A conexidade sintática*

Kazimierz Ajdukiewicz†

I

1. Com a descoberta das antinomias e dos modos de resolvê-las, os problemas da sintaxe da língua assumiram uma importância central para a lógica (compreendendo este termo numa acepção ampla o suficiente para incluir também as questões metateóricas). Entre estes problemas, contudo, o mais relevante em relação à lógica é o da conexidade sintática. Ele está relacionado à especificação das condições sob as quais uma seqüência de palavras providas de sentido forma uma expressão que possui, por sua vez, um sentido unitário, ainda que composto a partir do sentido das palavras que pertencem a ela. Uma seqüência de palavras deste tipo é sintaticamente conexa.

Por exemplo, a seqüência de palavras "João ama Ana" é construída de modo sintaticamente conexo com palavras da língua portuguesa providas de sentido, e pertence ao conjunto de expressões providas de sentido desta língua. Ao contrário, "talvez cavalo se contudo aparecerei" compõe-se certamente de palavras da língua portuguesa providas de sentido, mas é desprovida de conexão sintática e não pertence ao conjunto das expressões da língua portuguesa providas de sentido.

Existem várias soluções para o problema da conexão sintática. Uma delas é, por exemplo, a teoria russelliana dos tipos. Contudo a noção de conexidade sintática pode ser formulada de modo particularmente simples e elegante com

*Este texto apareceu originalmente com o título "Die syntaktische Konnexität", em *Studia Philosophica*, *1*, 1935, pp. 1–27; e recebeu uma tradução para o inglês de H. Weber, Syntactic Connexion, *in* McCall, S. (ed.), *Polish Logic: 1920–1939*, Oxford: Oxford University Press, 1967, pp. 207–231, e outra para o italiano de Giovanni Piana, La Connessità Sintattica, *in* Bonomi, A. (org.), *La Struttura Logica del Linguaggio*. Milano: Bompiani, 1973, pp. 345–372. A presente tradução para o português serviu-se basicamente da tradução italiana, com posterior cotejamento com a tradução inglesa. O termo original "Konnexität" tem como tradução literal "conexidade", isto é, 'a propriedade de ser conexo'. Outros termos da língua portuguesa que poderiam ser utilizados seriam "coesão" e "conexão". Evitamos o termo "conexão" porque este, a rigor, denota o resultado de um processo; evitamos o termo "coesão" em virtude de seus significados já bem estabelecidos no interior da teoria lingüística. (Nota dos tradutores)

†Tradução de Lígia Negri e José Borges Neto — julho de 1997.

o auxílio da teoria das categorias do significado, elaborada por Stanislaw Leśniewski. Basear-nos-emos, aqui, justamente sobre os resultados de Leśniewski[1] e proporemos de nossa parte um simbolismo que pode ser aplicado, em princípio, a quase todas as línguas e com cujo auxílio a conexidade sintática de uma seqüência de palavras pode ser examinada e definida através de um cálculo.

2. E. Husserl foi o primeiro a introduzir a noção e o termo "categoria do significado" (*Bedeutungskategorie*). Na sua *Logische Untersuchungen*,[2] ele observa que as palavras isoladas e as expressões compostas, de uma língua, podem ser subdivididas em classes de modo tal que duas palavras ou expressões pertencentes a uma mesma classe possam ser substituídas uma pela outra em um contexto que possua um sentido unitário, sem que para isso o contexto modificado se transforme em um agregado de palavras privado de coesão, e perca assim seu sentido unitário. Ao contrário, duas palavras ou expressões pertencentes a classes diferentes não possuem esta propriedade. Tomemos o enunciado "O sol brilha" como exemplo de um contexto que possui um sentido unitário. Se operamos nele a substituição de "brilha" por "queima" ou ainda por "assobia" ou "dança", obteremos do enunciado "O sol brilha" outros enunciados, verdadeiros ou falsos, que possuem um sentido unitário. Mas se substituímos "brilha" por, por exemplo, "se" ou "verde" ou ainda "talvez", obteremos uma seqüência de palavras sem coesão. Husserl denomina categorias do significado justamente tais classes de palavras e de expressões.

Queremos definir um pouco mais precisamente esta noção. A palavra ou expressão A, entendida no sentido x, e a palavra ou expressão B, entendida no sentido y, pertencem à mesma categoria do significado se e somente se existe uma sentença (ou mesmo uma função sentencial) S_A na qual A ocorre com o sentido x e que possui a seguinte propriedade: se nela se substitui A por B com o sentido y, mantendo rigorosamente inalterados os sentidos das outras palavras e da articulação de S_A, obtém-se uma expressão S_B que é também uma sentença (ou uma função sentencial).

A hierarquia das categorias do significado está intimamente ligada à hierarquia simplificada dos tipos lógicos — ainda que seja muito mais articulada — e representa, em última análise, a sua contraparte semântico-gramatical.[3]

Entre as categorias do significado podem-se distinguir duas espécies, que de-

[1]S. Leśniewski *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlangen der Mathematik.* (Reimpresso de *Fundamenta Mathematica 14* (Warsaw, 1929) pp. 13 e ss., 67 e ss.). Mantemos de Leśniewski apenas a idéia de base das categorias do significado e de suas espécies. Entretanto, para a formulação literal das explicações e das definições correspondentes de nossa proposta, como também para os detalhes de conteúdo que atribuímos a esta noção, Leśniewski não pode ser considerado responsável, uma vez que suas definições não são gerais e se aplicam apenas a seu simbolismo particular, num sentido bastante distinto, altamente preciso e puramente estrutural.

[2]Edmund Husserl, *Logische Untersuchungen*, vol. II, parte 1 (segunda edição revista, Halle/S., 1913), pp. 294, 295, 305–312, 316–321, 326–342.

[3]R. Carnap, *Abriss der Logistik* (Viena, 1929), p. 30); A. Tarski, *Pojecie prawdy w jezykach nauk dedukcyjnych* (O conceito de verdade nas ciências dedutivas formalizadas) (Varóvia, 1933), p. 67.

sejamos chamar de categorias fundamentais e categorias funtoras (a designação “funtor” deriva de Kotarbinski, são meus contudo o termo, e a noção, de “categoria fundamental”). Infelizmente, não estamos em condição de definir estas noções de maneira razoavelmente precisa. Não é difícil entretanto ilustrar do que se trata. “Funtor” tem o mesmo significado de “signo de função”. O que está em questão, portanto, é o “signo não-saturado”, que “comporta parênteses”. As categorias funtoras são de fato as categorias do significado às quais pertencem os funtores. Chamo, então, de categoria fundamental toda categoria do significado que não é uma categoria funtora.

