BORGES NETO, J. - Fundamentos de Semântica Formal.

2. LÓGICA[1]

Meu objetivo neste capítulo é fazer uma apresentação extensiva da história dos estudos lógicos, mostrando, em linhas gerais, as razões que determinaram a "substituição" de uma lógica aristotélica, de base lingüística, por uma lógica de base matemática. Apresento rapidamente a versão "padrão" ("clássica", no dizer dos lógicos) da lógica de predicados e introduzo a teoria de tipos. Esse capítulo não substitui uma introdução à lógica, nem tem a intenção de fazê-lo. Interessa-me apenas apresentar um conjunto de noções que serão básicas para a compreensão do restante deste trabalho.

2.1. A Lógica Aristotélica.

Os homens, quando debatem, discutem e discordam podem oferecer (ou deixar de oferecer) evidências em favor de suas afirmações. Uma afirmação apoiada em evidências é a conclusão de um argumento e a lógica estuda e critica os argumentos, estabelecendo técnicas para sua análise. A lógica examina as relações entre uma conclusão e as evidências que lhe servem de apoio, propondo "princípios gerais" que distinguem os argumentos válidos dos não-válidos. É tarefa da lógica, portanto, apresentar métodos capazes de identificar argumentos e inferências logicamente válidos ou seja, princípios gerais de validade das inferências e dos argumentos. Em outras palavras, cabe à lógica estabelecer *as leis gerais das demonstrações*.

De certa forma, então, a lógica surge como uma *Teoria da Demonstração*. Interessava aos antigos mostrar como era possível concluir a verdade de uma afirmação (ou negação) a partir da verdade suposta de outra ou de outras afirmações (ou negações). Ou seja, interessava estabelecer "leis" que permitissem *demonstrar* uma declaração a partir de outras declarações. A lógica, no entanto, não tratou apenas de demonstrações e de inferências, mas envolveu-se também no estudo da língua grega, de sua sintaxe e de sua semântica. Pródico (séc. V a.C.) trabalhou com a noção de *sinônimos*; Protágoras (séc. V a.C.) distinguiu diferentes tipos de sentenças; Alcidamas (séc. IV a.C.) classificou as expressões em *afirmações*, *negações*, *perguntas* e *nomeações*; Platão (séc. IV a.C.) distinguiu *nome* e *verbo*, dizendo que o verbo indica uma ação e o nome indica um agente, e que só há *proposição* (λόγοζ) se houver um nome ligado a um verbo.

Aristóteles, no entanto, foi o primeiro a perceber que certos raciocínios são verdadeiros em virtude, exclusivamente, de sua **forma** (independentemente do que signifiquem) e o sistema lógico aristotélico, conseqüentemente, dedicou-se a estudar as *formas* dos discursos, separadas metodologicamente de seus *conteúdos*. Para chegar a um "sistema" formal dos discursos, Aristóteles se viu obrigado a fazer uma análise

[1]Boa parte das coisas que vou apresentar nesse capítulo devo às aulas de Lógica que recebi em meu curso de mestrado, no ano de 1977, na UNICAMP, do Prof. Luís Henrique Lopes dos Santos. Para ser bem sincero, não consigo estabelecer bem os limites entre o que é meu e o que ouvi dele. Digamos que essa "visão" da Lógica que apresento não é mais do que a minha "leitura" (possivelmente incorreta em muitos pontos) da Lógica que Luís Henrique me apresentou.

lingüística rudimentar (para os nossos conhecimentos atuais) da língua grega, distinguindo *partes do discurso* e "regras" de combinação dessas partes. De certa forma, então, com Aristóteles, a lógica passa a ter como pré-requisito necessário uma análise "gramatical" dos elementos dos enunciados. Isso fica claro se nos voltarmos ao *De Interpretatione* de Aristóteles, que é um estudo gramatical "propedêutico" necessário para a compreensão do estudo sistemático dos raciocínios que fará nos dois livros denominados de *Analíticos*. É interessante notar que os estudos lógicos, em seu início, na medida em que se baseavam num "disciplinamento" da linguagem, não estavam muito distantes dos estudos "gramaticais" que começavam a surgir. Muitas das distinções e das definições estabelecidas pela lógica aristotélica são simplesmente distinções e definições gramaticais que nossas gramáticas escolares repetem até hoje.

Podemos entender isso mais facilmente se pensarmos que o termo "**lógica**" vem do grego λόγοζ, que significa simultaneamente *discurso (proposição)* e *razão*. Para os gregos, o discurso não era mais do que pensamento expressado por palavras. Assim, a "ordem" (ou "desordem") do discurso refletiria a "ordem" (ou "desordem") do pensamento. Como diz Aristóteles, no início do livro "*De Interpretatione*"[2]:

> *Así, pues, lo <que hay>[3] en el sonido son símbolos de las afecciones <que hay> en el alma, y la escritura <es símbolo> de lo <que hay> en el sonido. Y, así como las letras no son las mismas para todos, tampoco los sonidos son los mismos. Ahora bien, aquello de lo que esas cosas son signos primordialmente, las afecciones del alma, <son> las mismas para todos, y aquello de lo que éstas son semejanzas, las cosas, tambén <son> las mismas.*
> (ARISTÓTELES, p. 35-36)

Para Aristóteles, a fala é representação das experiências da mente e varia, ao menos entre os "povos", enquanto o pensamento (as "afecciones del alma") e as coisas que a mente experimenta (o externo à mente e à fala) são invariantes ("universais"). Em outras palavras, há um único mundo e uma única "razão", embora possam haver muitas "falas".

Uma Teoria da Demonstração "formal", baseada na língua natural, como é a teoria aristotélica, deveria, num primeiro momento, estabelecer um **modelo de análise lingüística** que servisse de base para o estabelecimento das "leis" de demonstração. Esse modelo de análise, enriquecido e reinterpretado a partir da definição de novos objetivos, vai dar origem à gramática grega, organizada e codificada pelos alexandrinos (a partir do séc. II a.C.).

Em linhas bem gerais, o modelo de análise suposto pelos aristotélicos pode ser caracterizado como se segue. O ponto de partida do modelo de análise grego é o *discurso*. O discurso só passa a existir quando se "propõe" algo de alguma coisa, isto é, quando se declara (lingüisticamente) algo de alguma coisa – quando se "liga" um nome a um verbo, segundo Platão, como vimos. A **proposição**, resultado dessa junção de nome e verbo, é a unidade do discurso e seus constituintes são os **termos**. As proposições permitem as inferências. Proposições articuladas constituem os **silogismos**. **Termos**, **proposições** e **silogismos** são as noções básicas da Lógica Formal Aristotélica. Na verdade, não há termo a não ser na proposição. A palavra "mortal" não é um termo, já

---

[2]Citado a partir da versão espanhola de Miguel Candel Sanmartín – *Sobre la Interpretación* – recolhido no volume II dos **Tratados de Lógica (Órganon)**, pp. 35-81.

[3]Os parênteses angulares indicam, na tradução espanhola, texto acrescentado pelo tradutor.

que não propõe nada; na proposição "Todo homem é mortal", no entanto, a palavra "mortal" passa a ser um termo, uma vez que é o que se propõe de "todo homem". As proposições mais simples possuem dois termos: o **sujeito** e o **predicado** (ou **atributo**). O sujeito é o termo da proposição que representa o algo de quem se propõe alguma coisa (é a parte *nominal* da proposição); o predicado é o termo que nos diz o que se propõe do sujeito (é a parte *verbal* da proposição). Assim, na proposição "Todo homem é mortal", o sujeito é "todo homem" e o predicado é "mortal". A **cópula** é a expressão que faz a ligação entre os dois termos da proposição e define a **qualidade** da proposição. A relação entre o sujeito e o predicado pode realizar a qualidade de duas formas: ou a proposição *afirma* o predicado do sujeito ou a proposição *nega* o predicado do sujeito. No primeiro caso, a relação entre o sujeito e o predicado é estabelecida pela **cópula afirmativa** ("**é**"); no segundo caso, pela **cópula negativa** ("**não é**"). A relação entre o sujeito e o predicado é objeto ainda de uma outra variável, a **quantidade**. Quando o predicado é afirmado ou negado de toda a extensão do sujeito, diz-se que a quantidade da proposição é **universal**; quando o predicado recobre apenas parte do sujeito, a quantidade da proposição é **particular**. Assim, a proposição "todo homem é mortal", na medida em que o predicado "mortal" está sendo afirmado de "todo homem", é uma proposição universal. A proposição "Algum homem é brasileiro", na medida em que o predicado "brasileiro" **não está** sendo afirmado de "todo homem", mas apenas de parte dos homens, é uma proposição particular.

Em resumo, o modelo de análise lingüística da lógica aristotélica assume a *proposição* como unidade de análise; reconhece partes materiais na proposição e as classifica como *sujeito* e *predicado*; reconhece partes lógicas (relacionais) na proposição e as classifica como de *qualidade* (cópula afirmativa e cópula negativa) ou de *quantidade* ("todo" [universal] e "algum" [particular]). Tomando as características da qualidade e da quantidade simultaneamente, a lógica aristotélica classifica as proposições em quatro tipos, conforme a tabela 2.1:

QUALIDADE	QUANTIDADE	EXEMPLOS	SÍMBOLO
Universal	Afirmativa	Todo S é P	A
Universal	Negativa	Nenhum S é P (= Todo S não é P)	E
Particular	Afirmativa	Algum S é P	I
Particular	Negativa	Algum S não é P	O

TABELA 2.1

O que a tabela 2.1. nos apresenta é um *inventário de formas proposicionais*, a partir do qual as leis de demonstração serão formuladas. Não nos interessa aqui fazer uma apresentação mais detalhada ou completa da Teoria da Demonstração aristotélica. Vamos apenas dar alguns exemplos de como uma tal teoria poderia funcionar. Por exemplo, as seguintes inferências são verdadeiras:

(2.1) SE **A** é verdadeiro, ENTÃO, **O** é falso.
*(SE **Todo homem é mortal** é verdadeiro, ENTÃO, **Algum homem não é mortal** é falso.)*

(2.2) SE **E** é falso, ENTÃO, **I** é verdadeiro.
*(SE **Nenhum homem é mortal** é falso, ENTÃO, **Algum homem é mortal** é verdadeiro.)*

Da mesma forma, os silogismos válidos podem ser elencados com base no inventário de formas proposicionais e com base no que se denominou *figura do silogismo*, que é a posição do termo que se repete nas premissas (o termo **médio**). Essa história é a seguinte: num silogismo canônico, há três termos, que se repetem duas vezes; dois desses termos repetem-se uma vez em uma das premissas e outra na conclusão e um dos termos repete-se na premissas. Tomemos um silogismo constituído de três proposições universais afirmativas (A) como exemplo.

