \mu(j) = \frac{s_j\ s_{j-1}\ldots s_{a+1}}{s_{j-1}\ s_{j-2}\ldots s_a}[\mu(a+1) - \mu(a)]$$
$$\mu(j+1) - \mu(j) = \frac{s_j}{s_a}[\mu(a+1) - \mu(a)]$$

Multiplicando os lados por (-1): $\mu(j) - \mu(j+1) = \frac{s_j}{s_a}[\mu(a) - \mu(a+1)]$, $a < j < b$ **(1.5)**

Somando (1.5) de a até b-1: $\sum_{j=a}^{b-1}[\mu(j) - \mu(j+1)] = \frac{[\mu(a) - \mu(a+1)]}{s_a}\sum_{j=a}^{b-1} s_j$ **(1.6)**

Mas, $\mu(b) = P_b[T_a < T_b] = 0$ $\quad \mu(a) = P_a[T_a < T_b] = 1$

Voltando em (1.6): $\dfrac{[\mu(a)-\mu(a+1)]}{s_a}\sum_{j=a}^{b-1} s_j = 1 \quad \Rightarrow \dfrac{[\mu(a)-\mu(a+1)]}{s_a} = \dfrac{1}{\sum_{j=a}^{b-1} s_j}$ **(1.7)**

Usando (1.7) em (1.5): $\sum_{j=i}^{b-1}[\mu(j)-\mu(j+1)] = \dfrac{\sum_{j=i}^{b-1} s_j}{\sum_{j=a}^{b-1} s_j}$, $a < j < b$

$$\mu(i)-\mu(b) = \frac{\sum_{j=i}^{b-1} s_j}{\sum_{j=a}^{b-1} s_j} \qquad \mu(j)-\mu(j+1) = \frac{s_j}{\sum_{j=a}^{b-1} s_j},\quad a < j < b$$

Somando de i até b-1: $\mu(i) = \dfrac{\sum_{j=i}^{b-1} s_j}{\sum_{j=a}^{b-1} s_j}$ Isto é, $P_i[T_a < T_b] = \dfrac{\sum_{j=i}^{b-1} s_j}{\sum_{j=a}^{b-1} s_j}$, $a < b$

Teorema 02. Uma cadeia de Nascimento e morte irredutível com espaço de estados S = {0, 1, 2, ...} é recorrente se, e somente se:

$\sum_{j=1}^{\infty} s_j = \infty$, onde $s_j = \dfrac{q_1 q_2 \ldots q_{j-1}}{p_1 p_2 \ldots p_j}$, $j \geq 1$ e $s_0 = 1$.

Prova: Inicialmente, quando $n \to \infty \Rightarrow T_n \to \infty$. Vemos que $P_i(T_a < T_b) = \dfrac{\sum_{j=i}^{b-1} s_j}{\sum_{j=a}^{b-1} s_j}$

Se a cadeia se inicia no estado 1, então $P_1(T_0 < T_n) = \dfrac{\sum_{j=1}^{n-1} s_j}{\sum_{j=0}^{n-1} s_j} = \dfrac{\sum_{j=0}^{n-1} s_j - s_0}{\sum_{j=0}^{n-1} s_j} = 1 - \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} s_j}$

Portanto, $P_1(T_0 < T_n) = 1 - \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} s_j}$

$$P_1(T_0 < T_n) = \lim_{n\to\infty} P_1(T_0 < T_n) = \lim_{n\to\infty} P_1\left(1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} s_j}\right) = 1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} s_j} \Rightarrow \boxed{P_1(T_0 < T_n) = 1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} s_j}}$$

Hipótese: A cadeia de Nascimento e Morte - CNM é recorrente.

Tese: $\sum_{j=0}^{\infty} s_j = \infty$

Prova: $P_1(T_0 < T_\infty) = 1 \quad \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} s_j} = 1 \quad \Rightarrow \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} s_j} = 0 \quad \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} s_j = \infty$

Hipótese: $\sum_{j=0}^{\infty} s_j = \infty$

Tese: a cadeia é recorrente

Prova: $\rho_{00} = P_0(T_0 < T_\infty) = P_{00} + P_{01}P_1(T_0 < \infty)$ **(1.8)**

Mas, $P_1(T_0 < \infty) = 1 - \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} s_j} = 1 - 0 = 1$

Então,
$$\begin{aligned}\rho_{00} &= P_{00} + P_{01}P_1(T_0 < \infty)\\ &= P_{00} + P_{01}.1\\ &= P_{00} + P_{01}\end{aligned}$$

$\rho_{00} = 1$, logo o estado zero é recorrente. Como a cadeia é irredutível, todos estados se comunicam, então todos eles são recorrentes e portanto a cadeia é recorrente.