Da definição de categoria do significado segue imediatamente que duas sentenças quaisquer pertencem à mesma categoria do significado. As sentenças não são obviamente funtores, portanto a categoria do significado das sentenças é incluída entre as categorias fundamentais. Além da categoria-sentença pode haver também outras categorias fundamentais. Em Leśniewski, ao lado da categoria-sentença há apenas uma outra categoria fundamental, a dos nomes, e a ela pertencem não apenas nomes singulares, mas também nomes gerais. Querendo comparar a teoria simplificada dos tipos e a teoria das categorias do significado, dever-se-ia incluir entre as categorias fundamentais o tipo das sentenças e o tipo dos nomes próprios. Os outros tipos pertencerão às categorias funtoras. Parece que na linguagem ordinária nem todos os nomes formam uma única categoria do significado. Segundo nosso ponto de vista, na linguagem ordinária pode-se distinguir em relação aos nomes pelo menos duas categorias do significado: em primeiro lugar a categoria do significado à qual pertencem os nomes singulares dos indivíduos e os nomes gerais dos indivíduos, enquanto assumidos *in suppositione personali*; em segundo lugar, a categoria do significado dos nomes gerais enquanto ocorrem *in suppositione simplici* (isto é, como nomes de universais).

Se se quisesse formular a noção de conexidade sintática de modo inteiramente geral, não se poderia decidir nada sobre o número e a espécie das categorias fundamentais do significado e das categorias funtoras, na medida em que elas podem variar de língua para língua. Para simplificar, gostaríamos entretanto de limitarmo-nos a línguas nas quais (como ocorre com Leśniewski) se apresentam apenas duas categorias fundamentais, precisamente a das sentenças e a dos nomes. Além destas duas categorias fundamentais do significado gostaríamos, seguindo Leśniewski, de assumir uma hierarquia ramificada, e em princípio ilimitada com relação ao nível superior, das categorias funtoras; estas últimas serão caracterizadas, em primeiro lugar, pelo número e pelas categorias do significado de seus argumentos juntamente com sua ordem, e em segundo lugar pela categoria do significado da expressão composta inteira que elas formam com os seus argumentos. Por exemplo, os funtores que formam uma sentença com um *único* nome como argumento representam uma categoria do significado específica; os funtores que formam uma sentença com *dois* nomes como argumentos constituem uma outra categoria, e assim por diante. Os funtores que formam um nome com um único nome como argumento reunir-se-ão por sua vez em uma outra categoria. Também os funtores que formam sentenças assumindo uma única sentença como seu argumento (por ex., o sinal “$\sim$” na lógica) serão indicados como uma categoria do significado particular, e assim por diante.

3. Nós assumimos que a categoria do significado de uma palavra seja determinada pelo sentido que ela possui. Atribuamos, agora, um índice às *palavras* segundo a categoria do significado à qual pertencem: às palavras pertencentes à categoria-sentença, o índice simples "s"; às palavras pertencentes à categoria-nome, o índice simples "n". Às palavras que não pertencem a uma categoria fundamental, mas às categorias-funtoras, atribuiremos um índice em forma fracionária constituído de um numerador e de um denominador: no numerador se encontrará o índice da categoria do significado à qual pertence a expressão composta do signo de função juntamente com os seus argumentos, enquanto que no denominador estarão os índices, dispostos em ordem, das categorias do significado às quais pertencem os argumentos com os quais os funtores podem combinar-se em um todo provido de sentido. Por exemplo, uma palavra que forma uma sentença com dois nomes como argumentos receberá o índice fracionário $\frac{s}{n\,n}$. Cada categoria do significado teria deste modo um índice que a caracterizaria. A hierarquia das categorias do significado se espelharia em uma série de índices do seguinte tipo: s, n, $\frac{s}{n}$, $\frac{s}{n\,n}$, $\frac{s}{n\,n\,n}$, $\ldots$, $\frac{s}{s}$, $\frac{s}{s\,s}$,

$$\frac{s}{s\,s\,s}, \ldots, \frac{s}{n\,s}, \frac{s}{s\,n}, \ldots, \frac{s}{\frac{s}{n}}, \frac{s}{\frac{s}{n}\;\frac{s}{n}}, \ldots, \frac{n}{n}, \frac{n}{n\,n}, \frac{n}{s\,n},$$

$$\ldots, \frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}, \text{ etc.}$$

Se, para ilustrar esta notação, tomamos um enunciado da lógica como, por exemplo,

$$\sim \quad p \quad \supset \quad p \quad . \quad \supset \quad . \quad p$$

e atribuímos às palavras isoladas seus índices, obteremos então:

$$\begin{array}{cccccccc} \sim & p & \supset & p & . & \supset & . & p \\ \frac{s}{s} & s & \frac{s}{s\,s} & s & & \frac{s}{s\,s} & & s \end{array}$$

Querendo aplicar este método à linguagem ordinária, as categorias do significado que assumimos (conforme Leśniewski) serão insuficientes, na medida em que, ao que parece, a linguagem ordinária tem uma riqueza maior de categorias do significado. Além disso, por conta da flutuação do sentido das palavras, torna-se bastante difícil decidir em qual categoria do significado deva ser incluída uma dada palavra. Às vezes existe incerteza também sobre o que deve ser tratado como uma única palavra. Contudo em casos simples e favoráveis o aparato de índices acima indicado se adequa bastante bem ao uso lingüístico, como se pode ver pelo seguinte exemplo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{a} & \text{madeira} & \text{queima} & \text{muito} & \text{lentamente} & \text{e} & \text{a} & \text{lua} & \text{desaparece.} \\
\frac{n}{n} & n & \frac{s}{n} & \dfrac{\frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}}{\frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}} & \dfrac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}} & \frac{s}{s\,s} & \frac{n}{n} & n & \frac{s}{n}
\end{array}$$

4. Em toda expressão composta provida de sentido, vem indicado, de algum modo, que expressões intervêm como argumento e a que expressões, que intervêm como funtores, estas pertencem. Se o funtor possui mais argumentos, deve-se indicar também qual dentre eles é o primeiro, qual o segundo, e assim por diante. A ordem de sucessão dos argumentos cumpre, assim, um papel essencial; a diferença entre sujeito e predicado ou mesmo entre antecedente e conseqüente de uma proposição hipotética são casos especiais da diferença importante que é produzida pela ordem de sucessão dos argumentos. Esta ordem não é portanto — em termos gerais — idêntica à ordem externa em que os argumentos se apresentam na expressão correspondente. Não se trata, em geral, de uma questão puramente estrutural, isto é, puramente externa, mas ela está fundamentada nas propriedades da expressão completa que são determinadas pelo seu sentido. Só nas linguagens simbólicas e em algumas linguagens ordinárias é que a ordem externa dos argumentos corresponde à sua seqüência ordenada.

A fim de indicar os vários modos em que as partes de uma expressão se relacionam reciprocamente nela, as linguagens simbólicas recorrem a convenções que dizem respeito à "força aglutinadora" dos diferentes funtores, ao uso de parênteses e à ordem das palavras. Na linguagem ordinária, esta relação recíproca vem indicada através da ordem das palavras, de flexões, de preposições e de sinais de pontuação.

Uma seqüência de palavras em que esta relação não seja indicada de forma completa, ou não seja indicada de fato, é desprovida de sentido unitário.

