UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

ALESSANDRA BEATRIZ PACHAS ZAVALA

O ESTUDO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS MOTIVADO PELA GEOMETRIA FRACTAL

CURITIBA
2007

ALESSANDRA BEATRIZ PACHAS ZAVALA

O ESTUDO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS MOTIVADO PELA GEOMETRIA FRACTAL

Monografia apresentada como requisito parcial à conclusão do Curso de Especialização para Professores de Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná - UFPR.

Orientadora: Prof.ª Dra. Elizabeth Wegner Karas

CURITIBA

2007

TERMO DE APROVAÇÃO

ALESSANDRA BEATRIZ PACHAS ZAVALA

O ESTUDO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS MOTIVADO PELA GEOMETRIA FRACTAL

Monografia aprovada como requisito parcial para obtenção do título de Especialista no Curso de Especialização para Professores de Matemática, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientadora: Profa. Dra. Elizabeth Wegner Karas
Departamento de Matemática, UFPR

Prof. Dr. José João Rossetto
Departamento de Matemática, UFPR

Curitiba, outubro de 2007.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que em sua bondade, deu-me forças para a conclusão deste trabalho.

À Prof.ª Dra. Elizabeth Wegner Karas, pela orientação, confiança e entusiasmo dedicados a este trabalho.

Às queridas amigas, Andréia Gomes, Denise Pallesi e Kátia Bianco, pelo companheirismo e incentivo.

A todos os professores do *Curso de Especialização para Professores de Matemática* da Universidade Federal do Paraná, pelo apoio e profissionalismo, em especial, à Prof.ª Dra. Ana Maria Petraitis Liblik pelo carinho.

Aos meus amigos que tanto me apoiaram nos momentos difíceis, por me ouvirem e incentivarem.

A minha querida mãe Bertha Beatriz Angélica Pachas Arámbulo, e a minha avó Bertha Arámbulo Rivas (*in memoriam*), por estarem em todos os momentos ao meu lado, me apoiando e incentivando.

SUMÁRIO

RESUMO

Este trabalho apresenta a Geometria Fractal como motivação para o estudo de funções exponenciais e logarítmicas. Dentre as abordagens matemáticas possíveis para os fractais, pretende-se ressaltar o processo iterativo e o processo de contagem, relacionando por meio de tabelas, funções que serão dos tipos exponencial e logarítmica. Primeiramente, será apresentada uma seqüência de conceitos teóricos sobre funções e qual a importância de seu estudo. A seguir, descobriremos o que vem a ser a Geometria Fractal, bem como suas características. Também apresentamos alguns fractais e analisamos suas construções passo a passo, sendo que os resultados obtidos são exibidos por meio de tabelas. Finalizamos com o conceito de dimensão fractal e suas aplicações.

Palavras-chave: Geometria Fractal, dimensão fractal, função exponencial e função logarítmica.

INTRODUÇÃO

Neste texto pretende-se apresentar a Geometria Fractal como um motivador no estudo de funções exponenciais e logarítmicas. Especificamente, deseja-se mostrar como os fractais podem auxiliar o professor a tornar suas aulas mais atrativas aos alunos.

A estruturação deste trabalho foi um tanto quanto complicada, já que se trata de um tema não muito conhecido no meio escolar e acadêmico. Há muita bibliografia referente ao tema Geometria Fractal, porém não se encontram bibliografias específicas do tema da forma como será abordado neste trabalho.

O texto está estruturado de maneira a ser possível explorar separadamente e de forma abrangente os diversos componentes nos quais ele se baseia, com as devidas fundamentações teóricas. Assim, foi adotada esta seqüência para o corpo do trabalho.

O Capítulo 1 apresenta as funções exponenciais e logarítmicas, porque é necessário o estudo de funções, baseado no PCN_+: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (2002), bem como suas definições e principais propriedades baseadas em Iezzi et al. (2004) e Lima (1991).

O Capítulo 2 expõe detalhadamente a Geometria Fractal. Como o objetivo deste capítulo é situar o leitor dentro da Geometria Fractal, num primeiro momento, adotamos uma abordagem mais abrangente. Essa postura se justifica dentro da proposta do capítulo de responder a questões ligadas às origens matemáticas dos fractais e sobre suas formas originais de construção, situando-a enquanto objeto fractal. Em seguida, são enfatizadas suas principais características que se baseiam na obra de Serra e Karas (1997). Finalizando, são analisados alguns fractais e suas particularidades, fazendo um estudo detalhado do fractal, sendo esse usado como motivador para o estudo das funções exponenciais e logarítmicas.

O Capítulo 3 propõe uma análise mais aprofundada do conceito de dimensão fractal. O capítulo inicia-se fazendo uma retomada da dimensão euclidiana para, em seguida, construir junto ao leitor o conceito de dimensão fractal. Posteriormente, conhecida uma maneira de se calcular a dimensão fractal, esse tema será explorado em alguns dos fractais vistos no Capítulo 2.

1 FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

1.1 POR QUE ESTUDAR FUNÇÕES?

De acordo com Brasil (2002), o estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.

Tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações. Todo esse percurso é, então, abandonado assim que a definição de função é estabelecida, pois para a análise dos diferentes tipos de funções todo o estudo relativo a conjuntos e relações é desnecessário. Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente.

Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contexto para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas.

As funções exponenciais e logarítmicas, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como a Geometria Fractal.

A seguir veremos alguns conceitos de funções exponenciais e logarítmicas, baseados nas obras de Lima (1991) e Iezzi (2004).

1.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definição

Dado um número real a ($a > 0$ e $a \neq 1$). A *função exponencial de base* a, $f : \mathrm{IR} \rightarrow \mathrm{IR}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in$ IR:

1. $f(x + y) = f(x) \,.\, f(y)$
2. $a^1 = a$
3. Se $a > 1$, f é crescente.

   $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

   Se $0 < a < 1$, f é decrescente.