Distribuição Estacionária

Definição. Seja $\{X_n, n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov tendo espaço de estados S e matriz de transição P. Se para cada $i \in S$, $\pi(i)$ são números reais não-negativos, $\sum_{i \in S} \pi(i) = 1$ e se $\sum_{i} \pi(i)\, P_{ij} = \pi(j) \quad \forall\ j \in S$, então π é denominada uma distribuição estacionária para a cadeia de Markov.

Na forma matricial $\boxed{\pi P = \pi}$

Propriedade 01.

Se π é uma distribuição estacionária, então $\sum_{i} \pi(i)\, P_{ij}^{n} = \pi(j)$

Prova: Faremos a prova por indução. Para n= 2:

$$\begin{aligned}\sum_i \pi(i)P_{ij}^2 &= \sum_i \pi(i)\sum_k P_{ik}P_{kj}\\ &= \sum_i \sum_k \pi(i)P_{ik}P_{kj}\\ &= \sum_k \left(\sum_i \pi(i)P_{ik}\right)P_{kj}\\ &= \sum_k \pi(k)P_{kj}\end{aligned}$$

$$\sum_i \pi(i)P_{ij}^2 = \pi(j)$$

Suponha que a relação seja válida para n = m, isto é $\sum_i \pi(i)P_{ij}^m = \pi(j)$.

Então:

$$\begin{aligned}\sum_i \pi(i)P_{ij}^{m+1} &= \sum_i \pi(i)\sum_k P_{ik}^m P_{kj}\\ &= \sum_i \sum_k \pi(i)P_{ik}^m P_{kj}\\ &= \sum_k \left(\sum_i \pi(i)P_{ik}^m\right)P_{kj}\end{aligned}$$

$\sum_i \pi(i)P_{ij}^{m+1} = \pi(j)$. Portanto, a fórmula é válida para qualquer n > 0.

Propriedade 02.

Seja π uma distribuição estacionária para uma cadeia de Markov e, suponha que $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ exista e $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi(j)$, $\forall$ j $\in$ S. Se π_0 é a distribuição inicial da cadeia, então $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi(j)$, $\forall$ j $\in$ S.

Prova:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_i \pi_0(i)P_{ij}^n\right) = \sum_i \pi_0(i)\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \sum_i \pi_0(i)\pi(j) = \pi(j)\sum_i \pi_0(i) = \pi(j).1$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi(j)$$

Propriedade 03.

Se uma cadeia de Markov tem um número **finito** de estados e é **irredutível** então ela tem uma **Única Distribuição Estacionária**.

Exemplo 27. Considere uma cadeia de Markov tendo um conjunto de estados S = {0, 1, 2, ...} e a matriz de transição dada abaixo:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 2/4 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pode-se achar uma única distribuição estacionária? Se sim, ache-a.

Solução: $0 \to 1 \to 2 \to 0$

A cadeia é finita e é irredutível, então ela tem uma única distribuição estacionária.

$$\boxed{\pi P = \pi} \qquad [\pi(0),\ \pi(1),\ \pi(2)] \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 2/4 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array} = [\pi(0),\ \pi(1),\ \pi(2)]$$

$$\frac{1}{3}\pi(0) + \frac{1}{4}\pi(1) + \frac{1}{6}\pi(2) = \pi(0) \ \Rightarrow\ -\frac{2}{3}\pi(0) + \frac{1}{4}\pi(1) + \frac{1}{6}\pi(2) = 0$$

$$\frac{1}{3}\pi(0) + \frac{1}{2}\pi(1) + \frac{1}{3}\pi(2) = \pi(1) \ \Rightarrow\ \frac{1}{3}\pi(0) - \frac{1}{2}\pi(1) + \frac{1}{3}\pi(2) = 0$$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} -2/3 & 1/4 & 1/6 & -2/3 & 1/4 \\ 1/3 & -1/2 & 1/3 & 1/3 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} - \frac{1}{12} + \frac{2}{9} + \frac{1}{12} = \frac{25}{36}$$