Em cada expressão composta provida de sentido, as relações entre os funtores e seus argumentos devem ter uma forma tal que permita uma análise em partes da expressão inteira, de maneira que uma das partes seja o funtor (que pode ser por sua vez uma expressão composta) e as demais, seus argumentos. A este funtor chamamos de funtor principal da expressão. (A noção de funtor principal e a idéia de base para sua definição devem-se a Leśniewski.) No exemplo lógico indicado acima, o funtor principal da expressão como um todo é o segundo sinal de implicação; já no exemplo da linguagem ordinária, o funtor principal é a palavra "e". Se uma expressão composta pode ser analisada em um funtor principal e seus argumentos, dizemos que tal expressão é *bem articulada*. Queremos indicar o funtor principal de uma expressão e seus argumentos como componentes de primeiro grau desta expressão. Se os componentes de primeiro grau de uma expressão A já são palavras, ou mesmo, se são elas mesmas expressões compostas, que são por sua vez bem articuladas, e se regredindo dos componentes dos componentes aos componentes dos componentes dos componentes e assim por diante, logo aos componentes de n-ésimo grau, chegarmos sempre a palavras ou mesmo a expressões bem articuladas, dizemos que a expressão A é *completamente bem articulada*.

Note-se que a linguagem ordinária admite freqüentemente expressões elípticas, assim uma expressão composta provida de sentido não pode ser considerada completa, em relação à sua boa articulação, enquanto nos limitarmos às palavras explicitamente manifestadas nela. Contudo, é fácil apresentar uma boa articulação completa se se introduzem as palavras que, embora estando omitidas, são entendidas implicitamente. Dificuldades maiores surgem se uma língua, como por exemplo o alemão, admite palavras que podem ser descontínuas. Neste caso não é mais possível indicar um critério puramente estrutural da unicidade da palavra.

5. A boa articulação completa de uma expressão composta é certamente uma condição necessária, mas não suficiente, para que a expressão possua um sentido unitário, e seja portanto uma expressão provida de sentido. A esta condição deve-se acrescentar uma outra. De fato, para que uma expressão bem articulada tenha sentido, seus componentes de mesmo grau que se encontram na relação funtor-argumento devem ser adequados uns aos outros. Isto é, para cada componente de n-ésimo grau que se apresente como um funtor principal ou da expressão completa ou de um seu componente de grau $(n-1)$, e que requeira — conforme a sua categoria do significado — estes ou aqueles argumentos pertencentes a determinadas categorias do significado para formar junto com eles uma expressão provida de significado, devem estar associados como argumentos outros tantos componentes de n-ésimo grau pertencentes às categorias do significado correspondentes. Por exemplo, a um componente que pertence à categoria do significado designada pelo índice $\frac{s}{n\ s}$ (para o caso em que ele ocorre como funtor principal) correspondem, em primeiro lugar, dois argumentos e, em segundo lugar, o primeiro argumento deve pertencer à categoria do significado dos nomes e o segundo à das proposições. Queremos chamar sintaticamente conexa uma expressão completamente bem articulada que satisfaça ambas as condições acima indicadas.

Podemos agora formular estas condições de outro modo, e de forma mais precisa, com o auxílio da nossa representação em índices. Para isso, devemos introduzir a noção de expoente de uma expressão, que ilustramos antes de mais nada com base em um exemplo. Tomemos a expressão

$$p \quad \vee \quad p \quad . \quad \supset \quad . \quad p$$

e acrescentemos os índices às palavras. Obteremos então

$$\begin{array}{ccccccc} p & \vee & p & . & \supset & . & p \\ s & \frac{s}{s\,s} & s & & \frac{s}{s\,s} & & s \end{array} \tag{A}$$

Ordenemos agora os componentes desta expressão segundo o seguinte princípio. Escrevamos em primeiro lugar o funtor principal da expressão completa e em seguida, pela ordem, o seu primeiro argumento, o segundo (o terceiro, o quarto, etc.). Obteremos portanto

$$\begin{array}{ccccccc} \supset & , & p & \vee & p & , & p \\ \frac{s}{s\,s} & & s & \frac{s}{s\,s} & s & & s \end{array} \tag{B}$$

Se qualquer dos componentes desta seqüência é ainda uma expressão composta de um funtor principal e de seus argumentos, analisamos este componente nos componentes do grau imediatamente superior e o ordenamos segundo o mesmo princípio, colocando antes de tudo o funtor principal, depois seu primeiro argumento, o segundo, etc.

$$\begin{array}{ccccccccc} \supset & , & \vee & , & p & , & p & , & p \\ \frac{s}{s\,s} & & \frac{s}{s\,s} & & s & & s & & s \end{array} \tag{C}$$

Se nesta seqüência houvesse ainda um componente composto, faríamos a análise segundo o mesmo princípio, repetindo o procedimento até o ponto em que apareçam na seqüência apenas palavras. Uma seqüência assim ordenada, que consta apenas de palavras de uma expressão, chamamos *seqüência própria de palavras* desta expressão. No nosso exemplo a seqüência própria de palavras já aparece na segunda etapa, vale dizer que C é a seqüência própria de palavras de A. Se agora separamos das palavras, que estão ordenadas segundo a seqüência própria de palavras de uma expressão, os seus índices, e se escrevemos os índices destas palavras segundo a mesma ordem, obteremos aquilo que chamamos *seqüência própria de índices* da expressão em questão.

A seqüência própria de índices da expressão A tem portanto a seguinte forma:

$$\frac{s}{s\,s} \quad \frac{s}{s\,s} \quad s \quad s \quad s \tag{1}$$

Examinemos agora se nesta seqüência de índices, da esquerda para a direita, encontramos uma combinação de índices tal que o primeiro lugar seja o de um índice fracionário seguido imediatamente pelos mesmos índices que se apresentam no seu denominador. Se encontramos uma ou mais destas combinações de índices, cancelamos a primeira delas (da esquerda para a direita) da seqüência de índices e substituímo-la pelo numerador do índice fracionário. Chamamos a nova seqüência obtida deste modo de primeira derivação da seqüência dos índices própria da expressão A. Ela se apresenta como se segue:

$$\frac{s}{s\ s} \quad s \quad s \tag{2}$$

A primeira derivação consiste de um índice fracionário ao qual segue imediatamente uma combinação de índices idênticos ao índice que forma o numerador deste índice fracionário. Podemos, portanto, transformá-la da forma acima indicada, obtendo dela a segunda derivação que forma o índice simples

$$s \tag{3}$$

e que chamamos, não havendo possibilidade de outras derivações, de última derivação.

A última derivação da seqüência própria de índices de uma expressão dada recebe o nome de *expoente* desta expressão.