   $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Da definição apresentada podemos tirar algumas conseqüências:

- A função exponencial f é injetiva

  De fato, temos que se $a > 1$

  $$x \neq y \Rightarrow \begin{cases} x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y) \\ x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y) \end{cases}$$

  E, se $0 < a < 1$

  $$x \neq y \Rightarrow \begin{cases} x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y) \\ x > y \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y) \end{cases}$$

  Logo, a função é injetiva.

- $f(x) \neq 0$, $\forall\, x \in$ IR

  Pela propriedade 1, temos que $f(x + y) = f(x) \,.\, f(y)$. Suponha, por contradição, que existe $x_0 \in$ IR tal que $f(x_0) = 0$.

  $f(x_0 + y) = f(x_0) \,.\, f(y) = 0 \,.\, f(y) = 0$

  $f(x_0 + y) = 0$ e $f(x_0) = 0$. Contradição, pois f é injetiva.

- A função exponencial f é sobrejetiva

  $f(x) > 0$, $\forall\, x \in$ IR

  $$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$$

  Como $f(x) > 0$, $\forall\, x \in$ IR então Im $f = \mathrm{IR}^+ =$ CD.

- f é contínua

  $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$, escrevendo $x = x_0 + h$, logo $x - x_0 = h$ e então $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1|$.

  Sabemos que a^h pode ser tornado tão próximo de 1 quanto se deseje desde que se tome h suficientemente pequeno. Como a^{x_0} é constante, podemos fazer o produto $a^{x_0}|a^h - 1|$ tão pequeno quanto se deseje, logo $\lim_{x \to x_0}|a^x - a^{x_0}| = 0$, ou seja, $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Dessa forma, podemos concluir que para todo número real positivo a, com $a \neq 1$, a função exponencial f: IR → IR$^+$, dada por $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre IR e IR$^+$, crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional de transformar somas em produtos, isto é, $f(x + y) = f(x) . f(y)$.

Gráfico

Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = a^x$, podemos dizer:

1. a curva representativa está toda acima do eixo x, pois $f(x) = a^x > 0$ para todo $x \in$ IR.
2. corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

   Na função exponencial $f(x) = a^x$, temos:

   $x = 0 \Rightarrow f(0) = a^0 = 1$

   Isso significa que o gráfico cartesiano da toda função exponencial corta o eixo y no ponto de ordenada 1.
3. se $a > 1$, a função é crescente

   se $0 < a < 1$, a função é decrescente.

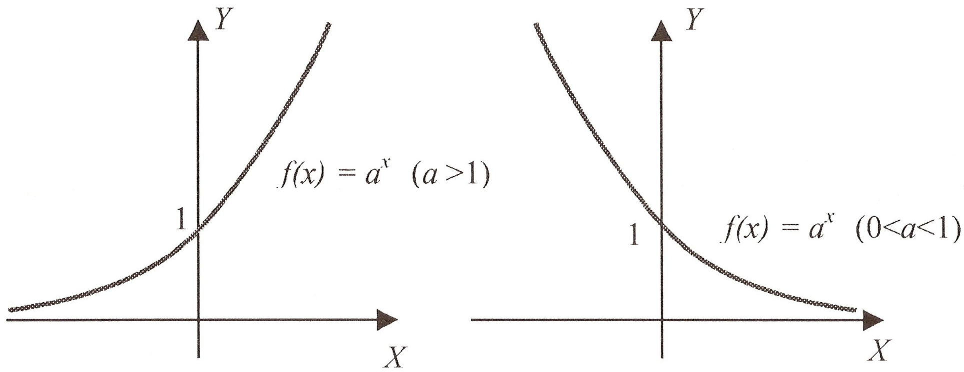


Figura 1 – Gráficos das funções exponenciais crescente e decrescente

1.3 FUNÇÃO INVERSA

Seja f: X $\rightarrow$ Y uma função bijetora. Então:

a) Para cada $x \in$ X, existe um único $y \in$ Y, tal que $y = f(x)$.

b) Para cada $y \in$ Y, existe um único $x \in$ X, tal que $f(x) = y$.

De b) podemos definir uma nova função g: Y $\rightarrow$ X que a cada elemento $y \in$ Y associa $x = g(y) \in$ X, tal que $f(x) = y$.

Esta função g é denominada função inversa de f.

Quando g é a inversa de f, tem-se $g(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$.

1.4 LOGARITMO

O aparecimento dos logaritmos ocorreu no começo do século XVII, quando era necessário facilitar os trabalhosos cálculos trigonométricos da Astronomia e da Navegação, entre outros. Para facilitar esses cálculos, surgiram nessa época as primeiras tábuas de logaritmos, inventadas independentemente por John Napier (1550-1617) e Jost Bürgi (1552-1632). Logo depois, Henry Briggs (1561-1631) aperfeiçoou essas tábuas, apresentando os logaritmos decimais.

A principal contribuição dos logaritmos foi a de transformar operações de multiplicação e divisão em, respectivamente, adição e subtração.

Segundo Boyer (1996), a invenção dos logaritmos veio a ter um tremendo impacto sobre a estrutura da matemática. Os logaritmos foram saudados alegremente por Kepler não como uma contribuição às idéias, mas porque aumentavam enormemente a capacidade de computação dos astrônomos.

As tábuas de logaritmos foram muito utilizadas no século XX, mas foram gradativamente substituídas por calculadoras. Os produtos da grande invenção de Napier tornaram-se apenas citações em livros, e o ensino dos logaritmos mostra-o apenas como um instrumento de cálculo.

A função logarítmica, porém, nunca morrerá pela simples razão de que as variações exponencial e logarítmica são partes vitais da natureza. Conseqüentemente, um estudo das propriedades da função logarítmica e de sua inversa, a função exponencial, permanecerá sempre uma parte importante do ensino da Matemática.

Definição de Logaritmo

Iezzi et al. (2004) definem: Sendo a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b.

Em símbolos: se $a, b \in$ IR, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então:

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

Onde, a é a base do logaritmo, b é o logaritmando e x é o logaritmo.