$$D_0 = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1/4 & 1/6 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1/2 & 1/3 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{6}{36} \qquad \pi(0) = \frac{D_0}{D} = \frac{6/36}{25/36} = \frac{6}{25} \quad \boxed{\pi(0) = \frac{6}{25}}$$

$$D_1 = \left|\begin{array}{ccc|cc} -2/3 & 0 & 1/6 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \frac{1}{18} + \frac{2}{9} = \frac{5}{18} = \frac{10}{36} \qquad \pi(1) = \frac{D_1}{D} = \frac{10/36}{25/36} = \frac{10}{25} \quad \boxed{\pi(1) = \frac{10}{25}}$$

$$\pi(0) + \pi(1) + \pi(2) = 1 \quad \Rightarrow \pi(2) = 1 - \pi(0) - \pi(1) \quad \Rightarrow \pi(2) = 1 - \frac{6}{25} - \frac{10}{25} \quad \Rightarrow \boxed{\pi(2) = \frac{9}{25}}$$

Distribuição Estacionária: $\boxed{\pi = \left(\frac{6}{25}, \frac{10}{25}, \frac{9}{25}\right)}$

Exemplo 28. Considere a cadeia de Ehrenfest, e suponha que d = 3. Ache a distribuição estacionária.

Solução:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1 \to 0$

A cadeia é finita e é irredutível, então ela tem uma única distribuição estacionária.

$\boxed{\pi P = \pi}$ $$[\pi(0), \pi(1), \pi(2), \pi(3)] \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = [\pi(0), \pi(1), \pi(2), \pi(3)]$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi(1) = \pi(0) \\ \pi(0) + \frac{2}{3}\pi(2) = \pi(1) \\ \frac{1}{3}\pi(2) = \pi(3) \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}\pi(1) = \pi(0)$$
$$\pi(1) = 3\pi(0)$$

$$\pi(0) + \frac{2}{3}\pi(2) = \pi(1) \;\; (x3)$$
$$3\pi(0) + 2\pi(2) = 3\pi(1)$$
$$3\pi(0) + 2\pi(2) = 9\pi(0)$$
$$6\pi(0) = 2\pi(2)$$
$$\pi(2) = 3\pi(0)$$

$$\frac{1}{3}\pi(2) = \pi(3)$$
$$\pi(2) = 3\pi(3)$$
$$3\pi(0) = 3\pi(3)$$
$$\pi(3) = \pi(0)$$

$$\pi(0) + \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1 \;\Rightarrow\; \pi(0) + 3\pi(0) + 3\pi(0) + \pi(0) = 1 \;\Rightarrow\; 8\pi(0) = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{\pi(0) = \frac{1}{8}}$$

$$\pi(1) = 3\pi(0) \Rightarrow \boxed{\pi(1) = \frac{3}{8}} \qquad \pi(2) = 3\pi(0) \Rightarrow \boxed{\pi(2) = \frac{3}{8}} \qquad \pi(3) = \pi(0) \Rightarrow \boxed{\pi(3) = \frac{1}{8}}$$

Distribuição Estacionária: $\boxed{\pi = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)}$

Estado Periódico

Definição. O estado i diz-se ter período d(i) se $P_{ii}^{n} = 0$ quando n não for divisível por d(i) e d(i) é o menor inteiro com esta propriedade.

$$d(i) = \text{mdc}\,\{n; P_{ii}^{n} = 0\}$$

Por exemplo, começando em i é possível que a cadeia entre em i apenas nas etapas: 2, 4, 6, 8, ... Neste caso d(i) = 2.

Exemplo 29. Dada as matrizes de transições abaixo, encontre o período de cada estado.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solução:

$$0 \begin{array}{l} \to 2 \to 1 \to 0 \\ \to 3 \to 1 \to 0 \end{array}$$
$\boxed{d(0) = 3}$

$$1 \to 0 \begin{array}{l} \to 2 \to 1 \\ \to 3 \to 1 \end{array}$$
$\boxed{d(1) = 3}$

$$2 \to 1 \to 0 \begin{array}{l} \to 2 \\ \to 3 \to 1 \to 0 \begin{array}{l} \to 2 \\ \to 3 \end{array} \end{array}$$
d(2) = mdc {3, 6, 9, 12...}

$\boxed{d(2) = 3}$

$$3 \to 1 \to 0 \begin{array}{l} \to 2 \to 1 \to 0 \begin{array}{l} \to 2 \\ \to 3 \end{array} \\ \to 3 \end{array}$$
d(3) =mdc {3, 6, ...}

$\boxed{d(3) = 3}$

ESTADO APERIÓDICO

Definição. Um estado é dito ser aperiódico se o seu **período for igual a 1**. Uma cadeia será aperiódica se todos os estados forem aperiódicos.