Queremos ainda determinar o expoente da sentença, formulada na linguagem ordinária, mencionado na p. 5. A sua seqüência própria de índices e as suas derivações sucessivas apresentam-se da seguinte maneira:

$$\frac{s}{s\ s} \quad \frac{\frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}}{\frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}} \quad \frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}} \quad \frac{s}{n} \quad \frac{n}{n} \quad n \quad \frac{s}{n} \quad \frac{n}{n} \quad n$$

(Seqüência própria de índices)

$$\frac{s}{s\ s} \quad \frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}} \quad \frac{s}{n} \quad \frac{n}{n} \quad n \quad \frac{s}{n} \quad \frac{n}{n} \quad n$$

(Derivação I)

$$\frac{s}{s\ s} \quad \frac{s}{n} \quad \frac{n}{n} \quad n \quad \frac{s}{n} \quad \frac{n}{n} \quad n$$

(Derivação II)

$$\frac{s}{s\ s} \quad \frac{s}{n} \quad n \quad \frac{s}{n} \quad \frac{n}{n} \quad n$$

(Derivação III)

$$\frac{s}{s\ s} \quad s \quad \frac{s}{n} \quad \frac{n}{n} \quad n$$

(Derivação IV)

$$\frac{s}{s\ s} \quad s \quad \frac{s}{n} \quad n$$

(Derivação V)

$$\frac{s}{s\ s} \quad s \quad s$$

(Derivação VI)

$$s$$

(Derivação VII e última)

Agora podemos definir: uma expressão é sintaticamente conexa se e somente se (1) ela é completamente bem articulada, (2) para cada funtor que ocorra como funtor principal nesta expressão, estão coordenados tantos argumentos quantas são as letras contidas no denominador do seu índice; e (3) a expressão possua um expoente que consiste em um único índice.[4]

Este índice pode ter a forma de uma única letra, mas pode também apresentar-se de forma fracionária. Assim a expressão

[4] A satisfação da primeira e da terceira condições não assegura ainda a conexidade sintática. De fato, no exemplo

$$\begin{array}{cccccc} \sim & (& \phi & , & x &) \\ \frac{s}{s} & & \frac{s}{n} & & n & \end{array}$$

não é sintaticamente conexa, embora esta expressão tenha um boa articulação completa, e seu expoente, que é obtido do modo seguinte

$$\frac{s}{s} \quad \frac{s}{n} \quad n$$

$$\frac{s}{s} \quad s$$

$$s$$

seja um índice simples.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{queima} & \text{muito} & \text{lentamente} \\
\dfrac{s}{n} & \dfrac{\dfrac{\dfrac{s}{n}}{\dfrac{s}{n}}}{\dfrac{\dfrac{s}{n}}{\dfrac{s}{n}}} & \dfrac{\dfrac{s}{n}}{\dfrac{s}{n}}
\end{array}
$$

cuja seqüência própria de índices é

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{s}{n}}{\dfrac{s}{n}}}{\dfrac{\dfrac{s}{n}}{\dfrac{s}{n}}} \quad \dfrac{\dfrac{s}{n}}{\dfrac{s}{n}} \quad \dfrac{s}{n}
$$

tem como expoente o índice fracionário $\dfrac{s}{n}$.

Como exemplo de uma expressão sintaticamente não conexa consideremos a seguinte seqüência de palavras:

$$
\begin{array}{cccccccc}
F & (\phi) & : & \equiv & : & \sim & \phi & (\phi) \\
\dfrac{s}{\dfrac{s}{n}} & \dfrac{s}{n} & & \dfrac{s}{s\ s} & & \dfrac{s}{s} & \dfrac{s}{n} & \dfrac{s}{n}
\end{array}
$$

A sua seqüência própria de índices e suas derivações são:

$$
\dfrac{s}{s\ s} \quad \dfrac{s}{\dfrac{s}{n}} \quad \dfrac{s}{n} \quad \dfrac{s}{s} \quad \dfrac{s}{n} \quad \dfrac{s}{n}
$$

$$
\dfrac{s}{s\ s} \quad s \quad \dfrac{s}{s} \quad \dfrac{s}{n} \quad \dfrac{s}{n}
$$

A primeira derivação que, neste caso, é também a última, forma um expoente que é constituído de vários índices. A expressão em questão é, portanto, sintaticamente não conexa.

(A seqüência de palavras deste exemplo representa a conhecida “definição” que conduz à antinomia russelliana da classe das classes que contêm a si mesmas como elementos.)

O expoente de uma expressão sintaticamente conexa indica a categoria do significado a que pertence esta expressão composta considerada como um todo.

6. Uma representação que atribuísse os índices às palavras não precisaria de parênteses ou de outros meios análogos para indicar a articulação de suas expressões sintaticamente conexas (a inerência recíproca dos funtores e de seus argumentos). Para isso bastaria ater-se rigorosamente, ao ordenar as palavras, ao mesmo princípio que determina a ordem dos índices na seqüência própria de índices de uma expressão. Dever-se-ia ordenar assim as palavras de cada expressão composta de modo tal que venha antes de mais nada o símbolo da função principal, seguido de seu primeiro argumento, do segundo, etc. Por exemplo, o enunciado na notação russelliana

$$p \;.\; q \;.\supset r \;:\equiv:\; \sim r \;.\; q \;.\supset\; \sim p \tag{A}$$

deveria ser escrito, segundo este princípio, da seguinte maneira:

$$\overset{\equiv}{\frac{s}{s\,s}}\;\; \overset{\supset}{\frac{s}{s\,s}}\;\; \overset{.}{\frac{s}{s\,s}}\;\; \overset{p}{s}\;\; \overset{q}{s}\;\; \overset{r}{s}\;\; \underbrace{\overbrace{\overset{\supset}{\frac{s}{s\,s}}}^{5}\;\; \overbrace{\overbrace{\overset{.}{\frac{s}{s\,s}}\;\; \overset{\sim}{\frac{s}{s}}\;\; \overset{r}{s}\;\; \overset{q}{s}}^{3}\;\; \overbrace{\overset{\sim}{\frac{s}{s}}\;\; \overset{p}{s}}^{4}}^{1}}_{2} \tag{B}$$

Dizemos que um funtor tem n lugares quando o denominador do seu índice contém n índices. Podemos então dizer: a expressão A representa o k-ésimo argumento do funtor de n lugares F na expressão B se e apenas se (I) da expressão B pode-se separar uma parte ininterrupta T imediatamente à direita de F, cujo expoente possua a mesma forma do denominador do expoente de F; (II) esta parte T pode ser subdividida sem resto em n subpartes ininterruptas de modo tal que o expoente destas subpartes sejam, na ordem, idênticos aos índices contidos no denominador do índice de F; (III) A é a k-ésima destas subpartes e (IV) F juntamente com T forma ou toda a expressão B ou então um membro de B (rigorosamente falando, esta explicação deveria ser substituída por uma definição recursiva).