O logaritmo de base 10 é chamado *logaritmo decimal*, sua representação é dada da seguinte forma:

$\log_{10} b = \log b$

Conseqüência da Definição de Logaritmo

Decorrem da definição de logaritmos as seguintes propriedades para $0 < a \neq 1$ e $b > 0$.

1.ª O logaritmo da unidade em qualquer base é igual a 0.

$\log_a 1 = 0$

2.ª O logaritmo da base em qualquer base é igual a 1.

$\log_a a = 1$

Propriedades dos Logaritmos

1.ª Logaritmo do produto

Em qualquer base a $(0 < a \neq 1)$, o logaritmo do produto de dois fatores reais positivos é igual à soma dos logaritmos dos fatores.

$\log_a(x \,.\, y) = \log_a x + \log_a y$

2.ª Logaritmo do quociente

Em qualquer base a $(0 < a \neq 1)$, o logaritmo do quociente de dois fatores reais positivos é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor.

$$log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$$

3.ª Logaritmo da potência

Em qualquer base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$

4.ª Mudança de base

Se a, b e x são números reais positivos e a e b são diferentes de 1, então tem-se:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

1.5 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Definição

Dado $a > 0$, a função exponencial f: IR → IR$^+$ é definida por $f(x) = a^x$.

Sua inversa g: IR$^+$ → IR é uma função logarítmica indicada pela notação: $g(x) = \log_a x$.

A função $g(x)$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Como $a^0 = 1$, tem-se $\log_a 1 = 0$. É importante ressaltar que somente números positivos possuem logaritmo real, pois a função $x \mapsto a^x$ somente assume valores positivos.

Propriedades

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$
4. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Gráfico

Com relação ao gráfico cartesiano da função $g(x) = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$), podemos dizer:

1.º está todo à direita do eixo y ($x > 0$);

2.º corta o eixo x no ponto de abscissa 1 ($\log_a 1 = 0$ para todo $0 < a \neq 1$);

3.º se $a > 1$ é uma função crescente e se $0 < a < 1$ é uma função decrescente;

4.º é simétrico em relação à reta $y = x$ (função identidade) do gráfico da função $f(x) = a^x$.

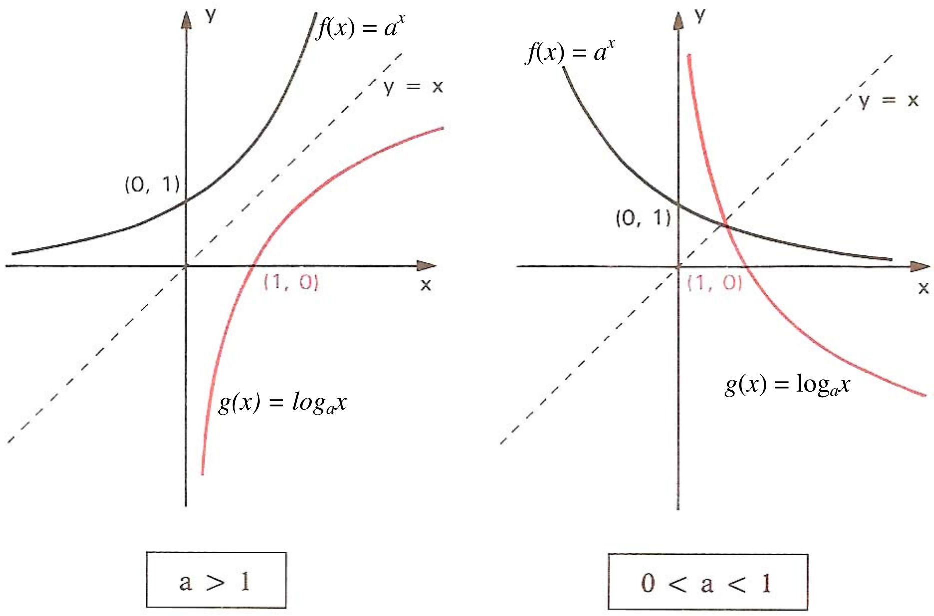


Figura 2 – Gráficos das funções exponencial, logarítmica e identidade

2 GEOMETRIA FRACTAL

A Geometria Fractal traz consigo um forte apelo visual e artístico, mas o seu estudo não deve se reduzir apenas a isto. Se não houver outra justificativa, não há necessidade de se apresentar os fractais nas aulas de Matemática. Por trás desta beleza visual, se esconde muita Matemática, muitas vezes de fácil compreensão e entendimento devido à simplicidade na lei de formação. É essa simplicidade que me faz crer ser possível, interessante e muito produtiva a abordagem da Geometria Fractal no Ensino Médio.

Sallum (2005) apresenta diversas possibilidades para a abordagem dos fractais no Ensino Médio, complementando o estudo de diversos tópicos:

> A introdução de fractais no Ensino Médio, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma idéia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas.

Uma das formas que Barbosa (2002) propõe para a exploração de fractais é estudar as relações numéricas de seus elementos, conforme as interações sucessivas; por exemplo, contagem, perímetro, áreas e volumes (se for o caso).

Dentre as muitas abordagens matemáticas possíveis dos fractais, pretendo ressaltar neste trabalho o processo iterativo e o processo de contagem, relacionando por meio de tabelas, funções que serão dos tipos exponenciais e logarítmicas.

2.1 AFINAL, O QUE É FRACTAL?

A partir dos trabalhos de Mandelbrot, na segunda metade do século XX, foram iniciados os estudos sobre as estruturas fractais. O termo fractal foi criado a partir do latim *fractus* que significa quebrar, fracionar.

Fractais são formas geométricas com algumas características especiais que os definem e distinguem de outras formas, como auto-semelhança em diferentes níveis de escala. Atualmente a Geometria Fractal, e em especial a dimensão fractal, vem sendo utilizada em diversas áreas do conhecimento, como o estudo de sistemas caóticos (variação da bolsa de valores, por exemplo); caracterização de objetos; análise e reconhecimento de padrões em imagens; análise de texturas e medição de comprimento de curvas (neoplasia da mucosa oral, por exemplo). Devido às diversas aplicações da dimensão fractal, faremos, mais adiante, um estudo detalhado.