Exemplo 30. Dada as matrizes de transições abaixo, encontre o período de cada estado.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solução: $\boxed{d(0) = 1}$ $\boxed{d(1) = 1}$ $\boxed{d(2) = 1}$

$d(0) = d(1) = d(2) = 1$

$d(i) = 1;\ i = 0, 1, 2.$

Os estados são aperiódicos, portanto a cadeia é aperiódica.
Macete: Quando algum elemento da diagonal principal for diferente de zero, então os períodos são igual a 1.

Propriedade. Se o estado i tem período d(i) e se comunica com j então d(i) = d(j).

Exemplo 31. Dada as matrizes de transições abaixo, encontre o período de cada estado.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solução:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & 1 & \to & 2 & \to & 1 & \to & 2 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 3 & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 2 & & & & \end{array}$$

$d(0) = \text{mdc}\ \{2, 4, 6, 8\}$
$d(0) = d(1) = d(2) = d(3) = 2$
$d(i) = 2;\ i = 0, 1, 2, 3$

TIPOS DE ESTADOS RECORRENTES

Recorrente Positivo Um estado i é recorrente positivo se começando em i, espera-se que o tempo de retorno ao estado i seja **finito**.

Recorrente Nulo Um estado i é recorrente nulo se começando em i, espera-se que o tempo de retorno ao estado i seja **infinito**.

Numa cadeia de Markov finita o estado recorrente é recorrente positivo. Logo numa cadeia finita não existe estado recorrente nulo.

ESTADO ERGÓDICO

Definição. É um estado **recorrente positivo aperiódico**.
Uma cadeia será ergódica se todos os estados forem ergódicos.

Exemplo 32.

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solução:

$\{0\}$ $\{1, 2\}$ $1 \to 2 \to 1$ $d(0) = d(1) = d(2) = 1$
Todos os estados são ergódicos porque são recorrentes positivos e aperiódicos, logo é uma Cadeia Ergódica.

Exemplo 33.
$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solução:

$0 \to 1 \to 2 \to 1 \to 0 \qquad d(0) = d(1) = d(2) = 1$

Todos os estados são ergódicos porque são recorrentes positivos e aperiódicos, logo é uma Cadeia Ergódica.

Teorema. Para uma cadeia de Markov irredutível ergódica existe
$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n \quad e \quad \pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j)$$
O limite da probabilidade de que a cadeia estando em i estará em j na etapa n equivale dizer que "ao longo do tempo" πj será a proporção de vezes que a cadeia permanecerá em j.

Exemplo 34. Considere a matriz de transição de uma cadeia de Markov abaixo:
$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \end{array}$$
. Encontre a distribuição estacionária π.

Solução: $\boxed{\pi P = \pi}$
$$[\pi(0), \pi(1), \pi(2)] \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \end{array} = [\pi(0), \pi(1), \pi(2)]$$

$$\frac{1}{2}\pi(0) + \frac{1}{2}\pi(1) = \pi(0) \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\pi(1) = \frac{1}{2}\pi(0) \quad \Rightarrow \pi(0) = \pi(1)$$
$$\frac{1}{4}\pi(1) + \frac{2}{3}\pi(2) = \pi(2) \quad \Rightarrow \frac{1}{4}\pi(1) = \frac{1}{3}\pi(2) \quad \Rightarrow \pi(2) = \frac{3}{4}\pi(1)$$
$$\pi(0) + \pi(1) + \pi(2) = 1 \;\Rightarrow\; \pi(1) + \pi(1) + \frac{3}{4}\pi(1) = 1 \quad \Rightarrow 11\pi(1) = 4 \quad \Rightarrow \boxed{\pi(1) = \frac{4}{11}}$$
$$\pi(0) = \pi(1) \;\Rightarrow \boxed{\pi(0) = \frac{4}{11}} \qquad \pi(2) = \frac{3}{4}\pi(1) \quad \Rightarrow \pi(2) = \frac{3}{4}.\frac{4}{11} \quad \Rightarrow \boxed{\pi(2) = \frac{3}{11}}$$

Distribuição Estacionária: $\boxed{\pi = \left(\frac{4}{11}, \frac{4}{11}, \frac{3}{11}\right)}$

Exemplo 35. Considere a matriz de transição de uma cadeia de Markov abaixo:
$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$
. Encontre a distribuição estacionária π.