Segundo esta explicação, por exemplo, a parte da expressão em B designada por 3 é o primeiro argumento, enquanto a designada por 4 é o segundo argumento do símbolo de implicação, que é designado por 5 na mesma expressão em B. De fato (I) pode-se separar da expressão em B a parte designada por 1, ou seja, aquela parte ininterrupta que se encontra imediatamente à direita de 5 e cujo expoente tem a mesma forma do denominador do índice de 5; (II) pode-se dividir 1 em duas subpartes ininterruptas sem resto tal que os seus expoentes sejam, na ordem, idênticos aos índices contidos no denominador do índice de 5; (III) 3 é a primeira destas subpartes e 4 a segunda; (IV) 5, juntamente com 1, é um membro da expressão em B.

Esta vantagem da notação através de índices, que torna supérfluos todos os parênteses, pode talvez parecer de pouca conta se se consideram unicamente exemplos tirados do cálculo proposicional. Para este cálculo, J. Łukasiewicz introduziu uma notação que, embora sem auxílio dos índices, não requer parênteses ou símbolos auxiliares análogos para indicar a articulação das expressões sintaticamente conexas.[5] A possibilidade de dispensar os parênteses sem introduzir índices explica-se contudo pelo fato do cálculo proposicional trabalhar com poucas categorias do significado (na prática apenas com três), onde todas as variáveis pertencem a uma única categoria do significado e o número das constantes é limitado, o que permite indicar a categoria do significado de uma expressão dada mediante uma forma particular dos símbolos. Neste caso, as regras de articulação podem ser também simplesmente enumeradas. Mas se se tem que lidar com um número grande, teoricamente não previsível, de categorias do significado diversas, deve-se recorrer a uma caracterização sistemática destas diversas categorias semelhante àquela apresentada em nossa notação.

Até agora as nossas indagações dizem respeito apenas a expressões que não contenham operadores (v. abaixo seção 7). Agora, ao contrário, levaremos em consideração expressões que os contêm.

II

7. Pressupôs-se anteriormente que cada palavra da língua, graças ao seu sentido, pode ser atribuída a uma determinada categoria do significado e em conseqüência, provida de um índice. Apenas se esta condição é satisfeita, é possível analisar todas as expressões compostas segundo o esquema funtor-argumento. Embora esta condição possa talvez ser satisfeita por algumas linguagens, ela não parece valer para certas linguagens simbólicas. Estamos pensando aqui nas linguagens que se servem dos operadores acima mencionados. Com esta caracterização estamos pensando em símbolos como o quantificador universal da lógica simbólica, que tem a forma "Πx" ou então "(x)", denominado também operador-todo (cf. Carnap, 1929: 13), e ainda o operador existencial "$(\exists x)$", bem como o símbolo da soma algébrica "$\sum\limits_{k=1}^{10}$", o símbolo do produto "$\prod\limits_{k=1}^{100}$", o símbolo da integral definida "$\int\limits_0^1 dx$", etc. Todos estes símbolos têm em comum a seguinte propriedade: referem-se sempre a uma expressão que contêm uma ou mais variáveis e conferem, a uma ou mais delas, o papel de variável aparente. Se portanto um operador, por exemplo, refere-se a uma expressão que contém

[5] Cf. Jan Łukasiewicz, 'Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls', *Comptes rendus des séances ded la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie* 13, Cl. iii (Varsóvia, 1930).

uma única variável, o resultado é uma expressão composta que possui um valor constante. Assim "$(\exists x).x$ é um homem" e "$\sum\limits_{k=1}^{10} x^2$" têm valor constante, ainda que aí ocorram variáveis. Mediante o operador, estas variáveis são tornadas aparentes ou, como se diz, vêm "ligadas" pelo operador.

Ora, no caso de uma expressão que contenha um operador, (por exemplo no caso de um enunciado universal "$(\Pi x).fx$"), a análise em funtores e argumentos com categorias do significado apropriadas parece de fato deparar-se com dificuldades insuperáveis.

Sem enveredar pela estrutura interna do operador composto "(Πx)", queremos antes de mais nada recusar a concepção mais natural da estrutura sintática do enunciado universal "$(\Pi x).fx$", segundo a qual num tal enunciado o operador "(Πx)", desempenharia o papel do funtor principal e a função proposicional desempenharia o papel de seu argumento. Se esta fosse a análise sintática correta do enunciado universal, dever-se-ia incluir o operador-todo "(Πx)" entre aqueles operadores que, juntamente com seus argumentos, formam um enunciado, e que portanto pertencem à categoria $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}$. Em oposição a isso pode-se lembrar que, em uma lógica extensional, um funtor $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}$ deve ser um funtor de verdade (*truth functor*). Portanto, deverá corresponder a uma das quatro tabelas seguintes:

p	f_1p
0	0
1	1

p	f_2p
0	1
1	0

p	f_3p
0	1
1	1

p	f_4p
0	0
1	0

Em outras palavras, se o operador-todo é um funtor $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}$, o enunciado

$$(\Pi x).fx$$

deveria ser equivalente: (1) a "fx", ou (2) a "$\sim fx$", ou (3) deveria ser sempre verdadeiro, ou (4) sempre falso, independentemente de "x". Em uma lógica extensional, então, o operador "(Πx)" não pode ser entendido como um funtor $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}$. Mas já que junto de um enunciado "fx" ele forma um enunciado, não pode ser nenhum outro funtor.

Neste momento se impõe a idéia de que a estrutura sintática de um enunciado universal

$$(\Pi x).fx$$

possa receber uma interpretação diferente da anterior. Talvez não seja "Πx" o funtor principal neste enunciado e "fx" o seu argumento, mas pode ser que o funtor principal seja o símbolo "Π" e que "x" e "fx" sejam respectivamente o seu primeiro e o seu segundo argumentos. Neste caso, o enunciado universal deveria ser escrito corretamente do seguinte modo:

$$\Pi(x, fx)$$

Já que "x" pode pertencer a diversas categorias do significado, também "Π" deveria receber diferentes interpretações. Se, por exemplo, "x" pertence à categoria nome e "f" à categoria $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}$, "Π" deveria então pertencer à categoria $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n\ s}}$. Mas se "$x$" pertencesse à categoria das sentenças e "f" à categoria $\begin{matrix}\mathrm{s}\\ \text{hline s}\end{matrix}$, então "Π" deveria pertencer à categoria $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s\ s}}$, para que "$\Pi(x, fx)$" possa ser uma sentença. Neste caso, "Π" deveria ser, em uma lógica extensional, um funtor de verdade de dois lugares, e deveria portanto corresponder a uma das dezesseis tabelas conhecidas para funtores de verdade de dois lugares. Mas vê-se logo que isso é incompatível com o significado do enunciado universal "$(\Pi x).fx$".

Não é possível então interpretar a estrutura sintática do enunciado universal segundo o esquema funtor-argumento, nem do primeiro modo nem do segundo.

8. Nada pode substituir uma variável que, numa sentença autêntica, esteja ligada por um operador (assumindo-se que este não seja um operador universal que se constitua num membro principal do enunciado integral). Este é o sentido da "aparência" da variável, do seu estar "ligada". Deste ponto de vista, os funtores se comportam de maneira oposta.