(2.3)	Todo M é P	*Premissa 1* (A)
	Todo S é M	*Premissa 2* (A)
	logo, Todo S é P	*Conclusão* (A)

Note-se que os três termos materiais S, P e M aparecem duas vezes no silogismo. O termo P aparece uma vez na premissa 1 e outra vez na conclusão; o termo S aparece uma vez na premissa 2 e outra vez na conclusão. O termo M, no entanto, aparece em ambas as premissas e por isso é chamado de **termo médio**. Note-se que M é sujeito na premissa 1 e predicado na premissa 2. Essa é a colocação do termo médio que caracteriza a **primeira figura**.

De posse dessas noções, podemos estabelecer algumas "leis" de validade para os silogismos. Podemos afirmar, sem medo de errar, que todos os silogismos da primeira figura constituídos de proposições AAA são válidos. Da mesma forma, na primeira figura, serão válidos os silogismos constituídos de proposições EAE, AII, EIO (formas válidas que os lógicos medievais denominaram, respectivamente, de B***A***RB***A***R***A***, C***E***L***A***R***E***NT, D***A***R***II*** e F***E***R***IO***). Considerando-se as possibilidades de colocação do termo médio nas premissa é possível estabelecer **quatro** figuras: o termo médio é sujeito na primeira premissa e predicado na segunda (primeira figura); é predicado em ambas as premissas (segunda figura); é sujeito em ambas as premissas (terceira figura); é predicado na primeira premissa e sujeito na segunda (quarta figura). Em cada uma dessas figuras, algumas combinações de proposições (AAA; AEE, etc.) serão válidas e outras não o serão. Os lógicos tradicionais reconheciam apenas 19 "formas" ("**modos**", como eram chamados) válidas entre as 256 formas possíveis de combinação de proposições em figuras.

Pode-se dizer que essa Teoria da Demonstração, cujas bases foram lançadas por Aristóteles no séc. IV a.C., dominou os estudos lógicos até o início do séc. XIX e é a única lógica que muita gente ainda hoje conhece. Mas, na verdade, o arcabouço teórico que acabamos de ver, para os lógicos contemporâneos, só tem interesse histórico. A lógica mudou muito nos últimos cento e cinqüenta anos. E é curioso notar que a gramática, que surgiu praticamente junto com a lógica, entre os gregos, permanece ainda obedecendo à perspectiva estabelecida nas origens. Embora os lógicos tenham abandonado completamente o modelo de análise lingüística aristotélico, ele ainda sobrevive nas gramáticas escolares. Talvez isso se dê em virtude da excelência desse modelo de análise – e os "errados" são os lógicos –; talvez isso se dê em virtude de um excessivo "conservadorismo" dos gramáticos – e estes é que estão "errados. De qualquer forma, creio que vale a pena buscar saber das razões apontadas pelos lógicos para o abandono do modelo de análise lingüística aristotélico, bem como da Teoria da Demonstração nele baseada.

2.2. Problemas e limitações da lógica aristotélica.

O sistema lógico de Aristóteles começa a ser desenvolvido, aumentado e modificado ainda na Grécia Clássica, especialmente pelos Estóicos, de modo que o que se conhece hoje como "lógica aristotélica" não é necessariamente o pensamento exclusivo de Aristóteles. Nesse processo de desenvolvimento, que durou mais de dois mil anos, muitos problemas e limitações do sistema foram detectados, e soluções foram sugeridas. Certamente, não poderemos ver todas as questões levantadas, nem tal levantamento teria qualquer utilidade para nós. Tocaremos apenas em alguns pontos.

A primeira limitação tem a ver com as proposições. Em primeiro lugar, toda proposição é uma sentença da língua natural, mas nem toda sentença da língua natural é uma proposição. As proposições são expressões selecionadas dentre as sentenças da língua e "preparadas" para servir de base para as leis de inferência. Por exemplo, se toda proposição deve ter um "sujeito" e um "predicado" ligados por uma "cópula", o que fazer de sentenças comuns como **Pedro corre**? A solução para esse problema está em se entender a proposição como um objeto *semântico* e não um objeto sintático ou fonológico[4]. Em outras palavras, a proposição é **o significado da sentença** e não a própria sentença enquanto objeto lingüístico material. Assim, para incorporar sentenças como "Pedro corre" aos raciocínios lógicos, basta encontrar uma expressão da forma "S é P" (S*ujeito* cópula P*redicado*) que tenha o mesmo significado (relacione-se com o mesmo "pensamento"), como é o caso de "Pedro é corredor". Para construir a Teoria da Demonstração, então, seria necessário um procedimento qualquer de "tradução" das sentenças da língua natural no subconjunto das sentenças "normalizadas" suscetíveis de tratamento. Esse procedimento nunca foi desenvolvido e nem poderíamos esperar que fosse, uma vez que a lógica aristotélica nunca pretendeu ser um **cálculo**[5]. Era justamente a concepção "semântica" de proposição que permitia o tratamento de inúmeros casos de argumentos aparentemente válidos que não se conformavam às normas previstas pelo sistema. Por exemplo, o seguinte raciocínio – intuitivamente correto – dependia crucialmente de modificações formais nas expressões que veiculavam as proposições para que sua validade pudesse ser demonstrada:

(2.4) Todos os persas eram adoradores do sol
O sol é uma estrela
____
Logo, todos os persas eram adoradores de uma estrela

Note-se que esse raciocínio é formalmente incorreto, segundo o modelo analítico aristotélico, porque o termo "o sol" **não é** o predicado da primeira premissa (esse predicado é "adoradores do sol"). Temos aí um caso de raciocínio com quatro argumentos, embora intuitivamente percebamos que o raciocínio é válido? Não. Para demonstrar que o raciocínio é válido – e que não há nada de errado com nossa intuição – basta passa para a **passiva** a primeira premissa (e a conclusão), obtendo a formulação, intuitiva e formalmente correta de (2.5), que é um silogismo AAI da terceira figura (um silogismo *Darapti*).

(2.5) O sol era adorado por todos os persas
O sol é uma estrela
____
Logo, uma estrela era adorada por todos os persas

[4]Basta pensarmos no trecho do livro *De Interpretatione* de Aristóteles que citamos acima para compreender como a lógica aristotélica pode dar conta de fatos como esse.

[5]De fato, houve tentativas de dar forma de cálculo à lógica aristotélica ao menos por parte de Leibniz, mas o projeto não teve seguimento. Voltaremos mais abaixo à noção de "cálculo".

Embora esse tipo de solução desse conta de muitos casos, quando defrontado com expressões da linguagem híbrida da aritmética fracassou completamente. Expressões como "Para todo número *n*, existe um número *k* tal que *n* é menor que *k* "[6] ou "Para todo número *n* e para todo número *k* existe um número *j* tal que para todo número *z*, se o valor positivo (*z* - *n*) é menor que *j*, então o valor positivo f(*z*) - f(*n*) é menor que *k*"[7] simplesmente não podem ser tratadas pelo modelo analítico aristotélico. Não há recurso a passivas, proposições exponíveis, proposições complexas, hipotéticas, ou o que for, que permitam o tratamento dessas sentenças como proposições (e, por serem verdadeiras ou falsas, essas sentenças deveriam poder ser ditas "proposições"). Assim, um subconjunto importantíssimo de sentenças, fundamentais para a organização de um sem número de argumentos, fica à margem do modelo analítico da lógica aristotélica e isso é um problema **qualitativo** sério.

As críticas mais severas ao sistema da lógica aristotélica começam a surgir no séc. XIX, principalmente a partir dos trabalhos de De Morgan e de Boole e a partir das tentativas de aplicar a lógica à análise dos raciocínios matemáticos. Como afirma Putnam:

> *O gênio de Aristóteles é evidente: ele criou uma ciência inteiramente nova, e foi ele – juntamente com seus seguidores – quem introduziu artifícios como o uso de letras mudas para denotar os termos, bem como termos fundamentais tais como 'válido', 'não-válido', 'contraditório', 'universal' e 'particular'; todavia, a obra de Aristóteles impôs à lógica um certo número de vínculos paralisantes, sobretudo pela excessiva ênfase posta no estudo dos 256 modos do silogismo e na consideração dos enunciados que contenham exatamente dois termos.*
> (PUTNAM 1988, p. 19)

O grande mérito dos lógicos do século XIX foi ter percebido a necessidade de eliminar essas restrições, trazendo para o campo dos estudos lógicos raciocínios válidos e não-válidos que ultrapassam o limite das 256 formas do silogismo. Enquanto a obra de Aristóteles estabilizou a lógica por dois milênios, a obra desses lógicos criou a necessidade da busca de novos métodos para a análise de raciocínios intuitivamente válidos, inclusive para a análise das demonstrações matemáticas, que ficavam ao largo da lógica aristotélica.

O grande "salto qualitativo" é dado por Frege que, já no final do século XIX, consegue estabelecer uma teoria da demonstração que engloba a aritmética, permitindo a análise e a validação dos argumentos matemáticos. A característica fundamental dessa "nova lógica" é a incorporação de métodos algébricos no estudo das provas e das inferências e — o que nos interessa mais de perto aqui – no estabelecimento de um novo modelo de análise lingüística como base para a teoria da demonstração.

Ao contrário do modelo de análise lingüística da lógica aristotélica, que assumia a língua grega, e sua gramática, como suporte para a construção da teoria da demonstração, o modelo de análise lingüística fregeano assume a linguagem da aritmética como esse suporte. Na linguagem da aritmética não faz sentido falar-se em "sujeitos", "predicados" e "cópulas", é necessária toda uma nova análise das expressões – uma "gramática" totalmente nova. No lugar dos "sujeitos" e dos "predicados" vão aparecer agora as "funções" e os "argumentos"; no lugar das técnicas gramaticais de análise das expressões vão surgir métodos algébricos de análise.

---

[6] Em outras palavras, todo número é menor que algum número.

[7] Definição aritmética de "função contínua" de Weierstraβ.