Solução:

{0} classe absorvente recorrente positiva $\qquad d(0) = 1$

{1, 2} classe absorvente recorrente positiva $\qquad d(1) = d(2) = 1$

A cadeia é recorrente positiva aperiódica, logo a Cadeia é Ergódica.

Observação: A cadeia não é irredutível, portanto não terá uma única distribuição estacionária. Neste exemplo, terá duas distribuições estacionárias, uma concentrada em {0} e outra em {1, 2}. Veremos a seguir.

DISTRIBUIÇÃO ESTACIONÁRIA CONCENTRADA

Definição. Seja π uma distribuição em S, isto é, $\pi(i) \geq 0$ e $\sum \pi(i) = 1$ e seja C um subconjunto de S. Diremos que π é concentrada em C se $\pi(i) = 0$ $\forall$ i $\notin$ C, onde C representa as classes fechadas.

Exemplo 36. Considere a matriz de transição de uma cadeia de Markov abaixo:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

. Encontre a distribuição estacionária π.

Solução: {0} classe absorvente recorrente positiva
{1, 2} classe absorvente recorrente positiva

$\boxed{\pi P' = \pi}$ $\boxed{\pi P'' = \pi}$

$$[\pi(1), \pi(2)] \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array} = [\pi(1), \pi(2)]$$

$\boxed{\pi(0) = 1}$

$$\frac{1}{2}\pi(1) + \frac{1}{2}\pi(2) = \pi(1) \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\pi(2) = \frac{1}{2}\pi(1) \quad \Rightarrow \pi(2) = \pi(1)$$

$$\pi(1) + \pi(2) = 1 \quad \Rightarrow 2\pi(1) = 1 \quad \Rightarrow \boxed{\pi(1) = \frac{1}{2}} \qquad \pi(2) = \pi(1) \Rightarrow \boxed{\pi(1) = \frac{1}{2}}$$

Distribuições Estacionárias: $\boxed{\pi' = (1, 0, 0)}$ e $\boxed{\pi'' = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

Resultado 1. Seja X_n, $n \geq 0$ uma cadeia de Markov recorrente positiva irredutível com distribuição estacionária π. Se a cadeia é periódica com período d, então para cada i, j de estados em S, $\in$ um inteiro r, $0 \leq r < d$ tal que $P_{ij}^{n} = 0$ existe para n = md + r para algum inteiro positivo m e $\boxed{\lim_{m \to \infty} P_{ij}^{md+r} = d\pi(j)}$.

Exemplo 37. Considere a cadeia:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

. Calcule os limites.

Solução: d(i) = 3 $\quad 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$
A cadeia tem uma única distribuição estacionária, pois a mesma é irredutível e finita. Não é Ergódica, pois os períodos são $\neq 1$.

$\boxed{\pi P = \pi}$

$$[\pi(0), \pi(1), \pi(2), \pi(3)] \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = [\pi(0), \pi(1), \pi(2), \pi(3)]$$

$$\begin{cases} \pi(1) = \pi(0) \\ \frac{1}{2}\pi(0) = \pi(2) \\ \frac{1}{2}\pi(0) = \pi(3) \end{cases}$$

$$\pi(0) + \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1$$

$$\pi(0) + \pi(0) + \frac{1}{2}\pi(0) + \frac{1}{2}\pi(0) = 1$$

$$3\pi(0) = 1$$

$$\boxed{\pi(0) = \frac{1}{3}} \qquad \boxed{\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)}$$

$$\pi(1) = \pi(0) \Rightarrow \boxed{\pi(1) = \frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{2}\pi(0) = \pi(2) \Rightarrow \boxed{\pi(2) = \frac{1}{6}}$$

$$\frac{1}{2}\pi(0) = \pi(3) \Rightarrow \boxed{\pi(3) = \frac{1}{6}}$$

$0 \to 2 \to 1 \to 0$ $\quad\quad$ $d(i) = 3$

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} P_{ij}^{md+r} = d\pi(j)} \qquad \lim_{m\to\infty} P_{00}^{3m} = 3\pi(0) \quad \Rightarrow \lim_{m\to\infty} P_{00}^{3m} = 3\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \boxed{\lim_{m\to\infty} P_{00}^{3m} = 1}$$

$$\lim_{m\to\infty} P_{22}^{3m} = 3\pi(2) \quad \Rightarrow \lim_{m\to\infty} P_{22}^{3m} = 3\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \boxed{\lim_{m\to\infty} P_{22}^{3m} = \frac{1}{2}}$$

$$P^{3m} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad P^{3m+1} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Resultado 2. Seja π uma distribuição estacionária. Se i é um estado transitório ou recorrente nulo, então $\pi(i) = 0$.