Se então os funtores são concebidos como não ligadores e os operadores como ligadores, vê-se logo que um operador não pode ser incluído entre os funtores.

Dever-se-ia ainda indicar, como diferença secundária entre um funtor e um operador, o fato de que um funtor pode apresentar-se também como argumento de um outro funtor, enquanto um operador nunca pode apresentar-se como argumento de um funtor.

Apesar desta diferença entre eles, subsiste ainda uma analogia entre operador e funtor. Um operador, juntamente com a expressão a que se refere, pode formar, exatamente como um funtor com os seus argumentos, uma totalidade composta que contém um sentido unitário. Poder-se-ia então atribuir índices também aos operadores; mas eles deveriam distinguir-se daqueles atribuídos aos funtores porque, na determinação do expoente, não serão tratados do mesmo modo que os índices dos funtores. Em outras palavras, já que um operador nunca pode ser argumento, o seu índice não deve ser fundido com um índice que o preceda na seqüência própria de índices ou nas suas derivações, mas deve ser combinado com índices que o seguem. Proponhamos então para os índices dos operadores a forma de uma fração, à esquerda da qual se acrescenta um traço vertical. O operador "(Πx)" receberia então o índice $\left|\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\right.$ sempre que ele, junto com uma sentença, forme uma sentença.

Atribuímos *um único* índice ao operador considerado como um todo, mesmo se o operador pareça ser formado por mais de uma palavra. Com isso, não estaremos transgredindo o princípio segundo o qual um índice deve ser associado apenas a uma palavra isolada, enquanto os índices de expressões compostas devam ser considerados apenas como expoentes (isto é, como derivações últimas de suas seqüências de índices). De fato, um operador não pode ser tratado como uma expressão formada por mais de uma palavra. Em última análise, o operador é uma palavra singular composta de muitas letras. Há também notações para os operadores nas quais isso aparece claramente. Por exemplo, Scholz escreve “$\tilde{x}$” no lugar de “(Πx)”. E de resto, também na notação usual em que se escreve “(x)” ao invés de “(Πx)”, ou mesmo “Π_x” ao invés de “(Πx)”, manifesta-se o caráter de palavra singular do operador.

9. Se uma expressão contém um operador, o seu expoente deverá ser calculado de um modo diferente do indicado anteriormente. De fato, se procedêssemos com os índices dos operadores da mesma forma que o fizemos com os índices dos funtores, poderia ocorrer uma fusão do índice de um operador com um índice que o precede, coisa que, como já observamos, é inadmissível.

Tomemos, por exemplo, a expressão seguinte:

$$\begin{array}{ccccc} F & . & \Pi x & . & x \\ \dfrac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{s}} & & \left| \dfrac{s}{s} \right. & & n \end{array} \tag{A}$$

Se formássemos o seu expoente segundo a indicação anterior, obteríamos estas derivações:

$$\text{I. } \dfrac{\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}}{\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}} \left| \dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}} \right. \mathrm{n}, \qquad \text{II. } \dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}\,\mathrm{n}, \qquad \text{III. s}$$

Obter-se-ia então como expoente o índice da sentença, enquanto é óbvio que a expressão em A é sintaticamente mal-formada.

A nova regra para a formação do expoente de uma expressão requer que a parte da sua seqüência própria de índices que começa com o traço vertical mais à direita seja considerada separadamente, e precisamente que, pela parte que possui um índice com o traço apenas no seu início, a última derivação seja obtida segundo a regra precedente. O índice com o traço vertical será tratado assim do mesmo modo que aquele sem traço; por exemplo, o índice “s” pode substituir tanto “$\dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\,\mathrm{s}$” quanto “$\left|\dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\right.\mathrm{s}$”, e assim por diante.

Uma vez que é calculada a última derivação desta seqüência parcial de índices, ela é substituída pela seqüência parcial de índices na seqüência inteira de índices. Aqui se distinguem dois casos. Ou no cálculo da última derivação da seqüência parcial de índices com o traço que se encontra no seu início não ocorre (isto é, na formação da n-ésima derivação a partir da $n-1$-ésima, ele foi substituído, na $n-1$-ésima derivação, junto com os índices que o seguem pelo seu numerador) ou isso não acontece.

Se ocorre esta segunda possibilidade, isto é, se o índice com o traço continua iniciando a seqüência parcial de índices, paramos aí e declaramos que a seqüência de índices inteira (obtida substituindo a seqüência parcial de índices separada pela sua última derivação) é a última derivação, isto é o expoente, da seqüência inteira de índices própria da expressão considerada.

Mas se se verifica a primeira possibilidade, isto é, se o índice com o traço não aparece no início da seqüência parcial de índices, então o seu traço vertical desaparece da seqüência inteira de índices e o número de traços verticais se reduz de uma unidade. Este procedimento prosseguirá então segundo esta mesma regra, até que ou qualquer índice com o traço não pode mais ser resolvido ou todos os índices com o traço já o foram e conseguimos uma seqüência de índices privada de traços que não admite nenhuma outra derivação. Designamos a seqüência obtida na última fase deste procedimento como a última derivação da seqüência própria de índices inicial da expressão em questão e como seu expoente.

Queremos ilustrar este novo procedimento exemplificando com a seguinte expressão:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
(\Pi f g) & :. & (\Pi x) & . & f & x & \supset & g & x & : & \supset & : & (\Pi x) & . & f & x & . & \supset & . & (\Pi x) & . & g & x \\
\Big|\frac{s}{s} & & \Big|\frac{s}{s} & & \frac{s}{n} & n & \frac{s}{ss} & \frac{s}{n} & n & & \frac{s}{ss} & & \Big|\frac{s}{s} & & \frac{s}{n} & n & & \frac{s}{ss} & & \Big|\frac{s}{s} & & \frac{s}{n} & n
\end{array} \tag{A}$$

A sua seqüência própria de índices tem a forma:

$$\Big|\frac{s}{s}\ \frac{s}{s\,s}\ \Big|\frac{s}{s}\ \frac{s}{s\,s}\ \frac{s}{n}\ n\ \frac{s}{n}\ n\ \frac{s}{s\,s}\ \Big|\frac{s}{s}\ \frac{s}{n}\ n\ \Big|\frac{s}{s}\ \frac{s}{n}\ n \tag{I}$$

Formamos antes de mais nada a última derivação da parte que se encontra à direita do último traço vertical:

$$1.\ \Big|\frac{s}{s}\ \ \frac{s}{n}\ \ n \qquad 2.\ \frac{s}{s}\ \ s \qquad 3.\ s$$

Substituímos agora em (I) a parte separada pelo último traço pela sua última derivação e teremos assim um traço a menos. Obteremos deste modo:

$$\Big|\frac{s}{s}\ \frac{s}{s\,s}\ \Big|\frac{s}{s}\ \frac{s}{s\,s}\ \frac{s}{n}\ n\ \frac{s}{n}\ n\ \frac{s}{s\,s}\ \Big|\frac{s}{s}\ \frac{s}{n}\ n\ s \tag{II}$$