Correndo o risco de fazer afirmações infundadas, quer me parecer que a nova lógica, de início, não pretende tomar o lugar da lógica aristotélica. A lógica do séc. XIX é um sistema de regras de demonstração destinado ao estudo das provas matemáticas, assim como a lógica aristotélica destina-se ao estudo dos argumentos lingüísticos. São sistemas paralelos e só se tocam nos casos limite em que é possível dar uma forma discursiva ao argumento matemático ou uma forma algébrica ao argumento lingüístico. Obviamente, a interrelação dos campos vai ficando cada vez mais evidente até que toda a lógica passa a seguir o modelo matemático, deixando a lógica lingüística (aristotélica) na situação de objeto de estudos meramente históricos. Lógicos importantes como Venn, que foi o primeiro a usar o termo "Lógica Simbólica", achavam que a nova lógica, enquanto uma técnica especializada, tinha interesse e importância para os matemáticos e para os lógicos profissionais. A lógica aristotélica, por outro lado, era um conteúdo da cultura geral e, como tal, não devia ser suprimida da escola. Para Venn, a lógica aristotélica deveria ser ensinada, da forma tradicional, apesar de todos os avanços que a lógica simbólica pudesse trazer, e argumentava dizendo que alguns dos elementos mais instrutivos da lógica aristotélica, como a distinção entre a denotação e a conotação, as regras de conversão e o quadro das oposições, fugiam ao escopo da lógica simbólica; do mesmo modo, a lógica aristotélica teria o mérito de permitir associações fáceis com a gramática e com a linguagem ordinária, o que certamente não era possível com a lógica simbólica[8].

Talvez seja interessante reproduzir aqui, em linhas gerais, um dos pontos da comparação que Putnam (1988 pp. 17-18) faz entre a lógica aristotélica e a lógica de Boole. Putnam assume proposições (dos quatro tipos admitidos pelos aristotélicos) em que o sujeito e o predicado são idênticos:

(2.6.) 1.Todos os A são A
2 3.Nenhum A é A
.
4 5.Alguns A são A
.
6 7.Alguns A não são A
.

Sobre eles, Putnam vai dizer que o enunciado 1 é obviamente válido e os lógicos aristotélicos o chamariam de "tautologia". O enunciado 4, por sua vez, é uma "contradição" e também assim seria reconhecido pelos lógicos aristotélicos. Para os aristotélicos, no entanto, o enunciado 2 é também uma contradição e o enunciado 3 uma tautologia e Putnam vai mostrar que isso só é possível de se sustentar se não se reconhece a existência do **conjunto vazio**. Em suas palavras:

> *Aristóteles e os seus seguidores jamais tomaram em consideração a possibilidade de um conjunto ser vazio. Todavia, essa possibilidade reveste-se da maior importância. (...) Cumpre portanto dizer,* ***ou*** *que na lógica tradicional 'termo' significa o termo que tem como extensão uma classe* ***não-vazia*** *– interditando assim a análise dos raciocínios sobre as serpentes marinhas do Loch Ness enquanto não se tiver descoberto que elas existem –,* ***ou então*** *que 3 não é válida: isto é, que é falso que 'Alguns A são A' (...) sempre que A é o*

[8]VENN, J. (1881) *Symbolic Logic*, p. XXVI (Citado *apud* LUCE (1958), p. 192-193)

> *conjunto vazio. E cumpre dizer que 2 não é uma contradição: ou seja, que é* ***verdade*** *que 'Nenhum A é A' (...) sempre que A é o conjunto vazio. Os lógicos antigos e a maior parte dos medievais não se aperceberam deste dilema.*
> (PUTNAM 1988, p. 17)

O que a argumentação de Putnam demonstra é que a lógica aristotélica, por não reconhecer a existência do conjunto vazio, fica, para a lógica simbólica, como a notação dos algarismos romanos, que não identifica formalmente o "zero", fica para a notação dos algarismos arábicos: inadequada para o cálculo, restritiva[9] e fadada ao desuso. Fica claro também que as duas "lógicas" diferenciam-se mais do que simplesmente pelo fato de uma delas usar símbolos "matemáticos" onde a outra usava expressões de línguas naturais. As duas "lógicas" não são equivalentes. Embora possamos reduzir a lógica aristotélica à lógica simbólica, o oposto não é possível, assim como não é possível realizar em algarismos romanos todas as operações que realizamos em algarismos arábicos.

2.3. A lógica como um cálculo baseado na estrutura da linguagem da aritmética.

Talvez o melhor meio para compreender a lógica simbólica seja o "mergulho" imediato no modelo de análise lingüística construído para dar conta de uma linguagem artificial especial chamada **linguagem do cálculo de predicados de primeira ordem**, abreviada aqui pela sigla **CP**. Antes de darmos esse "mergulho", no entanto, vamos fazer uma breve excursão pela noção de **cálculo**, noção a que já nos referimos acima e que é essencial para a compreensão do que vem pela frente, e pelas características principais da linguagem da aritmética.

2.3.1. Cálculo.

A palavra "cálculo" vem do latim *calculus* que queria dizer "pedrinha". Ainda hoje usamos a palavra "cálculo" com esse sentido latino quando nos referimos aos "cálculos biliares", por exemplo. A relação dos *calculi* com as operações aritméticas vem do fato de que essas operações eram feitas pelos romanos no ábaco, por meio da contagem das "pedrinhas" (ou "contas") presas nos arames. Sempre que um romano precisasse fazer uma "conta" qualquer (uma soma, por exemplo) ele traduziria as parcelas a serem somadas para a "linguagem" do ábaco (uma linguagem de "contas" ou "pedrinhas") e, nessa linguagem, faria a operação, traduzindo o resultado novamente para a linguagem dos algarismos romanos. Podemos dizer que o "contabilista" romano se via às voltas com duas linguagens distintas: a linguagem dos algarismos romanos, inadequada para a efetivação das operações aritméticas, e a linguagem do ábaco, adequada para a realização das operações. Por um processo de "contaminação" dos significados denominado **metonímia**, o termo "cálculo" ficou relacionado com a linguagem em que se podem realizar operações aritméticas **sem a ajuda de outros elementos que não a própria linguagem**. Vistas assim as coisas, podemos dizer que a

[9]Parece claro que não existiria a matemática de hoje se ainda escrevêssemos as expressões matemáticas na linguagem dos algarismos romanos. Basta tentarmos estabelecer o mínimo múltiplo comum de alguns números notados em algarismos romanos para percebermos isso.

linguagem dos algarismos romanos, uma vez que não se podem fazer nela operações aritméticas sem a ajuda do ábaco, não é uma linguagem adequada para o cálculo. Uma das grandes virtudes da linguagem dos algarismos arábicos é que ela é adequada para o cálculo, ou seja, é possível realizar operações aritméticas usando exclusivamente **expressões da própria linguagem**. É exatamente isso que aprendemos nos primeiros anos da escola: como organizar as expressões da linguagem da aritmética para que possamos fazer "contas" usando apenas as expressões. E é exatamente por isso que os algarismos arábicos substituíram os algarismos romanos em todos os contextos, tornando-os uma mera curiosidade histórica (exceto, talvez, nos mostradores dos relógios e nas numerações dos capítulos de livros).

A lógica aristotélica, por meio de seu modelo analítico, fazia a análise das expressões da língua natural de tal forma que o resultado certamente não servia para o **cálculo lógico**. No momento de analisar um argumento qualquer para estabelecer sua validade, no mais das vezes era necessário "traduzir" as expressões do argumento para as formas proposicionais convencionais (A, E, I, O) e apenas nessa "linguagem" (de fato, um subconjunto das sentenças da língua natural, como vimos) é que a análise dos raciocínios era possível. Construir a lógica como um **cálculo**, então, significa dar às expressões que comporão os raciocínios uma tal análise que seja possível o estabelecimento da validade dos raciocínios levando-se em consideração **apenas** as expressões e sua organização. Compreensivelmente, os primeiros lógicos que se propuseram a tarefa de construção de um cálculo lógico abandonaram a língua natural como base para essa construção e voltaram-se à linguagem da aritmética. Com isso, a lógica deixou de ser "lingüística" e passou a ser "matemática". Vejamos algumas das características da linguagem da aritmética como ponto de partida para a construção de um cálculo lógico.

2.3.2. A linguagem da aritmética.

De forma bastante simplificada e informal, podemos dizer que as expressões da linguagem da aritmética se constróem em três níveis distintos, hierarquicamente organizados. Num primeiro nível, as expressões são construídas a partir do seguinte conjunto de elementos primitivos:

(i) nomes de números (0, 1, 2, 3, ...);
(ii) indicadores de operações ('+', '–', '×', '÷', ...) e
(iii) indicadores de relações ('=', '>', '<', '≠', ...).

As regras de formação das expressões nesse primeiro nível são as seguintes:

(2.7) (1) Os nomes de número são expressões bem formadas;
(2) Se colocarmos um indicador de operação entre dois nomes de números, obtemos uma expressão bem formada;
(3) Se colocarmos um indicador de relação entre dois nomes de números, obtemos uma expressão bem formada.

Pela primeira regra obtemos o conjunto das **expressões simples** da linguagem da aritmética: o conjunto dos nomes simples dos números naturais[10]. Pelas outras duas

[10]Note-se que o conjunto dos nomes dos números naturais também poderia ser obtido por meio de regras que se aplicam ao conjunto dos algarismos (0-9). As regras poderiam ter mais ou menos a seguinte forma: (i) Todo algarismo é um nome de número; (ii) se α e β são algarismos, $\alpha\beta$ é um nome de

regras, obtemos o conjunto das **expressões complexas**. É interessante notar que um mesmo número pode ter um nome simples e vários nomes complexos. Por exemplo, o número **cinco** pode ser representado, na linguagem, tanto pela expressão simples "**5**" quanto pelas expressões complexas, obtidas a partir da regra (2), "**4 + 1**", "**25 ÷ 5**", "**200 ÷ 40**", "**3 + 2**", etc. A regra (3), ao contrário das outras duas, não produz "nomes de números", mas algo próximo das "proposições" dos lógicos aristotélicos: expressões que podem ser ditas "falsas" ou "verdadeiras". Observem-se as seguintes expressões obtidas pela regra (3), uma falsa e a outra verdadeira:

(2.8) a. "**3 = 5**",
b. "**(3 × 2) < (5 × 3)**"

Nos outros dois níveis, podemos obter expressões da linguagem da aritmética substituindo **partes** das expressões obtidas do nível 1 por "símbolos abstratos" (normalmente **letras**) que se chamam **variáveis**.