A maior prova da diversidade presente na Geometria Fractal resume-se ao fato de que sequer há uma definição formal que seja consensual e definitiva do que venha a ser um fractal, o que pode ser constatado em algumas das definições que foram dadas em diferentes obras.

Em Barbosa (2002), encontramos uma citação de Mandelbrot a respeito da definição de fractal: *Um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch (também conhecida por dimensão fractal) excede estritamente a sua dimensão topológica.*

No entanto essa definição mostrou-se insuficiente, pois exclui alguns conjuntos que podem ser considerados fractais. Feder (1988), em sua obra, considerou como razoável a caracterização de Mandelbrot para que não fossem excluídos alguns objetos da física considerados fractais:

- *um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao todo sob alguns aspectos.*

Para K. J. Falconer, autor de duas obras importantes sobre fractais (1985 e 1990), sugeriu o entendimento de fractal por meio de três características:

Um conjunto F é fractal se, por exemplo:

- *F possui alguma forma de "auto-similaridade", ainda que aproximada ou estatística;*
- *A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que sua dimensão topológica;*
- *O conjunto F pode ser expresso por meio de um procedimento recursivo ou iterativo.*

Segundo Serra e Karas (1997), fractais são figuras com propriedades e características peculiares que os diferenciam das figuras geométricas habituais.

2.1.1 Principais Características da Geometria Fractal

Visando uma melhor compreensão da Geometria Fractal em termos mais objetivos, iremos explorar alguns dos principais aspectos que a diferenciam da geometria euclidiana tradicional. Dessa forma, é possível enumerar quatro características essenciais, encontradas em Serra e Karas (1997), que estão presentes em todos os fractais e podem servir, pelo menos inicialmente, para caracterizar esse novo conjunto de formas geométricas. A primeira e a segunda estão relacionadas à aparência dos fractais. A terceira se relaciona à maneira como os fractais são construídos. A quarta e última característica se relaciona a um aspecto responsável pela grande ruptura que a geometria fractal causou na Matemática tradicional.

Estrutura fina

O grau de detalhamento de um fractal não diminui ao examinar-se uma porção arbitrariamente pequena dele. Sucessivas ampliações de um fractal levam a mais e mais detalhes, indefinidamente. Como figura, o fractal possui detalhes em partes tão pequenas como possamos imaginar. Entretanto, se o fractal for construído na tela de um computador, sua imagem na tela estará sujeita a um limite de detalhamento imposto pelo poder de resolução do vídeo. Ao se trabalhar com uma tela de resolução elevada, a imagem do fractal aparecerá com mais detalhes, mas jamais além do nível de detalhamento possibilitado pelo computador dotado dos mais poderosos recursos gráficos.

Auto-similaridade

Em termos simples, significa dizer que pequenas partes da curva repetem a forma da curva como todo, ou seja, se fizermos uma ampliação de uma região específica de um fractal, iremos encontrar uma réplica do fractal como um todo.

Simplicidade na lei de formação

Essa característica dos fractais se refere ao processo de construção que em geral utiliza algum tipo de processo iterativo, significando que, na construção de qualquer fractal, iremos repetir um determinado procedimento infinitamente, seja este procedimento um conjunto de cálculos algébricos ou uma determinada construção geométrica. A simplicidade dos algoritmos e o emprego de processos recorrentes para a formação dos fractais os tornam um alvo excelente para o uso do computador. Além disso, a repetitividade em grande escala das operações requeridas na produção dos fractais faz do computador uma ferramenta indispensável em tais situações.

Essa característica básica da construção dos fractais é em parte responsável pelo fascínio que estas figuras provocam. Pois, na maioria dos casos, os fractais são construídos a partir de elementos extremamente simples mas que, apesar disso, dão origem a figuras com extraordinária complexidade e riqueza de detalhes.

Dimensão

A dimensão espacial é estritamente maior que a dimensão topológica. A dimensão fractal diz respeito à dimensão espacial, ou seja, ao espaço ocupado pela figura. Essa dimensão pode ser calculada de várias formas. Se a figura não possuir auto-similaridade, um método gráfico utilizado é o da contagem de caixas. Se possuir, como é o caso do conjunto de Cantor, podemos calcular a dimensão por outro método um pouco mais simples, como faremos mais adiante.

A seguir, estão listados alguns fractais, entre eles: a Curva de Koch, o Triângulo de Sierpinski, o Conjunto de Cantor, a Curva de Peano e a Árvore Bifurcada. Em cada fractal veremos seu processo de construção e, a partir disso, o docente terá ferramentas para iniciar, por meio de um problema – que neste caso será o próprio processo de obtenção do fractal –, a construção do conceito de função exponencial e logarítmica ou, se preferir, usará a construção para demonstrar uma das aplicações de tais funções. Sugerimos ao docente que faça o uso do software desenvolvido em Bianco (2007), permitindo aos estudantes uma melhor visualização de cada fractal em alguns níveis de sua construção.

Segundo Onuchic (1999), ao se ensinar Matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender Matemática mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. Um objetivo de se aprender Matemática é o de poder transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros. O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos).

Dentro desse trabalho, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, mediador, interventor e incentivador da aprendizagem a partir dos tipos de fractais e suas características. O professor deve lançar questões desafiadoras envolvendo a construção fractal e auxiliar os alunos a atravessarem dificuldade que possam surgir. Ele deve também fazer intermediações, levar os alunos a pensar, construir o conhecimento de funções por meio dos fractais, esperar que eles pensem, acompanhar suas explorações e resolver, quando necessário, problemas secundários.

Com o trabalho dos alunos concluído, o docente deve anotar em tabelas os resultados obtidos pelos diferentes alunos. Num trabalho conjunto, professor e alunos, com o professor dirigindo o trabalho, é feita uma análise do que se objetivava aprender a partir do problema dado. São colocadas as devidas definições e identificadas as propriedades. É importante destacar, nesse momento, o que de matemática nova se construiu, usando as novas terminologias próprias ao assunto.