Procedamos em relação a (II) do mesmo modo que no caso (I) e obteremos:

$$\Big|\frac{s}{s}\ \frac{s}{s\,s}\ \Big|\frac{s}{s}\ \frac{s}{s\,s}\ \frac{s}{n}\ n\ \frac{s}{n}\ n\ \frac{s}{s\,s}\ s\ s \tag{III}$$

que será tratado do mesmo modo. Obteremos assim a última derivação da parte separada em (III) pelo último traço. Já que se trata de um procedimento extenso, executemo-lo passo a passo aqui:

$$\left|\frac{s}{s}\right. \frac{s}{s\,s}\; \frac{s}{n}\; n\; \frac{s}{n}\; n\; \frac{s}{s\,s}\; s\; s \tag{1}$$

$$\left|\frac{s}{s}\right. \frac{s}{s\,s}\; s\; \frac{s}{n}\; n\; \frac{s}{s\,s}\; s\; s \tag{2}$$

$$\left|\frac{s}{s}\right. \frac{s}{s\,s}\; s\; s\; \frac{s}{s\,s}\; s\; s \tag{3}$$

$$\left|\frac{s}{s}\right. s\; \frac{s}{s\,s}\; s\; s \tag{4}$$

$$\left|\frac{s}{s}\right. s\; s \tag{5}$$

$$s\; s \tag{6}$$

Substituindo este valor pela parte separada em (III) pelo último traço, obteremos:

$$\left|\frac{s}{s}\right. \quad \frac{s}{s\,s} \quad s \quad s \tag{IV}$$

Assim, determina-se facilmente

$$s$$

como última derivação da seqüência de índices restante.

A última derivação obtida da seqüência de índices deste modo constitui o expoente da expressão (A).

Examinemos um novo exemplo em que não se resolvem todos os índices com o traço. Tomemos, por exemplo, a expressão

$$\begin{array}{ccccccccccc} (\Pi x) & . & f & x & : & \supset & : & (\Pi x) & . & g & (x, \quad z) \\ \left|\frac{s}{s}\right. & & \frac{s}{n} & n & & \frac{s}{s\,s} & & \left|\frac{s}{s}\right. & & \frac{n}{n\,n} & n \quad n \end{array} \tag{B}$$

A sua seqüência própria de índices é

$$\frac{s}{s\,s} \quad \left|\frac{s}{s}\right. \quad \frac{s}{n} \quad n \quad \left|\frac{s}{s}\right. \quad \frac{n}{n\,n} \quad n \quad n \tag{I}$$

Formamos a última derivação da sua parte separada pelo último traço. Ela tem a forma

$$\left|\frac{s}{s}\right. \quad n$$

Neste caso, o índice com o traço ocorre. Em conseqüência, o último traço não é deixado de lado e a última derivação de (I), como também o expoente de B, tem a forma

$$\frac{s}{s\,s} \;\Big|\; \frac{s}{s} \quad \frac{s}{n} \quad n \;\Big|\; \frac{s}{s} \quad n$$

A expressão B não tem, portanto, um índice único como expoente.

Obtemos assim um método para conseguir o expoente das expressões contendo operadores. É claro que isso inclui em si, como caso especial, o método anteriormente indicado para expressões desprovidas de operadores. (Dever-se-ia apenas falar, na sua formulação, de índices que se apresentam “eventualmente” com o traço.) Poderemos agora repetir integralmente a definição de coesão sintática anteriormente apresentada, e ela valeria também para expressões que contenham operadores.

10. No caso de expressões desprovidas de operadores, a coesão sintática coincide com a boa formação sintática. Entretanto, no caso de expressões em que ocorrem operadores, além da coesão sintática uma outra condição deve também ser satisfeita. Esta condição requer que, no argumento de cada um dos operadores, isto é na expressão a que o operador se aplica,[6] a toda variável contida no operador corresponda uma variável da mesma forma que não esteja ligada dentro deste argumento. Apenas se esta condição é satisfeita, uma expressão sintaticamente coesa — contendo operadores — é também sintaticamente bem formada.

III

11. Indicamos o papel de ligação dos operadores como sua característica peculiar, que os distingue dos funtores. Ligar uma ou mais variáveis é a propriedade comum a todos os operadores. Além disso, os diferentes operadores desempenham também outros papéis segundo os quais eles se diferenciam entre si. Mas existe um operador cuja única função é a de ligar uma ou mais variáveis. Um tal operador parece ser indicado pelo símbolo do circunflexo “ˆ” introduzido por Whitehead e Russell. Russell utiliza este símbolo para distinguir o que ele chama de “o valor indeterminado de uma função” daquilo que ele chama de “a própria função”. Se “fx” representa o valor indeterminado de uma função, então “$f\hat{x}$” representa a própria função. Mas, através de um exame mais minucioso, parece claro que o que Russell chama de “valor indeterminado de uma função” não é outra coisa senão o que se chama comumente de “valor da variável dependente”. Ao contrário, aquilo que Russell chama de “a própria função” não é uma

[6] A rigor não se deveria falar de “argumento” de um operador, mas se deveria usar, por exemplo, o termo “operando”. As nossas observações precedentes referentes à “boa articulação” de uma expressão devem ser claramente estendidas também à relação entre operador e operando.

variável, mas qualquer coisa constante. Um exame cuidadoso do que Russell usa para explicar a noção de "própria função" torna lícito presumir que, com esta caracterização, eles tinham em mente aquilo que nós indicaremos como correlato objetivo de um funtor. Portanto, $f\hat{x}$ seria a mesma coisa que f e os símbolos "$f\hat{x}$" e "f" designariam a mesma coisa. Se esta interpretação é correta, pode-se incluir o circunflexo entre os operadores, uma vez que o seu papel consiste em "cancelar" ou "ligar" uma variável. Vale lembrar que, com o auxílio do circunflexo, muitas variáveis podem estar ligadas simultaneamente em uma expressão. Assim, por exemplo, "$f\hat{x}\hat{y}$" representa o funtor biargumental "f".

Nos casos mais simples, em que o circunflexo vem aposto a todos os argumentos do funtor principal da expressão inteira, como, por exemplo, nos exemplos esquemáticos "$f\hat{x}$" ou "$f\hat{x}\hat{y}$", ele tem a mesma função de um traço com auxílio do qual a variável marcada (isto é, marcada com o circunflexo) seria cancelada, e assim eliminada. Mas se nem todos os argumentos do funtor principal da expressão inteira vêm marcados, o papel do circunflexo não pode mais ser comparado ao de um traço comum. Por exemplo, "$\hat{p} \supset .a. \sim a$" (onde "$a$" é um enunciado constante) representa o funtor "fx" de tipo $\frac{s}{s}$ para o qual vale a seguinte equivalência:

$$fp. \equiv .p \supset .a. \sim a$$

Vê-se logo que o símbolo da negação no lugar de "f" satisfaz esta equivalência. Por isso "$\hat{p} \supset .a. \sim a$" significa a mesma coisa que "$\sim$". Ao contrário, "$\supset .a. \sim a$", que significa a mesma coisa que "$p \supset .a. \sim a$" uma vez que se suprima "p", não representa um funtor $\frac{s}{s}$ e não é, de fato, uma expressão sintaticamente coesa.