No nível 2, substituímos partes da expressões para obter **leis gerais**. Por exemplo, em (2.9), se consideramos que a série (A) é verdadeira, podemos representá-la pela lei geral (B).

(2.9) (A) $1 \times 0 = 0$; $2 \times 0 = 0$; $3 \times 0 = 0$; $4 \times 0 = 0$; $5 \times 0 = 0$; $6 \times 0 = 0$; ...
(B) $a \times 0 = 0$. (onde a equivale a qualquer nome de número)

Qualquer pessoa que tenha passado pelo aprendizado da matemática na escola vai reconhecer aqui as "fórmulas" utilizadas para resolver os problemas matemáticos (a fórmula da equação de segundo grau, por exemplo).

No nível 3, também conhecido como "Análise" ou "Cálculo Superior", obtêm-se expressões pela substituição de partes das expressões construídas no nível 1, tal como no nível 2, mas com finalidade distinta: quer-se chegar a **operações sobre operações**. Dito de outra forma, no nível 1, parte-se de nomes de números e chega-se a nomes de números ou a "proposições" particulares; no nível 2, parte-se de "proposições" particulares e chega-se a "proposições" gerais; no nível 3, parte-se de nomes complexos de números ("termos") e chega-se a **nomes de operações**. Vejamos como se dá o trabalho com as operações nesse terceiro nível.

Tomemos um nome complexo do número **cinco** como ponto de partida: **3 + 2**. Façamos a substituição de um dos nomes de número constituintes da expressão pela variável x, obtendo: x **+ 2**. Agora, o que é essa nova expressão? Certamente, não se trata mais de um nome de número. Nem é uma "lei geral". Essa nova expressão é um tipo especial de operação, denominado **função**, que vai operar sobre nomes de números (simples ou complexos) relacionando-os com outros nomes de números de forma sistemática. Vejamos isso numa pequena tabela:

x + **2**	
1	3
2	4
3	5
4	6
...	...

número. Os matemáticos, de modo geral, recusam essa forma de obtenção recursiva dos nomes de número porque ela introduz ambigüidade no processo de obtenção das expressões. Mas essa questão, na verdade, não nos interessa aqui.

TABELA 2.2

O que essa tabela representa é a relação sistemática entre os dois conjuntos de nomes de números listados verticalmente. x **+ 2** é uma operação que ao nome de número 1 relaciona o nome de número 3; ao nome de número 2 relaciona o nome de número 4, e assim por diante. Usando a terminologia técnica, podemos dizer que x **+ 2** é uma **função** que tem **valor** 3 para o **argumento** 1, tem **valor** 4 para o **argumento** 2, tem **valor** 6 para o **argumento** 4 e assim por diante.

O importante – e o que nos interessa especialmente aqui – é que qualquer expressão da linguagem da aritmética, por mais complexa que possa ser, sempre poderá ser analisada em termos de **funções** que operam sobre **argumentos** para produzir **valores**.

As funções, na linguagem da aritmética podem ser classificadas em **funções descritivas** e **funções proposicionais**. As funções descritivas têm nomes de números como argumentos e como valores ("x **+ 2**" é uma função descritiva). As funções proposicionais, diferentemente das descritivas, têm o **verdadeiro** e o **falso** como valores. A função " x **+ 2 = 5**" é um exemplo de função proposicional e isso fica claro se observarmos a tabela que essa função determina:

x **+ 2 = 5**	
1	F
2	F
3	V
...	...

TABELA 2.3

O que a tabela 2.3 mostra é que o valor da função para o argumento 1 é F (= falso) e isso se dá porque a expressão "**1 + 2 = 5**" é uma proposição falsa. Pelos resultados da tabela, podemos ver que a função só será V (= verdadeira) para o argumento 3 ("**3 + 2 = 5**" é uma proposição verdadeira).

É interessante observar que uma das atividades mais freqüentes no ensino da aritmética nas séries iniciais da escola é a descoberta do argumento para o qual a função apresentada é verdadeira. Essa atividade é chamada de "descobrir o valor da incógnita em equações de primeiro grau". É interessante observar, também, que o tratamento das **funções** na escola passa ao largo de abordagens como a que apresentamos acima (as funções são apresentadas simplesmente como "relações entre conjuntos").

Tendo visto rapidamente as principais características da linguagem da aritmética, podemos passar para a apresentação de uma linguagem artificial, construída segundo as características da linguagem da aritmética, adequada ao **cálculo lógico**.

2.3.3. A linguagem do cálculo de predicados (CP).

Como toda linguagem adequada ao cálculo, nossa linguagem deve possuir um conjunto de elementos primitivos e um conjunto de regras de boa formação. Os elementos primitivos constituem nosso **vocabulário** (**V**) e são os seguintes:

(a) Símbolos de predicado: (a1): predicados de um lugar: $\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \mathbf{P_3}, \ldots, \mathbf{P_n}$;
(a2): predicados de dois lugares: $\mathbf{Q_1}, \mathbf{Q_2}, \mathbf{Q_3}, \ldots, \mathbf{Q_n}$;
(a3): predicados de três lugares: $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}, \mathbf{T_3}, \ldots, \mathbf{T_n}$;

(b) Constantes: ***a, b, c, d, e, f*** ;
(c) Variáveis: ***x, y, z, w*** ;
(d) Conetivos: (d1): conetivo de um lugar: $\neg$
(d2): conetivos de dois lugares: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
(e) Quantificadores: $\forall$, $\exists$;
(f) Sinais de pontuação: **)**, **(** .

Dado o vocabulário **V**, podemos supor que as expressões de nossa linguagem são obtidas pela combinação dos símbolos constantes em **V**. Se deixarmos que os símbolos se combinem livremente, iremos obter um conjunto infinito de cadeias de símbolos, desde cadeias de um único símbolo, passando por cadeias de dois, três, quatro símbolos, até cadeias de *n* símbolos. Essas cadeias de símbolos resultantes da combinação livre de elementos de **V** constituem um conjunto que é chamado de **monóide livre**. Toda linguagem, no entanto, será apenas um subconjunto desse monóide livre obtido a partir do vocabulário. Assim, nossa linguagem **CP** deverá ser definida sobre o monóide livre obtido em **V**. Essa definição – a rigor, a definição da **linguagem** – é obtida a partir de um conjunto de **regras de boa formação**.

As regras de boa formação (regras que nos dizem que combinações dos símbolos de **V** serão admitidas como expressões da linguagem **CP**) são as seguintes:

R1. Se δ é um símbolo de predicado de *n* lugares e se $\tau_1, \ldots, \tau_n$ $(n \geq 1)$ são constantes ou variáveis, então $\delta\tau_1, \ldots, \tau_n$ é **expressão bem formada** (**EBF**)[11].
R2. Se ϕ é **EBF**, então $\neg\phi$ é **EBF**.
R3. Se ϕ e ψ são **EBF** e κ é um conetivo de dois lugares, então $(\phi\ \kappa\ \psi)$ é **EBF**.
R4. Se ϕ é **EBF** e υ é uma variável, $\forall\upsilon\phi$ e $\exists\upsilon\phi$ são **EBF**.
R5. Apenas é **EBF** o que for obtido pelas regras R1-R4.

Vamos construir algumas expressões para exemplificar o funcionamento das regras:

$\mathbf{P_1}$ é um predicado de um lugar;
a é uma constante;
por R1, $\mathbf{P_1}$ ***a*** é **EBF**.

$\mathbf{Q_3}$ é um predicado de dois lugares;
x e ***y*** são variáveis;
Por R1, $\mathbf{Q_3}$ ***xy*** é **EBF**.

$\mathbf{T_3}$ é um predicado de três lugares;
a, ***f*** são constantes;
x é uma variável;
por R1, $\mathbf{T_3}$ ***axf*** é **EBF**.

$\mathbf{P_1}$ ***a*** é **EBF**;
$\neg$ é um conetivo de um lugar;
Por R2, $\neg$ $\mathbf{P_1}$ ***a*** é **EBF**.

$\mathbf{P_1}$ ***a*** é **EBF**;
$\mathbf{T_3}$ ***axf*** é **EBF**;
$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ são conetivos de dois lugares;

[11] É freqüente na literatura o termo "**fórmula**" como designador das **EBF**.

Por R3, ($\mathbf{P_1}$ ***a*** $\wedge$ $\mathbf{T_3}$ ***axf***), ($\mathbf{P_1}$ ***a*** $\vee$ $\mathbf{T_3}$ ***axf***), ($\mathbf{P_1}$ ***a*** $\rightarrow$ $\mathbf{T_3}$ ***axf***) e ($\mathbf{P_1}$ ***a*** $\leftrightarrow$ $\mathbf{T_3}$***axf***) são **EBF**.

$\mathbf{T_3}$ ***axf*** é **EBF**;
x é uma variável;
Por R4, $\forall$ ***x***$\mathbf{T_3}$ ***axf*** e $\exists$ ***x***$\mathbf{T_3}$ ***axf*** são **EBF**.

É preciso considerar que as regras são **recursivas**, isto é, aplicam-se indefinidas vezes sobre seu próprio resultado. Assim, uma vez que $\neg$$\mathbf{P_1}$ ***a*** é **EBF**, também serão **EBF** as seguintes cadeias de símbolos: $\neg\neg$ $\mathbf{P_1}$ ***a***, $\neg\neg\neg$ $\mathbf{P_1}$ ***a***, $\neg\neg\neg\neg$ $\mathbf{P_1}$ ***a***, $\neg\neg\neg\neg\neg$ $\mathbf{P_1}$ ***a***, etc. O mesmo acontece com as outras regras. Por exemplo, se ($\mathbf{P_1}$***a*** $\wedge$ $\mathbf{T_3}$***axf***) e $\forall$***x***$\mathbf{T_3}$***axf*** são **EBF**, (($\mathbf{P_1}$ ***a*** $\wedge$ $\mathbf{T_3}$ ***axf***) $\rightarrow\forall$ ***x***$\mathbf{T_3}$ ***axf***) também é **EBF**.