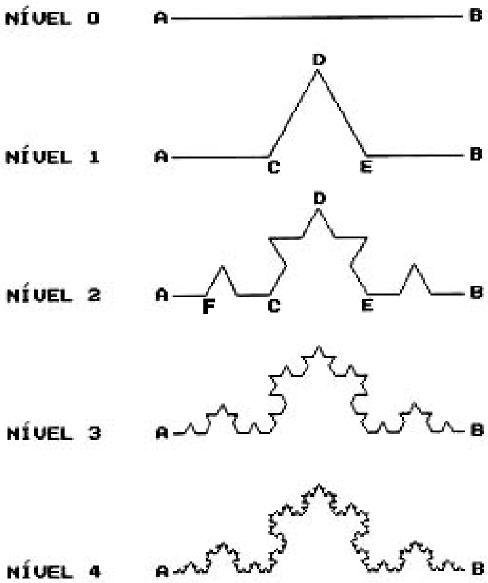
2.2 CURVA DE KOCH

Um dos exemplos de fractais mais simples é a Curva de Koch. Apresentada pelo matemático sueco Helge Von Koch, foi construída por um processo iterativo.

Construção da Curva de Koch

1. Parte-se de um segmento de reta $\overline{AB}$ de comprimento unitário (Figura 3).
2. Divide-se o segmento em 3 partes iguais e suprime-se o terço médio, colocando em seu lugar os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$, cada um com um comprimento de $\frac{1}{3}$, igual ao do segmento removido.
3. Repete-se então, em cada um dos 4 segmentos da poligonal ACDEB, a mesma operação feita com o segmento original. E continua-se o processo indefinidamente, substituindo-se cada lado da última poligonal obtida por uma poligonal de 4 lados, semelhante a ACDEB.

A Figura 3 mostra os cinco níveis iniciais da construção da curva, correspondendo o nível 0 ao segmento $\overline{AB}$ de comprimento unitário.



$$\overline{AB} = 1$$

$$\overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{AB}$$

$$\overline{AF} = \frac{1}{3}\overline{AC}$$

Figura 3 – Construção da Curva de Koch

Paralelamente ao processo de construção da Curva, é possível mostrar algumas aplicações dos conhecimentos de função exponencial e logarítmica.

Curva de Koch e Função Exponencial

Com o objetivo de relacionar os conhecimentos abstratos da função exponencial com o processo de obtenção do fractal Curva de Koch, faremos uma análise passo a passo de sua construção.

No nível 1 a curva apresenta 4 segmentos de comprimento $\frac{1}{3}$ e neste nível a curva tem um comprimento total de $\frac{4}{3}$.

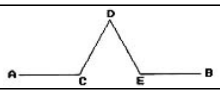
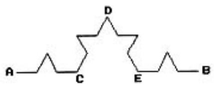
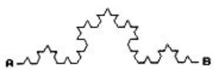
No nível 2 a curva apresenta 16 segmentos de comprimento $\frac{1}{9}$ e neste nível a curva tem um comprimento total de $\frac{16}{9}$.

No nível 3 a curva apresenta 64 segmentos de comprimento $\frac{1}{27}$ e neste nível a curva tem um comprimento total de $\frac{64}{27}$.

Generalizando, no nível x a curva apresentará 4^x segmentos de comprimento $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ e a curva terá comprimento total de $\left(\frac{4}{3}\right)^x$.

Desse fractal é possível retirar algumas informações relativas ao número de segmentos, comprimento de cada segmento e comprimento total da curva em cada nível de construção. Essas informações estão listadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Construção da Curva de Koch

Nível x	N.º de segmentos $f(x)$	Comprimento de cada segmento $g(x)$	Comprimento da Curva $h(x)$
0	1	1	1
1 	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
2 	$4 \,.\, 4 = 4^2$	$\frac{1}{9}$	$\frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$
3 	$4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 4^3$	$\frac{1}{27}$	$\frac{64}{27} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$
...	...	...	....
x 	$4 \,.\, 4 \,.\, 4 \ldots 4 \,.\, 4 = 4^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\left(\frac{4}{3}\right)^x$

Levando em consideração o número de segmentos que aumenta a cada nível, podemos apresentar a função exponencial crescente de base 4, como podemos verificar na Tabela 1. Contrapondo o que ocorre na coluna número de segmentos, o comprimento de cada segmento gera uma função exponencial decrescente de base $\frac{1}{3}$, o mesmo não acontece com o comprimento da curva que gera uma função exponencial crescente de base $\frac{4}{3}$.

Curva de Koch e Função Logarítmica

Com o intuito de abordar o estudo da função logarítmica e a construção da Curva de Koch, utilizaremos a relação apresentada na Tabela 1: nível e o número de segmentos.

Dada a função exponencial $f(x) = 4^x$ que relaciona $f(x)$ número de segmentos e x o nível de construção, temos que:

$f(x) = n$ então $4^x = n$.

Sendo n o número de segmentos para determinado nível x aplicando o conceito de logaritmo é possível obter o nível de construção, dado pela relação abaixo:

$4^x = n$

$$\log_4 n = x \qquad (1)$$

Logo, obtemos a fórmula (1) que determina o nível de construção dado o número de segmentos. Analogamente é possível relacionar o nível com o comprimento de cada segmento e com o comprimento da curva.

Situações-problema que podem ser exploradas pelo docente

1. Determine, usando a fórmula (1), em que nível o número de segmentos é igual a 256.
   Solução:
   Sabemos que $n = 256 = 4^4$. Aplicando em (1), temos:
   $\log_4 n = x$
   $\log_4 4^4 = x$ aplicando a propriedade 3 de logaritmos
   $4\log_4 4 = x$
   $x = 4$
   No nível 4 o número de segmentos é 256.