Exemplo 38. Considere a cadeia: $P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Solução:

{0, 1} classe fechada recorrente positiva
{2} {3} classes transitórias

$$\boxed{\pi P = \pi} \qquad [\pi(0), \pi(1)] \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array} = [\pi(0), \pi(1)]$$

$$\frac{1}{2}\pi(0) + \frac{1}{2}\pi(1) = \pi(0) \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\pi(1) = \frac{1}{2}\pi(0) \quad \Rightarrow \pi(1) = \pi(0)$$

$$\pi(0) + \pi(1) = 1 \quad \Rightarrow 2\pi(0) = 1 \quad \Rightarrow \boxed{\pi(0) = \frac{1}{2}} \qquad \pi(1) = \pi(0) \Rightarrow \boxed{\pi(1) = \frac{1}{2}}$$

Distribuição Estacionária: $\boxed{\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)}$

Resultado 3. Considere uma cadeia de Markov de Nascimento e Morte irredutível com espaço de estados S = {0, 1, 2, ... d} ou S = {0, 1, 2, ...} e

seja $\boxed{t_0 = 1}$ e $\boxed{t_i = \frac{P_0\, P_1\, P_2 \dots P_{i-1}}{q_1\, q_2\, q_3 \dots q_i}}$.

A CNM tem **Uma Única Distribuição Estacionária** se $\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} t_i < \infty}$.

Neste caso $\boxed{\pi(i) = \frac{t_i}{\sum_{i=0}^{\infty} t_i}}$.

Exemplo 39. Considere a cadeia de Ehrenfest com d = 3. Diga se há uma única distribuição estacionária e ache-a.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solução:

$$\begin{array}{l} 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1 \to 0 \\ \quad\ \downarrow \quad \downarrow \\ \quad\ 0 \quad 1 \end{array}$$

Todos estados se comunicam então a cadeia é irredutível.

$$\text{lembrete}: P_{ij} = \begin{cases} q_i, & j = i-1, \quad i \geq 1 \\ r_i, & j = i, \quad i \geq 0 \\ p_i, & j = i+1, \quad i \geq 0 \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{ll} P_0 = P_{01} = 1 & q_1 = P_{10} = 1/3 \\ P_1 = P_{12} = 2/3 & q_2 = P_{21} = 2/3 \\ P_2 = P_{23} = 1/3 & q_3 = P_{32} = 1 \end{array}$$

$$\boxed{t_i = \frac{P_0\ P_1\ P_2 \ldots P_{i-1}}{q_1\ q_2\ q_3 \ldots q_i}} \qquad t_1 = \frac{P_0}{q_1} = \frac{1}{1/3} \qquad t_2 = \frac{P_0\ P_1}{q_1\ q_2} = \frac{1 . \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} . \frac{2}{3}} \qquad t_3 = \frac{P_0\ P_1\ P_2}{q_1\ q_2\ q_3} = \frac{1 . \frac{2}{3} . \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} . \frac{2}{3} . 1}$$

$$\boxed{t_0 = 1} \qquad \boxed{t_1 = 3} \qquad \boxed{t_2 = 3} \qquad \boxed{t_3 = 1}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} t_i < \infty} \qquad \sum_{i=0}^{3} t_i = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=0}^{3} t_i = 8}$$

8 < ∞, então a cadeia tem uma única distribuição estacionária pois $\sum_{i=0}^{3} t_i < \infty$.

$$\boxed{\pi(i) = \frac{t_i}{\sum_{i=0}^{\infty} t_i}} \qquad \pi(0) = \frac{t_0}{\sum_{i=0}^{3} t_i} \qquad \pi(1) = \frac{t_1}{\sum_{i=0}^{3} t_i} \qquad \pi(2) = \frac{t_2}{\sum_{i=0}^{3} t_i} \qquad \pi(3) = \frac{t_3}{\sum_{i=0}^{3} t_i}$$

$$\boxed{\pi(0) = \frac{1}{8}} \qquad \boxed{\pi(1) = \frac{3}{8}} \qquad \boxed{\pi(2) = \frac{3}{8}} \qquad \boxed{\pi(3) = \frac{1}{8}}$$

Distribuição Estacionária:

$$\boxed{\pi = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)}$$

Resultado 4. Seja C um conjunto fechado irredutível de estados recorrentes. Então a cadeia de Markov tem uma única distribuição estacionária π concentrada em C.

$$\pi(i) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i}, & i \in C \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad \boxed{\pi(i) = \frac{1}{\mu_i}}$$

Exemplo 40. Considere a cadeia: $P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$.