Na realidade, a linguagem **CP** é o conjunto das **EBF** que são admitidas sobre **V**. Os leitores que tiveram contato com o trabalho de Noam Chomsky na lingüística, já devem ter percebido que estamos falando aqui de noções muito próximas de noções como **gramática gerativa** ($\approx$ conjunto de regras de boa formação), **linguagem como o conjunto de todas e apenas as expressões gramaticais** ($\approx$ conjunto das **EBF**), etc. A proposta chomskiana é, ao menos nos primeiros trabalhos, a de construir um cálculo para o estabelecimento da boa formação sintática das expressões das línguas naturais e a semelhança de seu trabalho com o trabalho dos lógicos modernos é mais do que simples coincidência.

Antes de seguir adiante, vamos ver algumas noções necessárias para a compreensão do que se segue. Comecemos com as noções de **variável ligada** e **variável livre**. Como vimos, as **EBF** podem conter variáveis, como "$\mathbf{T_3}$***axf*** ", por exemplo, que contém a variável ***x***. A **EBF** "$\forall$***x*** $\mathbf{T_3}$ ***axf*** " também contém variáveis, como podemos ver. No entanto, o estatuto das variáveis em cada um desses casos é distinto. No segundo caso ("$\forall$***x*** $\mathbf{T_3}$ ***axf*** ") a variável ***x*** ocorre duas vezes: uma junto ao quantificador e outra dentro da **EBF** quantificada. Cada uma dessas duas ocorrências tem um "papel" distinto: a variável interna à **EBF** quantificada é uma verdadeira variável; a variável que acompanha o quantificador apenas indica que variável (ou variáveis) o quantificador **liga**. Assim, a expressão "$\forall$***x*** " quer dizer que o quantificador "$\forall$" **liga** a variável ***x*** presente na **EBF** que o segue – que é a variável ***x*** de "$\mathbf{T_3}$***axf*** ". Dessa forma, a expressão (a **EBF**) "$\forall$***x***$\mathbf{T_3}$***axf*** " tem apenas **uma** variável e essa variável é **ligada** pelo quantificador $\forall$. Por outro lado, se tomarmos a **EBF** "$\mathbf{T_3}$***axf*** ", veremos que ela também contém uma variável mas que essa variável não está ligada por nenhum quantificador: é uma variável **livre**.

Podemos agora definir **proposição** como a **EBF** em que não há ocorrências de variáveis livres, e podemos denominar as **EBF** em que ocorrem variáveis livres de **funções proposicionais**[12].

É importante perceber que uma **EBF** como "$\forall$***y***$\mathbf{T_3}$***axf*** " é a expressão de uma **função proposicional** e não de uma proposição, uma vez que o quantificador é **vácuo** (liga a variável ***y***, que não existe na **EBF** "$\mathbf{T_3}$***axf*** ") e a variável ***x***, conseqüentemente, permanece **livre**. Na **EBF** "$\forall$***x***$\mathbf{P_1}$***a*** ", por outro lado, na medida em que não existe em "$\mathbf{P_1}$***a***" a variável ***x***, o quantificador é também **vácuo**, mas, como não há variável livre em "$\mathbf{P_1}$***a***", essa expressão é uma proposição. Na realidade, podemos propor, de forma geral, que qualquer EBF quantificada vacuamente seja idêntica à EBF sem quantificador, o que pode ser dito numa "regra" como a seguinte:

---

[12]Encontramos também, na literatura especializada, o nome **EBF aberta** (ou "**fórmula aberta**") para as funções proposicionais e o nome **EBF fechada** (ou "**fórmula fechada**") para as proposições.

$\forall x\mathbf{P}_1 a = \mathbf{P}_1 a$
$\forall y\mathbf{T}_3 axf = \mathbf{T}_3 axf$
etc.

Todas as pessoas que de um jeito ou de outro já pensaram em "linguagem", devem estar se perguntando sobre o que podem significar essas expressões abstratas, aparentemente inúteis, de que estamos falando. Parece claro ao senso comum que uma "linguagem" é um instrumento de comunicação e que, portanto, deve ser capaz de "falar sobre coisas". Na realidade, o que vimos fazendo até agora é **construir uma sintaxe**, e não uma linguagem propriamente. Sendo apenas uma **sintaxe**, o aparato que construímos é apenas um procedimento que nos permite estabelecer um conjunto de expressões que são consideradas "corretas" (ou pertencentes a uma "linguagem" abstrata que chamamos de **CP**) e um conjunto de relações sistemáticas que se dão entre elas. Se quisermos transformar nosso cálculo numa linguagem verdadeira, basta que associemos a ele uma **interpretação**. Mas antes disso, vamos apresentar, sem nos determos em explicações, algumas **relações** que podem ser estabelecidas entre as **EBF** de **CP**.

Consideremos que A e B pertencem ao conjunto das **EBF** . As seguintes **identidades**[13] são sempre verdadeiras:

$$\begin{array}{rcl} \neg\neg A & \equiv & A \\ (A \wedge B) & \equiv & (B \wedge A) \\ (A \vee B) & \equiv & (B \vee A) \\ (A \leftrightarrow B) & \equiv & (B \leftrightarrow A) \\ (A \wedge B) & \equiv & \neg(\neg A \vee \neg B) \\ (A \rightarrow B) & \equiv & \neg(A \vee B) \\ \exists x\, A & \equiv & \neg\forall x\, \neg A \end{array}$$

TABELA 2.4

Passemos agora à construção de uma **interpretação** para a linguagem **CP**. Uma interpretação para uma linguagem qualquer é, parcialmente, uma função que vai associar univocamente um significado a cada uma das expressões bem formadas da linguagem. Para realizar essa tarefa, uma interpretação é constituída de: (i) um conjunto **universo** (**U**), arbitrário, que contém os indivíduos a que as constantes da linguagem vão ser associadas; (ii) uma **função** ($\boldsymbol{F}_1$) que associa cada constante da linguagem a um indivíduo de **U**; (iii) uma **função** ($\boldsymbol{F}_2$) que associa a cada predicado de *n* lugares um conjunto ordenado de *n* indivíduos de **U** (uma "*n-tupla*" ordenada); (iv) um conjunto de **regras de interpretação** (**R**). É interessante destacar que **U**, $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ podem variar de interpretação para interpretação. **R**, por outro lado, por ser ligado diretamente às regras de obtenção de **EBF**, é sempre igual em todas as interpretações.

Chamemos nossa interpretação de $\boldsymbol{I}_1$ e estipulemos o seguinte:

$\mathbf{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{a}) = 1$
$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{b}) = 2$
$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{c}) = 3$
$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{d}) = 4$

[13]Estamos entendendo aqui por **identidade** a possibilidade de substituir uma **EBF** pela outra em todas as suas ocorrências. As **EBF** "identificadas" são consideradas **equivalentes**.

$\boldsymbol{F}_1$ $(\boldsymbol{e}) = 5$

$\boldsymbol{F}_1$ $(\boldsymbol{f}) = 6$

$\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}_2$ $(\mathbf{P}_1) = \{1, 3, 5\}$

$\boldsymbol{F}_2$ $(\mathbf{P}_2) = \{2, 4, 6\}$

$\boldsymbol{F}_2$ $(\mathbf{Q}_1) = \{<1,2>, <2,3>, <3,4>, <4,5>, <5,6>\}$

$\boldsymbol{F}_2$ $(\mathbf{T}_2) = \{<1,2,3>, <2,3,4>, <3,4,5>, <4,5,6>\}$

R =

S1. Se δ é um símbolo de predicado de *n* lugares e se τ_1 , ... , τ_n são constantes, então o valor de $\delta\tau_1, \ldots, \tau_n$ na interpretação é o valor de δ na interpretação para os argumentos $\tau_1, \ldots, \tau_n$.

S2. Se ϕ é uma **EBF fechada**, o valor de $\neg\phi$ na interpretação será **V** (verdadeiro) se, e apenas se, o valor de ϕ na interpretação for **F** (falso).

S3. Se ϕ e ψ são **EBF fechadas**, o valor de $(\phi \wedge \psi)$ na interpretação será **V** se, e apenas se, o valor de ϕ e de ψ na interpretação for, para ambos, **V**.

S4. Se ϕ e ψ são **EBF fechadas**, o valor de $(\phi \vee \psi)$ na interpretação será **V** se, e apenas se, o valor de ϕ e de ψ na interpretação for, ao menos para um deles, **V**.

S5. Se ϕ e ψ são **EBF fechadas**, o valor de $(\phi \rightarrow \psi)$ na interpretação será **V** se, e apenas se, o valor de ϕ na interpretação for **F** ou se o valor de ψ na interpretação for **V**.

S6. Se ϕ e ψ são **EBF fechadas**, o valor de $(\phi \leftrightarrow \psi)$ na interpretação será **V** se, e apenas se, o valor de ϕ e de ψ na interpretação for o mesmo (**V** ou **F**).

S7. Se ϕ é **EBF** e ϕ contém ocorrência da variável υ, então $\forall\upsilon\phi$ terá valor **V** na interpretação se ϕ for **V** na interpretação sempre que substituamos a variável υ em ϕ por uma constante.

S8. Se ϕ é **EBF** e ϕ contém ocorrência da variável υ, então $\exists\upsilon\phi$ terá valor **V** na interpretação se ϕ for **V** na interpretação ao menos para uma substituição da variável υ em ϕ por uma constante.

Expliquemos mais detalhadamente o funcionamento de cada um desses componentes da interpretação. Em primeiro lugar, note-se que definimos arbitrariamente um universo de discurso – bastante simples e reduzido – constituído apenas pelos números de 1 a 6. É preciso observar que o universo não é constituído por símbolos, mas por indivíduos do mundo. Assim, o que está presente em **U** não são os **numerais** de 1 a 6, mas os próprios **números**, enquanto objetos do mundo. Em segundo lugar, nossas funções $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ dizem qual o "significado" de cada constante e de cada predicado com relação aos objetos presentes em **U**: a constante ***a*** (que é uma expressão de nossa linguagem) "significa" o número 1; o predicado $\mathbf{P}_1$ "significa" o conjunto não ordenado de números {1, 3, 5}; o predicado $\mathbf{Q}_1$ "significa" o conjunto não ordenado de pares ordenados de números {<1,2>, <2,3>, etc.}[14]; e o predicado $\mathbf{T}_2$ "significa" o conjunto não ordenado de triplas ordenadas de números {<1,2,3>, etc.}. As regras de interpretação **R** necessitam de uma atenção maior: vejamos cada uma individualmente. Comecemos com S1.