2. Qual será o comprimento de cada segmento no nível 4?
   Solução:
   $$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$
   $$x = 4 \Rightarrow g(4) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

O comprimento de cada segmento no nível 4 será $\frac{1}{81}$.

3. Sabendo o comprimento de cada segmento nos níveis 3 e 4, qual será a propriedade de função exponencial usada para descobrir o comprimento de cada segmento no nível 7? Qual será esse comprimento?

   Solução:

   Será utilizada a 1.ª propriedade de função exponencial: $f(x+y) = f(x) \,.\, f(y)$

   Sabemos que $g(3+4) = g(3) \cdot g(4)$ e que $\begin{cases} g(3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \\ g(4) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \end{cases}$. Dessa forma, temos:

   $$g(3+4) = g(3) \cdot g(4)$$
   $$g(7) = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{81}$$
   $$g(7) = \frac{1}{2187}$$

   O comprimento no nível 7 será $\frac{1}{2187}$.

4. O que acontece com o comprimento de cada segmento à medida que x aumenta? Qual propriedade justifica sua resposta?

   Solução:

   Como a função exponencial é sempre positiva, à medida que x aumenta, o comprimento do segmento diminui tendendo a zero. Isso pode ser justificado pela terceira propriedade de função exponencial, pois o comprimento de cada segmento é dado pela função $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ que tem como base $0 < \frac{1}{3} < 1$, logo, g é decrescente.

5. Qual será o comprimento da curva no nível 5?

   Solução:

   $$h(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$$

   $$x = 5 \Rightarrow h(5) = \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{1024}{243}$$

   No nível 5 o comprimento da curva será $\frac{1024}{243}$.

6. O que acontece com o comprimento da curva à medida que x aumenta? Qual propriedade justifica sua resposta?

   Solução:

   À medida que x aumenta, o comprimento da curva aumenta tendendo ao infinito. Isso pode ser justificado pela terceira propriedade de função exponencial, pois o comprimento de cada segmento é dado pela função $h(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ que tem como base $\frac{4}{3} > 1$, logo, h cresce indefinidamente.

7. Quantas etapas são necessárias para que o comprimento da curva seja maior que 100? Dados: $\log 4 \cong 0{,}60$ e $\log 3 \cong 0{,}48$.

   Solução:

   $h(x) > 100$

   $\left(\frac{4}{3}\right)^x > 100$ aplicando logaritmo nos dois membros da desigualdade

   $\log\left(\frac{4}{3}\right)^x > \log 100$ aplicando a propriedade 3 de logaritmos

   $x \log\left(\frac{4}{3}\right) > \log 10^2$ aplicando as propriedades 2 e 3 de logaritmos

   $x(\log 4 - \log 3) > 2 \log 10$

   $x(0{,}60 - 0{,}48) > 2$

   $x > \frac{2}{0{,}12}$

   $x > 16{,}67$

Logo, serão necessárias 17 etapas para que o comprimento da curva seja maior que 100.

8. Quantos níveis são necessários percorrer para que o número de segmentos seja maior que 2 500 000? Dados: $\log 4 \cong 0,60$ e $\log 5 \cong 0,70$.

   Solução:

   $f(x) > 2500000$

   $4^x > 2500\,000$ aplicando logaritmo nos dois membros da desigualdade

   $log\, 4^x > log\ 2500000$ aplicando a propriedade 3 de logaritmos

   $x \log 4 > \log\,(5^2 \cdot 10^5)$ aplicando a propriedade 1 de logaritmos

   $x \log 4 > \log 5^2 + \log\, 10^5$ aplicando a propriedade 3 de logaritmos

   $x \log 4 > 2\,\log 5 + 5 \log\, 10$

   $0{,}60\,x > 2.0{,}70 + 5$

   $0{,}60\,x > 6{,}4$

   $x > \dfrac{6{,}4}{0{,}60}$

   $x > 10{,}67$

   Logo, serão necessárias 11 etapas para que o número de segmentos seja maior que 2 500 000.

Características da Curva de Koch

O fractal Curva de Koch apresenta algumas das características fractais citadas anteriormente. Seu processo de obtenção é simples com apenas um passo repetido indefinidamente, pequenas partes da curva repetem a forma da curva como um todo e se fizermos uma ampliação de uma região específica do fractal iremos encontrar a mesma riqueza de detalhes deste como um todo. Em Gomes (2007), podemos encontrar outra característica da Curva de Koch: apesar de ser uma curva limitada, possui comprimento infinito.

2.3 TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

No início do século XX, o matemático polonês Waclav Sierpinski (1882-1969) estudou uma figura geométrica que ficou conhecida por Triangulo de Sierpinski, que se obtém como limite de um processo iterativo.

2.3.1 Processo de Remoção de Triângulos

1. Parte-se inicialmente de um triângulo qualquer. Sugere-se inicialmente um triângulo eqüilátero por motivo estético e de simplicidade.
2. Em seguida, determinam-se os pontos médios de cada um dos lados do triângulo.
3. Ligam-se os pontos médios, obtendo desta forma quatro triângulos.
4. Retira-se o triângulo central.
5. Continua-se o processo indefinidamente, a partir do segundo passo, nos triângulos restantes. Obtendo a Figura 4.

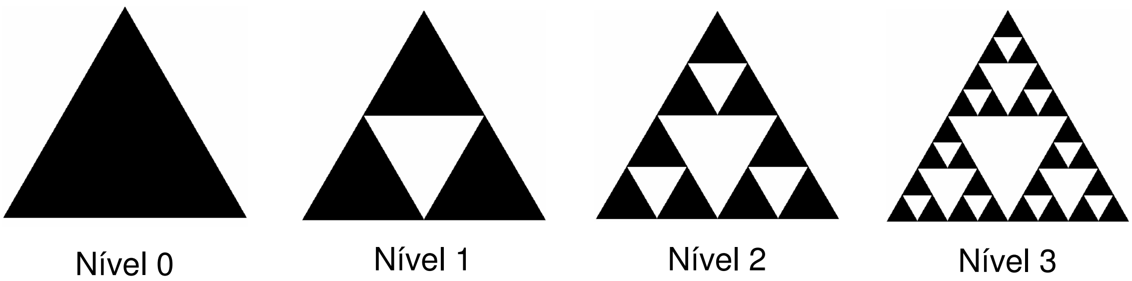


Figura 4 – Primeiros níveis de construção do Triângulo de Sierpinski pelo Processo de Remoção

Uma vez feita a construção, conforme Figura 4, iremos estabelecer as relações existentes no Triângulo de Sierpinski envolvendo a quantidade de triângulos e o comprimento de cada lado do triângulo em cada nível utilizando funções exponenciais e logarítmicas.