Solução: {0, 1} classe recorrente positiva
{2} {3} classes transitórias

$$\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right) \qquad \pi(0) = \frac{1}{\mu_0} \Rightarrow \mu_0 = \frac{1}{\pi(0)} \Rightarrow \mu_0 = \frac{1}{1/2} \Rightarrow \boxed{\mu_0 = 2}$$

$$\boxed{\pi(i) = \frac{1}{\mu_i}} \qquad \pi(1) = \frac{1}{\mu_1} \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{\pi(1)} \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{1/2} \Rightarrow \boxed{\mu_1 = 2}$$

PROCESSOS DE SEGUNDA ORDEM

FUNÇÃO MÉDIA E FUNÇÃO COVARIÂNCIA

Definição 1. Um processo estocástico $X(t)$, $t \in T$ é chamado um processo de segunda ordem se $EX^2(t) < \infty$ para cada $t \in T$.

Definição 2. Seja $X(t)$, $t \in T$ um processo de segunda ordem. A função **média** $\mu_X(t)$, $t \in T$ do processo é definido por $\boxed{\mu_X(t) = EX(t)}$

Definição 3. Seja $X(t)$, $t \in T$ um processo de segunda ordem. A função **covariância** $r_X(s, t)$, s e $t \in T$ é definido por $\boxed{r_X(s, t) = cov(X(s), X(t))}$ Esta função é também chamada de função auto-covariância.

Observações:

① Também se tem $r_X(s, t) = EX(s)\, X(t) - (EX(s))\,(EX(t))$

② A variância de $X(t)$ pode ser expressa em termos da função covariância

$$\begin{aligned} VarX(t) &= EX^2(t) - (EX(t))^2 \\ &= Ex^2(t) - (EX(t))(EX(t)) \end{aligned}$$

$$VarX(t) = r_X(t, t)$$

③ A função covariância r_x é simétrica em relação a s e t.

$$\begin{aligned} r_x(s, t) &= EX(s)\, X(t) - (EX(s))\,(EX(t)) \\ &= EX(t)\, X(s) - (EX(t))\,(EX(s)) \\ &= r_x(t, s);\ s \text{ e } t \in T \end{aligned}$$

$$r_X(s, t) = r_X(t, s)$$

PROCESSOS ESTACIONÁRIO DE SEGUNDA ORDEM

Definição. Diz-se que $X(t)$, $-\infty < t < \infty$ é um processo estacionário de segunda ordem se para cada número τ, o processo de segunda ordem $Y(t) = X(t + \tau)$, $-\infty < t < \infty$ tem a mesma média e função covariância que o processo $X(t)$.

Resultado. Seja $X(t)$ um **processo estacionário de segunda ordem**. Então $\mu_X(t)$ independe de t e $r_x(s, t)$ **depende da diferença entre t e s**, $t > s$. Neste caso:

a) $EX(t) = E(X(t+ \tau)) = \mu$ (constante)

b)
$$\begin{aligned} r_x(s, t) &= cov(X(s), X(t)) \\ &= cov(X(s - s), X(t - s)) \\ &= cov(X(0), X(t - s)) \end{aligned}$$

$$r_x(0, t - s) = r_x(t - s)$$

Fazendo $s = 0$

$$r_x(t) = r_x(0, t)$$

Observações:

① $r_x(t)$ é chamada de função covariância ou auto-covariância do processo.

② $r_x(t)$ é simétrica em torno da origem.

$$\begin{aligned} r_x(t) &= r_x(0, t) \\ &= r_x(t, 0) \\ &= r_x(0, -t) \\ r_x(t) &= r_x(-t) \end{aligned}$$

③ A variável aleatória X(t), $-\infty < t < \infty$ tem uma variância comum.

$$\begin{aligned} VarX(t) &= r_x(t, t) \\ &= r_x(0, 0) \\ &= r_x(0) \\ VarX(t) &= r_x(0) \end{aligned}$$

④ Quando somente acontece que $r_x(s, t) = r_x(t - s)$, $t > s$, diz-se que o processo é estacionário de covariância.