O que se diz em S1 é que uma **EBF** constituída apenas por um símbolo de predicado e um conjunto de constantes vai ter o seu valor na interpretação determinado

[14]Uma observação notacional: as **chaves** ({, }) indicam "conjuntos não ordenados", i.e., conjuntos em que a ordem dos elementos não é importante ({a, b} = {b, a}). Os **parênteses angulares** (< , >) indicam "elementos ordenados", i.e., seqüências de elementos em que a ordem de aparecimento é importante (<a, b> ≠ <b, a>)

pelo valor do predicado (que é uma **função proposicional**) para os argumentos que são representados pelas constantes. Isso quer dizer que o valor de uma **EBF** é definido numa tabela como a que vimos acima. Tomemos, por exemplo, a **EBF** " $\mathbf{P_1}$ ***a***". Essa **EBF** é constituída por uma **função** e um **argumento**, como de resto todas as **EBF** de nossa linguagem. A função é obtida pela substituição da constante por uma variável. Se substituirmos a constante ***a***, presente na **EBF**, pela variável ***x***, obtemos uma **função proposicional** ("$\mathbf{P_1}$ ***x*** ") que determina uma tabela como a seguinte:

$\mathbf{P_1}$ ***x***	
a	**V**
b	**F**
c	**V**
d	**F**
e	**V**
f	**F**

TABELA 2.5

Como podemos saber qual o valor correto da função para cada um dos argumentos? É simples. Sabemos qual o valor de cada constante por F_1 e sabemos o valor de cada predicado por F_2 . Assim, basta ver se o valor da constante é também parte do valor do predicado ou não: se for, a **proposição** é **V**, se não for, a **proposição** é **F**. Sabemos, por F_1 , que o valor de ***a*** é o número 1; sabemos também que o valor de $\mathbf{P_1}$ é o conjunto {1, 3, 5}. Sabemos, então, que o valor da constante, na proposição $\mathbf{P_1}$ ***a***, é membro do conjunto que é o valor do predicado na mesma proposição e, conseqüentemente, sabemos que a proposição $\mathbf{P_1}$ ***a*** é **verdadeira** na interpretação. Se seguirmos o mesmo raciocínio com relação à **EBF** " $\mathbf{P_1}$ ***b***", concluiremos que o valor de ***b*** na interpretação (o número 2) não é parte do valor do predicado $\mathbf{P_1}$ na interpretação e que, portanto, a proposição $\mathbf{P_1}$ ***b*** é **falsa** na interpretação. O mesmo pode ser feito para os outros casos, resultando exatamente na tabela acima. De certa forma, a **EBF** " $\mathbf{P_1}$ ***a***" quer dizer que o "significado" de ***a*** pertence ao conjunto que é o "significado" de $\mathbf{P_1}$ (o que equivale a dizer que ***a*** é um $\mathbf{P_1}$).

A determinação do valor de proposições que possuam predicados de dois ou de três argumentos se dá exatamente da mesma forma, só que ao invés de procurarmos ver se o valor da constante é parte do valor do predicado, iremos ver se o valor da série **ordenada** de constantes é um par ou uma tripla ordenada pertencente ao valor do predicado. Por exemplo, se tomarmos a **EBF** "**T*abc***" e buscarmos estabelecer o valor das constantes, veremos que, por F_1 , o valor de ***a*** é o número 1, o valor de ***b*** é o número 2, e o valor de ***c*** é o número 3. Veremos também que no conjunto de triplas ordenadas que constitui o significado de **T**, por F_2, uma das triplas ordenadas presentes é justamente <1, 2, 3>, o que nos permite concluir que **T*abc*** é uma proposição **verdadeira** na interpretação.

Passando agora às outras regras, vamos ver que sua aplicação depende crucialmente do valor (**V** ou **F**) atribuído às expressões mais simples obtidas pela regra S1. Comecemos considerando o que já sabemos. Já sabemos que $\mathbf{P_1}$ ***a*** é **V**, que $\mathbf{P_1}$ ***b*** é **F** e que **T*abc*** é **V**. Sabemos também que essas três expressões são **fechadas**, i.e., não apresentam variáveis livres.

Agora, por S2, podemos dizer que ¬$\mathbf{P_1}$ ***a*** é **F**, que ¬ $\mathbf{P_1}$ ***b*** é **V** e que ¬**T*abc*** é **F**. Na realidade, a operação semântica que o conetivo de um lugar "¬" realiza corresponde à seguinte tabela, em que a letra grega ϕ é uma **EBF** qualquer:

ϕ	$\neg\phi$
V	**F**
F	**V**

TABELA 2.6

O que a tabela diz é que se ϕ é **V**, $\neg\phi$ é **F**, e que se ϕ é **F**, $\neg\phi$ é **V**. Esse conetivo de um lugar tem um comportamento semelhante ao da **negação sentencial** das línguas naturais. Por exemplo, dissemos acima que o significado de $\mathbf{P}_1$ ***a*** equivaleria, *grosso modo* à afirmação de que o significado de ***a*** pertence ao conjunto que é o significado de $\mathbf{P}_1$. Assim, o significado de $\neg\mathbf{P}_1$ ***a*** equivaleria à afirmação de que o significado de ***a*** **não pertence** ao conjunto que é o significado de $\mathbf{P}_1$.

As operações semânticas realizadas pelos conetivos de dois lugares podem ser representadas também por tabelas, em que o valor da expressão que apresenta o conetivo é definido a partir dos valores das expressões componentes. S3, por exemplo, que é a regra de interpretação da **conjunção**, vai dizer que a expressão complexa é **V** apenas no caso de também serem **V** as duas expressões mais básicas que servem de argumentos para o conetivo. Assim, a tabela associada a S3 é a tabela 2.6 (onde ϕ e ψ são quaisquer expressões bem formadas **fechadas**):

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

TABELA 2.7

O comportamento da **conjunção lógica** assemelha-se ao comportamento da conjunção aditiva ***e*** da gramática do português. Observe. Para se considerar **verdadeira** a expressão "***a*** pertence a $\mathbf{P}_1$ ***e*** ***b*** não pertence a $\mathbf{P}_1$" é necessário que tanto a primeira afirmação ("***a*** pertence a $\mathbf{P}_1$ ") quanto a segunda ("***b*** não pertence a $\mathbf{P}_1$ ") sejam verdadeiras.

A tabela associada à regra de interpretação da **disjunção** S4, que nos diz que a expressão complexa será **V** quando uma das duas expressões mais básicas ligadas pelo conetivo (um dos "argumentos") for **V**, é a seguinte:

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

TABELA 2.8

A **disjunção lógica** assemelha-se ao **ou** da língua portuguesa, numa interpretação "inclusiva". Nessa interpretação, dizer "A *ou* B" significa dizer "A", "B" ou "A e B". Talvez fôssemos mais fiéis ao significado da disjunção se disséssemos que ela se assemelha à expressão portuguesa **e/ou**, de uso corrente em transações comerciais.

A tabela associada à regra de interpretação S5 – a regra de interpretação da **implicação** – deve representar o comportamento desse conetivo de dois lugares: só teremos uma expressão complexa **F** se o primeiro argumento (o "antecedente" da implicação) for **V** e o segundo argumento (o "conseqüente" da implicação) for **F**. A tabela é a seguinte:

ϕ	ψ	$(\phi \rightarrow \psi)$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

TABELA 2.9

A implicação lógica é um conetivo um pouco mais distante das conjunções reconhecidas pelas gramáticas do português e a associação a expressões da língua natural são um tanto contra-intuitivas. De qualquer forma, podemos dizer que a implicação assemelha-se à expressão "**se..., então...**" do português, ao menos em alguns de seus sentidos.

A regra de interpretação S6 – regra de interpretação da **dupla implicação** – determina que a expressão complexa só tenha valor **V** quando os valores das duas expressões conectadas for idêntico, não importando se são ambos **V** ou ambos **F**, conforme a tabela abaixo:

ϕ	ψ	$(\phi \leftrightarrow \psi)$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

TABELA 2.10

A dupla implicação equivale à expressão portuguesa, de uso extremamente restrito, "**se, e apenas se**".

As duas regras faltantes – S7 e S8 – são um pouco mais complexas e exigem uma exposição mais longa. As regras de interpretação S7 e S8 supõem, inicialmente, uma **EBF** que contém ocorrência de uma variável livre ("υ"). Ora, como vimos, uma **EBF** aberta não é uma proposição, mas uma **função proposicional**. Podemos concluir, então, que S7 e S8 são regras que operam sobre funções proposicionais e não sobre proposições. Já tratamos acima de funções proposicionais, de forma que basta-nos recuperar a discussão. Vamos repetir aqui, para a comodidade do leitor, o exemplo analisado:

$\mathbf{P}_1\, \boldsymbol{x}$	
a	**V**
b	**F**
c	**V**
d	**F**
e	**V**
f	**F**

TABELA 2.5

Como vimos, "$\mathbf{P}_1\, \boldsymbol{x}$" é uma função proposicional e, como tal, dá ensejo a uma tabela em que a coluna da esquerda (coluna dos "argumentos") é preenchida por constantes e a coluna da direita (coluna dos "valores") é preenchida por valores de verdade (**V** ou **F**). De maneira geral, toda função proposicional determinará uma tabela semelhante a essa. Agora podemos passar à explicação de S7 e S8.

O que a regra de interpretação S7 diz é que a expressão "$\forall\upsilon\phi$" só será verdadeira se a tabela determinada por ϕ (que é uma função proposicional, como vimos) tiver a coluna da direita (coluna dos valores) preenchida com **V** para qualquer constante que possa aparecer na coluna dos argumentos. Ou seja, a expressão $\forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{P_1}\ \boldsymbol{x}$ só será **V** no caso em que o preenchimento da posição de ***x*** por ***a***, ***b***, etc. sempre resultar no valor **V**. Obviamente, na interpretação que estamos assumindo, nem sempre o preenchimento por uma constante da posição ocupada pela variável ***x*** na expressão $\mathbf{P_1}\ \boldsymbol{x}$ resulta num valor **V** ($\mathbf{P_1}\ \boldsymbol{b}$, por exemplo, tem valor **F**), o que nos permite concluir que a expressão $\forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{P_1}\ \boldsymbol{x}$, na interpretação, tem valor **F**. A expressão "$\forall\upsilon\phi$" deve ser lida "para todo υ, onde υ é uma constante qualquer, ϕ (que deve conter ocorrência livre de υ) é uma expressão de valor **V**".