Triângulo de Sierpinski e Função Exponencial

Tendo em vista relacionar os conhecimentos da função exponencial com o processo de obtenção do Triângulo de Sierpinski, faremos uma análise passo a passo de sua construção.

No nível 0 a curva apresenta 1 triângulo eqüilátero de lado ℓ.

No nível 1 a curva apresenta 3 triângulos eqüiláteros de lado $\ell.\frac{1}{2}$.

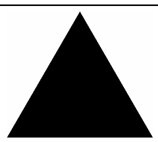
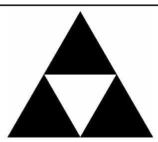
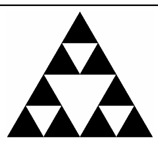
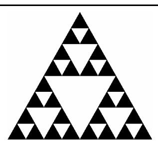
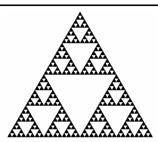
No nível 2 a curva apresenta 9 triângulos eqüiláteros de lado $\ell \cdot \frac{1}{4}$.

No nível 3 a curva apresenta 27 triângulos eqüiláteros de lado $\ell \cdot \frac{1}{8}$.

Generalizando, no nível x a curva apresentará 3^x triângulos eqüiláteros de lado $\ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Na Tabela 2 encontramos algumas informações relativas ao número de triângulos e comprimento de cada lado em cada nível de construção.

Tabela 2 – Construção do Triângulo de Sierpinski

Nível x	N.º de triângulos $f(x)$	Comprimento de cada lado $g(x)$
0 	1	ℓ
1 	3	$\ell \cdot \frac{1}{2}$
2 	$9 = 3^2$	$\ell \cdot \frac{1}{4} = \ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$
3 	$27 = 3^3$	$\ell \cdot \frac{1}{8} = \ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$
...		
x 	3^x	$\ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Fazendo uma análise da coluna número de triângulos, Tabela 2, vemos que a cada nível essa quantidade aumenta, resultando numa função exponencial crescente de base 3. Agora, analisando a coluna comprimento de cada lado percebemos que esse gera uma função exponencial decrescente de base $\frac{1}{2}$.

Triângulo de Sierpinski e Função Logarítmica

Tendo como finalidade abordar o estudo da função logarítmica e a construção do Triângulo de Sierpinski, utilizaremos a relação apresentada na tabela 2: nível e número de triângulos.

Dada a função exponencial $f(x) = 3^x$ que relaciona $f(x)$ número de triângulos e x o nível de construção, temos que:

$f(x) = n$ então $3^x = n$.

Sendo n o número de triângulos para um certo nível, aplicando o conceito de logaritmo é possível obter o nível de construção, dado pela relação abaixo:

$$3^x = n \Rightarrow \log_3 n = x$$

Aplicando a propriedade de mudança de base, temos:

$$x = \frac{\log n}{\log 3} \qquad (2)$$

Logo, obtemos a fórmula (2) que determina o nível de construção dado o número de triângulos.

Analogamente, podemos relacionar nível e comprimento de cada segmento. Dada a função exponencial $g(x) = \ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ que relaciona $g(x)$ comprimento de cada segmento e x o nível de construção, temos que:

$g(x) = m$ então $\ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = m$.

Sendo m o comprimento de cada segmento para um determinado nível, aplicando logaritmo em ambos os membros da igualdade é possível obter o nível de construção, dado pela relação abaixo:

$$m = \ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Aplicando logaritmo em ambos os membros da igualdade

$$\log m = \log \ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Aplicando a propriedade 1 de logaritmos

$$\log m = \log \ell + \log \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Aplicando a propriedade 3 de logaritmos

$$\log m = \log \ell + x \log \frac{1}{2}$$

Aplicando a propriedade 2 de logaritmos

$$\log m - \log \ell = -x \log 2$$

Isolando x, temos:

$$x = \frac{\log \ell - \log m}{\log 2}. \quad (3)$$

Dessa forma, é possível obter a fórmula (3) que determina o nível de construção dado o comprimento de cada segmento.

Situações-problema que podem ser exploradas pelo docente

1. Qual será o número de triângulos no nível 6?

   Solução:

   $f(x) = 3^x$

   $x = 6 \Rightarrow f(6) = 3^6 = 729$

   No nível 6 o número de triângulos será 729.

2. O que acontece com o número de triângulos à medida que x aumenta? Qual propriedade justifica sua resposta?

   Solução:

   À medida que x aumenta, o número de triângulos também aumenta tendendo ao infinito. Isso pode ser justificado pela terceira propriedade de função exponencial, pois o número de triângulos é dado pela função $f(x) = 3^x$ que tem como base $3 > 1$, logo, f cresce indefinidamente.

3. Quantas etapas são necessárias para que o número de triângulos seja maior que 300? Dado: $\log 3 \cong 0,48$.

   Solução:

   $f(x) > 300$

   $3^x > 300$ aplicando logaritmo nos dois membros da desigualdade

   $\log 3^x > \log 300$ aplicando a propriedade 3 de logaritmos

$x\log 3 > \log\left(3.10^2\right)$ aplicando a propriedade 1 de logaritmos

$x\log 3 > \log 3 + \log 10^2$ aplicando a propriedade 3 de logaritmos

$x\log 3 > \log 3 + 2\log 10$

$0{,}48x > 0{,}48 + 2$

$x > \dfrac{2{,}48}{0{,}48}$

$x > 5{,}17$

Logo, serão necessárias 6 etapas para que o número de triângulos seja maior que 300.