12. Se uma expressão inteira pertencente à categoria dos enunciados possui uma variável marcada pelo circunflexo, encontramos na notação russelliana, neste caso, um outro símbolo que pode ser colocado no mesmo nível que o circunflexo. Trata-se do prefixo $(\hat{x})$ que é utilizado para a formação dos símbolos das classes e, respectivamente, dos prefixos $(\hat{x}\hat{y})$ que são utilizados no caso dos símbolos de relações. De fato, se "fx" representa uma função proposicional, o símbolo "$(\hat{x}).fx$" (deixando de lado certas complicações derivadas da admissão de funções intensionais, abandonadas por Russell na segunda edição dos *Principia*) designa a mesma coisa que o funtor "f", portanto também "$f\hat{x}$". Isso vale também em relação à equivalência do significado dos símbolos "$(\hat{x}\hat{y}).fxy$" e "$f\hat{x}\hat{y}$".

Queremos servir-nos dos prefixos $(\hat{x})$ ou $(\hat{x}\hat{y})$ também nos casos em que a expressão a que eles se aplicam não pertence à categoria enunciado, de modo que em geral podemos escrever "$(\hat{x}).fx$" no lugar dos símbolos de tipo "$f\hat{x}$" e "$(\hat{x}\hat{y}).fxy$" no lugar dos símbolos de tipo "$f\hat{x}\hat{y}$". Com esta mudança de notação para o circunflexo, a expressão inteira em que se dá tal operação pode ser claramente caracterizada; isso não era possível nas notações anteriores, e podia conduzir, em casos particularmente complexos, à ambigüidade. Além disso, este novo modo de escrever nos permite aplicar tal operação a uma expressão várias vezes, iterativamente; permite, portanto, escrever "$(\hat{x}) : (\hat{y}).fxy$" que não é a mesma coisa que "$(\hat{x}\hat{y}).fxy$" (conforme a notação anterior, "$f\hat{x}\hat{y}$"). Nesta nova notação fica claramente evidenciado o caráter de operador do circunflexo.

13. Na medida em que é um operador, o circunflexo $(\hat{x})$ (ou $(\hat{x}\hat{y})$, etc.) recebe em nossa notação um índice com um traço. Mas já que tais operadores podem ser aplicados a expressões de várias categorias do significado, que elas por sua vez se transformam em expressões de categorias diversas, o circunflexo não recebe sempre o mesmo índice com o traço.

A explicação em termos do operador circunflexo (de um lugar) é a seguinte: um operador "$(\hat{x})$" aplicado a uma variável X em uma expressão A é um operador circunflexo se, juntamente com esta expressão, forma um funtor que, com a variável X como argumento, forma uma expressão equivalente à expressão A. Isso pode ser esclarecido pelo exemplo que se segue, no qual a expressão A tem a forma "fx" e a variável X, a forma "x":

$$(\hat{x}).fx : x. :\equiv .fx$$

Do que foi dito acima, fica claro que se a expressão A, a que o operador se aplica, tem o expoente "E_1" e a variável X o índice "E_2", o operador deve ter o índice com o traço

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{E_1}{E_2} \\ \hline E_1 \end{array}\right.$$

O índice com o traço do operador circunflexo assumirá formas diversas conforme os índices que deverão substituir "E_1" e "E_2".

A mesma coisa ocorrerá também no caso dos operadores de vários lugares.

Como já observamos, o papel do operador circunflexo parece exaurir-se na ligação das variáveis. Os outros operadores têm, ao contrário, um papel mais amplo. Assentamos a diferença principal entre um funtor e um operador no fato de que o segundo, mas não o primeiro, serve para ligar variáveis. Passa a ser natural então pensar que provavelmente o papel dos operadores que não têm apenas o efeito de ligar as variáveis possa ser duplo, o papel de ligação do operador é assumido pelo operador circunflexo, e qualquer outro por um funtor.

Introduzamos, por exemplo, o funtor "Π", ao qual atribuímos o índice $\dfrac{s}{\dfrac{s}{n}}$, isto é, o interpretamos sintaticamente como um funtor que forma, junto com um funtor $\dfrac{s}{n}$ como seu argumento, um enunciado. Neste ponto acrescentamos ainda a seguinte explicação em termos deste funtor. "$\Pi(f)$" é satisfeito por todos e apenas os funtores $\frac{s}{n}$ (no lugar de "f") que com qualquer nome formam um enunciado *verdadeiro*. Vale portanto:

$$\Pi(f). \equiv .(\Pi x).fx.$$

Um tal funtor chamamos de funtor universal. Podemos então substituir o operador-todo por um funtor universal toda vez que pudermos indicar, pela função proposicional a que se aplica o operador (Πx), um funtor que, com x como argumento, forme uma expressão equivalente a esta função proposicional. Mas isso é sempre permitido pelo operador circunflexo. Na verdade, "$(\hat{x}).fx$" é de fato o funtor requerido pela função proposicional "fx", em qualquer forma que ela se apresente. Podemos, portanto, escrever "$\Pi((\hat{x}).fx)$" no lugar de "$(\Pi x).fx$". Deste modo, o papel do operador-todo pode ser substituído por uma combinação dos papéis do funtor universal e do operador circunflexo. Não é necessário frisar que não é um único funtor universal, mas são vários que se diferenciam nas suas categorias do significado, segundo a categoria do significado do funtor que assumem como seus argumentos.

Graças à equivalência

$$\Pi(f). \equiv .(\Pi x).fx.$$

o funtor universal pode facilmente ser definido com auxílio do operador-todo. A sua definição defronta-se com dificuldades insuperáveis se nela não se quisesse utilizar deste operador. Parece-nos que a definição do funtor universal poderia encontrar um substituto na indicação das regras inferenciais que se aplicassem ao seu uso dedutivo. O símbolo "Π" seria então introduzido abertamente na lógica como um símbolo primitivo e teria uma posição mais clara, no sistema desta ciência, que o espúrio operador-todo, que não pertence nem aos símbolos definidos nem aos símbolos primitivos da lógica.

Mas o operador circunflexo deveria ser definido ou deveria ser contrabandeado para a lógica a partir do operador-todo. Abster-nos-emos de resolver aqui este dilema. Contudo, se resolvêssemos contrabandear o operador circunflexo, poder-se-ia supor que talvez este expediente fosse mais rendoso, uma vez que existe a possibilidade de substituir todos os demais operadores, presentes em bom número nas ciências dedutivas, pelo operador circunflexo e pelos funtores correspondentes. A nosso ver, o fato de se conseguir em qualquer lugar fazer uso de um único tipo de operador, isto é, do operador circunflexo, não representaria uma vantagem a ser desprezada.

Allatum est die 15. Iulii 1934