A regra de interpretação S8, por sua vez, nos diz que a expressão "$\exists\upsilon\phi$" será **V** se houver ao menos uma constante que colocada como argumento da função proposicional (colocada na coluna da esquerda) resulte num valor **V**. Esse é exatamente o caso de $\exists \boldsymbol{x}\ \mathbf{P_1}\ \boldsymbol{x}$, uma vez que $\mathbf{P_1}\ \boldsymbol{x}$ resulta em valor **V** para ***a***, ***c*** e ***e***. Assim, na interpretação que estamos assumindo, $\exists \boldsymbol{x}\ \mathbf{P_1}\ \boldsymbol{x}$ é uma **EBF** verdadeira (de valor **V**). A expressão "$\exists\upsilon\phi$" tem a seguinte leitura: "existe ao menos um υ, onde υ é uma constante qualquer, para o qual ϕ (que deve conter ocorrência livre de υ) é uma expressão verdadeira (de valor **V**)".

2.3.4. Sintaxe e semântica de CP.

Feita essa apresentação da linguagem **CP** — que representa bem o conjunto das linguagens formais desenvolvidas pelos lógicos — podemos passar a ver como essa linguagem pode sugerir caminhos para a construção de uma semântica para as línguas naturais, bem como para uma profunda revisão da sintaxe.

CP, como de resto toda linguagem, possui uma *sintaxe* e uma *semântica*. A sintaxe de CP é o conjunto de regras de boa formação, que delimita o conjunto das expressões gramaticais, i.e., o conjunto de todas e apenas as expressões que pertencem à linguagem. A semântica de CP é um procedimento algorítmico que associa a cada uma das expressões da linguagem uma interpretação, ou seja, um objeto qualquer do modelo de interpretação.

Se prestarmos atenção à arquitetura da "gramática" de CP (sintaxe e semântica), vamos ver que (i) as expressões básicas de CP são "categorizadas", i.e., pertencem a categorias sintáticas distintas, como "constantes", "variáveis", "predicados de um lugar", "conetivos binários", "quantificadores", etc.; (ii) cada uma dessas categorias recebe uma interpretação uniforme no componente semântico: as constantes, por F_1, são associadas a indivíduos do modelo, os predicados de um lugar, por F_2, são associados a conjuntos de indivíduos do modelo, os conetivos e os quantificadores, enquanto **constantes lógicas**, são associados a regras gerais de interpretação, etc.; (iii) com base na interpretação dos elementos básicos, as expressões complexas são interpretadas por meio de regras — a cada regra de construção de expressões bem formadas corresponde uma regra de interpretação.

A sintaxe de CP é autônoma, na medida em que suas regras independem das interpretações possíveis, mas sua formulação, certamente, leva em conta as possibilidades interpretativas dos elementos formais em jogo, ou seja, a sintaxe é autônoma mas não é insensível à semântica. A semântica de CP, por sua vez, é absolutamente dependente da sintaxe, de um lado, e do modelo de interpretação, de outro. Em outras palavras, a semântica não é mais do que um sistema de regras que associa expressões construídas pela sintaxe a "estados de coisas" presentes no modelo de interpretação (indivíduos, conjuntos, relações entre indivíduos e/ou conjuntos, valores de verdade, etc.). A semântica, então, só vai funcionar adequadamente se as expressões construídas pela sintaxe e os elementos presentes no conjunto universo, **U**, do modelo de interpretação, e suas possibilidades de combinação, forem compatíveis.

De certa forma, então, **fazer semântica** significa construir modelos de interpretação compatíveis com a sintaxe da linguagem ou construir uma linguagem compatível com um modelo de interpretação dado. Nas linguagens formais, como CP, essa escolha não se torna um dilema porque, como vimos, a sintaxe é construída pensando nos modelos de interpretação possíveis e os modelos são especificados com vistas à sintaxe construída. Nas línguas naturais, no entanto, a escolha do caminho pode ser um belo problema. Chomsky, por exemplo, parte da sintaxe, deixando a questão da especificação do modelo — e a semântica correspondente — para um momento posterior; Montague, devido a sua formação de lógico, vai tentar construir a sintaxe das línguas naturais simultaneamente com a especificação do modelo de interpretação, como se as línguas naturais fossem linguagens formais. Dessa forma, para Montague, **fazer sintaxe** e **fazer semântica** se constituem numa única atividade.

Dentre as inúmeras formas de realizar essa atividade de fazer semântica e sintaxe que poderíamos imaginar, existe uma que é particularmente interessante e que, não por acaso, é a forma escolhida por Montague: a atribuição de **tipos** simultaneamente aos objetos sintáticos e aos objetos do modelo de interpretação. Antes de seguirmos adiante, então, precisamos ver em que consistem esses "tipos".

2.4. A Teoria dos Tipos Lógicos.

A Teoria dos Tipos Lógicos é desenvolvida por Bertrand Russell para evitar os paradoxos que começaram a ser reconhecidos na matemática do início do século XX. Os paradoxos lógicos de Burali-Forti, de Cantor[15], de Russell[16], de Mirimanoff[17], bem como

[15]Os paradoxos de Burali-Forti e de Cantor requerem alguma familiaridade com a aritmética dos ordinais transfinitos. Sua apresentação extrapola os objetivos desse livro e o leitor interessado pode encontrar mais detalhes em CURRY 1963 e em COPI 1971.

[16]O paradoxo de Russell, na apresentação que encontramos em CURRY (1963), é o seguinte: intuitivamente, podemos considerar que classes de objetos formam novos objetos. Assim, podemos considerar a classe das cadeiras, a classe de todos os homens, de todas as casas, dos números naturais, etc. As línguas naturais revelam isso com a presença de termos que nomeiam essas classes ("humanidade", p. ex., para a classe de todos os homens). Do mesmo modo, podemos considerar *classes de classes* (cadeiras + armários + mesas + ... + sofás = móveis) até chegarmos à classe de todas as classes. Podemos distinguir dois tipos de classes: próprias e impróprias. Classes próprias são aquelas, como homens, cadeiras, números, etc., que não são membros de si mesmas. Consideremos agora *R* (a classe de Russell) como a classe de todas as classes próprias. A questão toda surge agora com respeito ao estatuto de *R*. Se *R* for uma classe própria, então, uma vez que R é a classe de todas as classes próprias, R é membro de R, e, em conseqüência, R não é uma classe própria. Por outro lado, se R não for uma classe própria, então R não será membro de R e será, conseqüentemente, uma classe própria. Qualquer assunção inicial levará a uma contradição. Em símbolos:

$x \in R \leftrightarrow \neg(x \in x)$ [$= x \notin x$]

$R \in R \leftrightarrow \neg(R \in R)$ [$= R \notin R$]

A afirmação de que $R \in R$ é equivalente a sua própria falsidade e assim, se for verdadeira, será também falsa e vice-versa.

[17]O paradoxo de Mirimanoff, publicado em 1917, envolve as classes "básicas", definidas como toda classe X para as qual não há seqüências de classes (não necessariamente distintas) $y_1, y_2, y_3, \ldots$, tais que $\ldots \in y_3 \in y_2 \in y_1 \in X$. Chamemos de W a classe de todas as classes "básicas". Se W for "básica",

os paradoxos semânticos de Richard[18] e de Grelling[19], ameaçavam as fundações do grande edifício construído pela matemática moderna. Nas palavras de Irving Copi:

> *Os paradoxos revelavam que a teoria dos conjuntos intuitiva, subjacente à matemática, requeria uma reconstrução radical para poder servir de fundação adequada. Os paradoxos revelavam que a lógica intuitiva, vista como ferramenta indispensável e suficiente para a derivação das verdades matemáticas, também requeria uma reconstrução radical.*
> (COPI 1971: 19)

O que os paradoxos revelam, em especial o paradoxo de Russell, é que o modo convencional de especificar classes pela apresentação de condições necessárias e suficientes de pertença, embora intuitivamente válido, não podia ser aceito como universalmente válido. Em outras palavras, algumas classes não poderiam ser especificadas dessa maneira.

Por exemplo, a condição $x \in x$ [x pertence a x] determina a classe $\alpha = \{x: x \in x\}$ [= a classe dos x tais que x pertence a x]. Essa classe α, por si só, não leva a nenhuma contradição. Mas, se formarmos o complemento de α, que a Álgebra Booleana garante que podemos formar, obteremos a classe de Russell $K = \sim\alpha = \{x: \neg(x \in x)\}$[$\sim\alpha$ = a classe dos x tais que x não pertence a x] que leva a contradições.

Diante do paradoxo, as alternativas possíveis seriam: ou desqualificamos a operação de formação de complementares, considerando-a uma operação ilegítima, ou recusamos a formação de classes pelo simples estabelecimento de condições de pertença. Recusar a complementaridade, e com ela a álgebra de Boole, é uma alternativa inaceitável.

Para garantir a teoria de conjuntos e, simultaneamente, evitar os paradoxos, Bertrand Russell propõe, em 1903, o que ele chama de "Doutrina de Tipos", que vai gerar a Teoria Simples de Tipos Lógicos e a Teoria Ramificada de Tipos Lógicos[20].

A Teoria Ramificada dos Tipos Lógicos foi publicada inicialmente por Russell em 1908 e retomada em 1910 no primeiro volume dos *Principia Mathematica*

---

então $W \in W$, e, em conseqüência, W não é "básica". Mas se W não for "básica", então existirá uma seqüência de classes $y_1, y_2, y_3, \ldots$, tal que $\ldots \in y_3 \in y_2 \in y_1 \in W$, em que y_1 não será "básica" e, portanto, não poderá ser um membro de W.

[18]O paradoxo semântico mais conhecido deve-se a Jules Richard, que o propôs em 1905. Ele observa que, porque apenas um número "enumerável" de números reais pode ser finitamente definido, a classe E de todos os números reais finitamente definidos no intervalo entre 0 e 1 podem ser enumerados como o primeiro, o segundo, o terceiro, etc. Se nós os consideramos como frações decimais infinitas, ainda outro número N, no intervalo entre 0 e 1, pode ser definido, usando o procedimento diagonal de Cantor. N deve ser um membro de E porque é finitamente enumerável e está entre 0 e 1. Mas N não pode ser um membro de E porque difere no enésimo dígito do enésimo membro de E, para todo n.