Coeficiente de Correlação:

$$\rho(t) = \frac{r_x(t)}{\sqrt{r_x(0)}\sqrt{r_x(0)}} = \frac{r_x(t)}{r_x(0)} \Rightarrow \qquad \boxed{\rho(t) = \frac{r_x(t)}{r_x(0)}}$$

Exemplo 41. Seja Z_1 e Z_2 variáveis aleatórias independentes onde $Z_i \sim N(0, \sigma^2)$, i = 1, 2. Seja λ um número real constante e $X(t) = Z_1 \cos\lambda t + Z_2 \operatorname{sen}\lambda t$, $-\infty < t < \infty$.

a) Ache a função média e função covariância do processo.

b) X(t) é um processo estacionário de segunda ordem? Se sim, ache o coeficiente de correlação.

Solução:

$Z_1 \sim N(0, \sigma^2)$ $\quad E(Z_1) = 0$ e $Var(Z_1) = \sigma^2$

$Z_2 \sim N(0, \sigma^2)$ $\quad E(Z_2) = 0$ e $Var(Z_2) = \sigma^2$

Lembrete:
$cov(y, y) = V(y)$
$cov(u, v) = Euv - E(u) E(v)$
$V(u) = E(u^2) - [E(u)]^2$

a)
$$\begin{aligned} \mu_x(t) &= EX(t) \\ &= E(Z_1 \cos\lambda t + Z_2 \operatorname{sen}\lambda t) \\ &= \cos\lambda t\, E(Z_1) + \operatorname{sen}\lambda t\, E(Z_2) \\ &= (\cos \lambda t)0 + (\operatorname{sen}\lambda t)0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mu_x(t) = 0}$$

$$\begin{aligned} r_x(s, t) &= EX(s)X(t) \\ &= E[(Z_1 \cos\lambda s + Z_2 \operatorname{sen}\lambda s)(Z_1 \cos\lambda t + Z_2 \operatorname{sen}\lambda t)] \\ &= E(Z_1^2 \cos\lambda s \cos\lambda t + Z_1Z_2 \cos\lambda s \operatorname{sen}\lambda t + Z_2Z_1 \operatorname{sen}\lambda s \cos\lambda t + Z_2^2 \operatorname{sen}\lambda s \operatorname{sen}\lambda t) \\ &= \cos\lambda s \cos\lambda t\, E(Z_1^2) + \cos\lambda s \operatorname{sen}\lambda t\, E(Z_1Z_2) + \operatorname{sen}\lambda s \cos\lambda t\, E(Z_2Z_1) + \operatorname{sen}\lambda s \operatorname{sen}\lambda t\, E(Z_2^2) \\ &= \cos\lambda s \cos\lambda t\, \sigma^2 + \cos\lambda s \operatorname{sen}\lambda t\, 0 + \operatorname{sen}\lambda s \cos\lambda t\, 0 + \operatorname{sen}\lambda s \operatorname{sen}\lambda t\, \sigma^2 \\ &= \sigma^2(\cos\lambda s \cos\lambda t + \operatorname{sen}\lambda s \operatorname{sen}\lambda t) \end{aligned}$$

lembrete: cos(b-a)= cosa cosb + sena senb

$$\boxed{r_x(s, t) = \sigma^2 \cos \lambda(t - s)}$$

b) $r_x(s, t) = \sigma^2 \cos \lambda(t - s)$, logo X(t) é um processo estacionário de segunda ordem, pois existe diferença entre t e s.

Fazendo s = 0

$r_x(0, t) = \sigma^2 \cos\lambda t$

$\boxed{r_x(t) = \sigma^2 \cos \lambda t}$

$r_x(t) = \sigma^2 \cos \lambda t$

$r_x(0) = \sigma^2 \cos 0$

$r_x(0) = \sigma^2.1$

$\boxed{r_x(0) = \sigma^2}$

Coeficiente de Correlação:

$$\boxed{\rho(t) = \frac{r_x(t)}{r_x(0)}} \Rightarrow \rho(t) = \frac{\sigma^2 \cos \lambda t}{\sigma^2} \Rightarrow \boxed{\rho(t) = \cos \lambda t}$$