[19]O paradoxo proposto por Kurt Grelling tem a seguinte forma: entre os adjetivos do português há alguns, como "curto", "polissilábico" e "proparoxítono" que se aplicam a si mesmos. Vamos chamá-los de adjetivos *autológicos*. Todos os outros adjetivos serão *heterológicos*. Assim, "longo", "monossilábico" e "verde" são heterológicos. Agora, se o adjetivo "heterológico" for heterológico, ele será autológico, e vice-versa.

[20]Além da alternativa russelliana da teoria de tipos, há pelo menos outra alternativa, proposta pelo lógico polonês Stanislaw Lesniewski, que é conhecida como *mereologia*. Em linhas gerais, a lógica de tipos evita os paradoxos impedindo que um conjunto seja parte de si mesmo, enquanto a mereologia os evita postulando que todos os conjuntos são parte de si mesmos.

(WHITEHEAD & RUSSELL 1910). A Teoria Ramificada foi proposta como um meio de evitar todos os paradoxos (lógicos e semânticos). Em sua formulação inicial, no entanto, era tão restritiva que não permitia a derivação de boa parte da matemática clássica. As modificações acrescentadas para evitar esses excessos restritivos nunca foram geralmente aceitas. O método empregado hoje para evitar os paradoxos semânticos é a chamada "Doutrina dos Níveis de Linguagem", desenvolvida por Tarski nos anos cinqüenta, e que consiste na especificação de uma hierarquia de níveis de linguagem: linguagem, metalinguagem, metametalinguagem, etc. O casal Kneale (KNEALE & KNEALE 1962: 672-673) propõe que essa necessidade de distinguir entre vários níveis de linguagem pode ser derivada da Teoria Simples dos Tipos Lógicos, o que nos devolveria ao trabalho inicial de Russell. Vamos ignorar aqui a Teoria Ramificada e concentrar nossa atenção na Teoria Simples dos Tipos.

2.4.1. A Teoria Simples de Tipos[21].

A primeira apresentação da "Doutrina de Tipos" é a seguinte:

> *Toda função proposicional $\varphi(x)$ — quando satisfeita — tem, acrescentado a seu contra-domínio de verdade, um contra-domínio de significação, i.e., um contra-domínio no qual x deve estar se $\varphi(x)$ for uma proposição, verdadeira ou falsa. Este é o primeiro aspecto da teoria de tipos; o segundo aspecto é que os contra-domínios de significação formam* tipos*, i.e., se x pertence ao contra-domínio de significação de $\varphi(x)$, então há uma classe de objetos, o* tipo *de x, que, todos, devem também pertencer ao contra-domínio de significação de $\varphi(x)$, embora φ possa variar...*
> (RUSSELL 1903: 523)

Trocando em miúdos. Dada uma função proposicional, seu "contra-domínio de significação" é o conjunto de objetos que, adequadamente, satisfazem a função (i.e., tornam a função proposicional uma proposição). Esse conjunto de objetos é o *tipo* que satisfaz a função. O *tipo* mais elementar deve ser o tipo dos *termos* ou *indivíduos*, que não são classes. O *tipo* seguinte consiste em *classes de indivíduos*; e o seguinte em *classes de classes de indivíduos*, e assim por diante. Nas palavras de Russell:

> *... é necessário distinguir (1) termos* [indivíduos], *(2) classes* [de indivíduos], *(3) classes de classes* [de indivíduos], *e assim por diante* ad infinitum*; devemos garantir que nenhum membro de um conjunto* [tipo] *seja membro de qualquer outro conjunto* [tipo], *e que* $x \in u$ *requeira que* x *seja de um conjunto* [tipo] *de um nível abaixo ao nível a que pertence o conjunto* [tipo] *a que* u *pertence. Assim,* $x \in x$ *passa a ser uma expressão sem significação; e desse modo a contradição é evitada.*
> (RUSSELL 1903: 517 - citado apud COPI 1971: 23)[22]

[21]Vamos fazer aqui uma apresentação informal da Teoria dos Tipos Lógicos. O leitor interessado na formalização da teoria e em mais detalhes e críticas deve procurar o livro de Copi (1971).
[22] Todas as citações de Russell (1903) são feitas a partir de Copi (1971).

A Teoria de Tipos está organizada em duas partes. Na primeira, estabelece a existência de uma hierarquia infinita de tipos em que o Tipo 0 consiste em todos os indivíduos, o Tipo 1 consiste em todas as classes de indivíduos, o Tipo 2 consiste em todas as classes de classes de indivíduos e assim por diante. De forma geral, o Tipo $m+1$ consiste de todas as classes de indivíduos de Tipo m. A segunda parte impõe uma condição de adequação para as fórmulas da forma $x \in y$: essas fórmulas só farão sentido se, e apenas se, o tipo de x for inferior ao tipo de y em exatamente um nível.

Se admitimos a existência de *relações*, a Teoria dos Tipos deve ser complicada com a presença de tipos para relações entre indivíduos, relações entre classes de indivíduos, etc., com a presença de tipos para classes de relações entre indivíduos, classes de classes de relações entre indivíduos, etc., com a presença de mais tipos ainda para relações entre entidades dos vários tipos já mencionados e para as classes dessas novas relações, etc. Nas palavras de Russell: *"... nós vamos obter uma imensa hierarquia de tipos, e é difícil saber quantos eles serão..."* (RUSSELL 1903: 525).

A Teoria Simples dos Tipos Lógicos é suficiente para evitar todos os paradoxos lógicos, como os de Burali-Forti, Cantor, Mirimanoff e o próprio paradoxo de Russell, bem como todos os paradoxos que envolvam relações de pertença circulares.

O fundamental da Teoria Simples de Tipos é a afirmação de que as entidades se dividem em categorias distintas e que os membros de uma categoria só podem ser predicados pelos membros de alguma outra categoria determinada. Essa afirmação não é nova e já pode ser encontrada, entre outros lugares, em Platão (no diálogo *Sofista*) e em Aristóteles (no capítulo 5 das *Categorias*).

2.4.2. Uma Linguagem de Tipos.

Feita a apresentação informal da Teoria dos Tipos Lógicos, podemos tentar estabelecer o que poderia ser uma **linguagem de tipos**, ou seja, uma linguagem que obedecesse à hierarquia de tipos como a proposta na teoria de Russell. Também informalmente, podemos dizer que uma linguagem de tipos L_{tipo} é uma linguagem cujas expressões são associadas a tipos lógicos. Exemplifiquemos.

Em primeiro lugar, vamos construir uma definição recursiva do conjunto TIPO, i.e., do conjunto dos tipos lógicos possíveis.

(2.10) **Conjunto TIPO:**
1. *e* é um tipo;
2. *t* é um tipo;
3. Se α e β são tipos, $<\alpha,\beta>$ é um tipo.

Com essa definição recursiva, podemos obter um conjunto infinito de tipos lógicos. O procedimento é o seguinte: (i) começamos com os tipos básicos *e* e *t*; (ii) com os tipos básicos, pela regra 3, obtemos $<e,e>$, $<t,t>$, $<e,t>$ e $<t,e>$; (iii) com os tipos básicos e os tipos obtidos no passo anterior, obtemos $<e,<e,e>>$, $<<e,e>,t>$, $<<e,t>,t>$, etc.; (iv) com os tipos obtidos no passo (ii), podemos obter $<<e,e>,<e,e>>$, $<<e,e>,<e,t>>$, etc. Esse processo pode seguir *ad infinitum*, deixando-nos com um conjunto infinito de tipos lógicos.

O passo seguinte é associar os tipos presentes no conjunto TIPO a objetos lógicos, i.e., entidades existentes no mundo. Certamente, nem todos os tipos do conjunto precisam ser associados a objetos lógicos, embora todos possam ser. Façamos a associação por meio de uma tabela:

TIPO	**OBJETO LÓGICO**
e	indivíduos
t	valores de verdade
$<e,t>$	conjuntos de indivíduos
$<e,e>$	relações entre indivíduos
$<t,t>$	relações entre valores de verdade
$<t,<t,t>>$	conjuntos de pares de valores de verdade
$<<e,t>, t>$	conjuntos de conjuntos de indivíduos
$<e,<e,t>>$	conjuntos de pares de indivíduos
$<<e,t>,<e,t>>$	relações entre conjuntos de indivíduos
$<<<e,t>, t>, <<e,t>, t>>$	relações entre conjuntos de conjuntos de indivíduos
$<<<e,t>, t>, t>>$	conjuntos de conjuntos de conjuntos de indivíduos

TABELA 2.11

A tarefa seguinte é associar as expressões da linguagem a ser "tipada" aos tipos lógicos — tarefa que é executada a partir das interpretações das expressões no modelo de interpretação, como vimos na semântica de CP. Retomemos CP.

Vimos já que as constantes e as variáveis se interpretavam em indivíduos. Numa linguagem de tipos, isso significa que constantes e variáveis de CP são expressões de tipo *e*. Os predicados de um lugar eram interpretados em conjuntos de indivíduos. Logo, numa linguagem de tipos, os predicados de um lugar pertencem ao tipo lógico $<e,t>$. O conetivo de um lugar "¬" relaciona dois valores de verdade (toma um valor de verdade como argumento e devolve outro valor de verdade como resultado) e é, portanto, de tipo $<t,t>$. E assim por diante.

Generalizando, podemos dizer que toda expressão de tipo *e* corresponde a um indivíduo, que toda expressão de tipo *t* corresponde a um valor de verdade, e que toda expressão de tipo arbitrário $<\alpha,\beta>$ é uma função que toma membros de α como argumentos e devolve membros de β como valor.

O mais interessante numa linguagem de tipos, está no fato de que a associação de um tipo lógico a uma determinada expressão pode indicar, simultaneamente, a combinatória sintática da expressão e sua interpretação no modelo. Por exemplo, se associamos o tipo $<e,t>$ aos predicados de um lugar, dizemos simultaneamente (i) que os predicados de um lugar combinam-se sintaticamente com expressões de tipo *e* para resultar em expressões de tipo *t* (tomam expressões de tipo *e* (constantes) como argumento e resultam em expressões de tipo *t* (sentenças)) e (ii) que os predicados de um lugar interpretam-se em conjuntos de indivíduos. Dessa forma, uma linguagem de tipos consegue, com elegância e eficiência, associar, por meio da atribuição de tipos às expressões, suas estruturas sintáticas a suas interpretações, i.e., associar o componente sintático ao componente semântico.

Tentando seguir por partes, no próximo capítulo vamos apresentar uma tentativa de dar um tratamento de tipos à sintaxe das línguas naturais, preparando o terreno para a teoria semântica.