4. Sabendo que o lado inicial do triângulo é $\ell = 6$, qual será o comprimento do lado do triângulo no nível 8?

   Solução:

   $g(x) = \ell \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 6 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

   $g(8) = 6 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^8$

   $g(8) = 6 \cdot \dfrac{1}{256}$

   $g(8) \cong 0{,}023$

   No nível 8 o comprimento do lado do triângulo será 0,023.

5. O que acontece com o comprimento do lado do triângulo à medida que x aumenta? Qual propriedade justifica essa afirmação?

   Solução:

   Como a função exponencial é sempre positiva, à medida que x aumenta, o comprimento do lado do triângulo diminui tendendo a zero. Isso pode ser justificado pela terceira propriedade de função exponencial, pois o comprimento do lado do triângulo é dado pela função $g(x) = \ell \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ que tem como base $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, logo, f é decrescente.

6. A partir de que nível o comprimento do lado do triângulo será menor que 3?

   Dados: $\ell = 15$, $\log 2 \cong 0{,}30$ e $\log 5 \cong 0{,}70$.

   Solução:

   $$g(x) = \ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

   $$g(x) < 3$$

   $$15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x < 3$$

   $$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$ aplicando logaritmo nos dois membros da desigualdade

   $$\log\left(\frac{1}{2}\right)^x < \log\frac{1}{5}$$ aplicando a propriedade 3 de logaritmos

   $$x\log\left(\frac{1}{2}\right) < \log\frac{1}{5}$$ aplicando a propriedade 2 de logaritmos

   $$x(\log 1 - \log 2) < \log 1 - \log 5$$

   $$-x\log 2 < -\log 5$$

   $$x\log 2 > \log 5$$

   $$x > \frac{\log 5}{\log 2}$$

   $$x > \frac{0{,}70}{0{,}30}$$

   $$x > 2{,}33$$

   Logo, a partir do nível 3 o comprimento do lado será menor que 3.

Características do Triângulo de Sierpinski

As características fractais citadas anteriormente também são encontradas no Triângulo de Sierpinski. A mais marcante é que pequenas partes da figura repetem a sua forma como um todo. A segunda é a simplicidade no processo de formação e por fim o processo de construção é feito de forma repetitiva. Em Gomes (2007), podem ser encontradas outras características de forma mais detalhada que se referem ao perímetro e à área dos triângulos em cada nível que, respectivamente, tende ao infinito e a zero.

2.3.2 Construção da Curva de Sierpinski

A obtenção da Curva de Sierpinski parte inicialmente de um gerador que é obtido da seguinte forma:

- Parte-se inicialmente de um triângulo eqüilátero ABC. Em seguida, fixa-se um dos lados $\overline{AB}$ como sendo a base e nos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ marcam-se os pontos médios M e N, respectivamente.
- Ligam-se os pontos A e M, determinando o segmento $\overline{AM}$. Da mesma forma obtêm-se os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{NB}$. A união desses três segmentos determinará o gerador da Curva de Sierpinski.

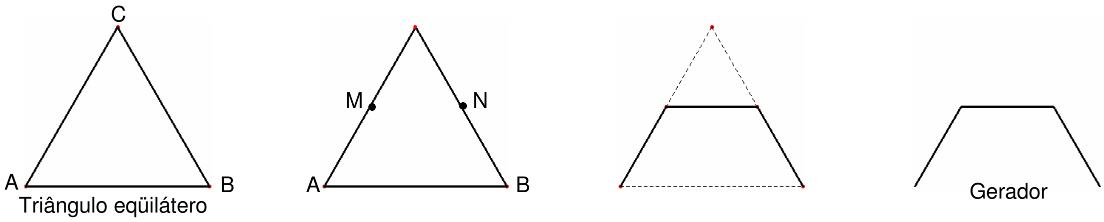


Figura 5 – Gerador da Curva de Sierpinski

Obtido o gerador, vamos construir a Curva de Sierpinski repetindo o seguinte processo, indefinidamente.

- Parte-se do gerador,
- Substitui-se cada segmento do gerador por uma figura do nível anterior com o fator de redução $\frac{1}{2}$ do lado.

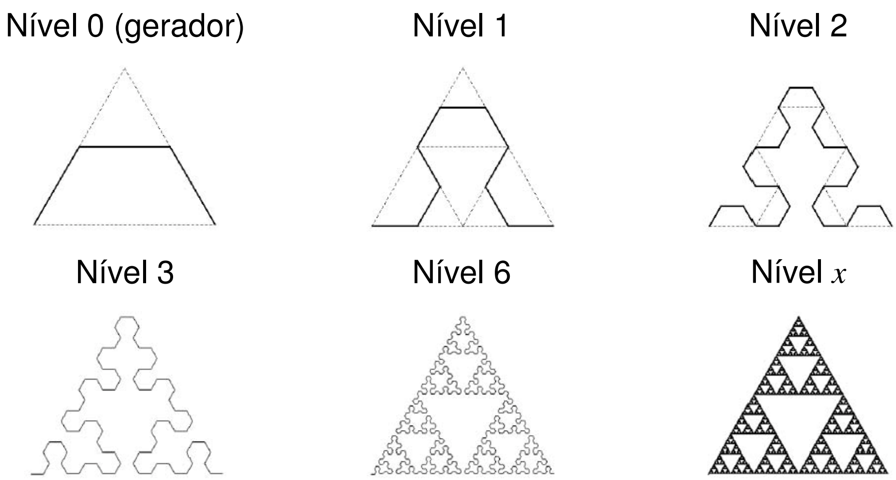


Figura 6 – Diferentes níveis da construção da Curva de Sierpinski

2.4 CONJUNTO DE CANTOR

Uma das primeiras figuras citadas em praticamente todas as bibliografias relacionadas à Geometria Fractal é o Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor, desenvolvida por Georg Cantor (1845-1918). Esse fractal primitivo, que está ligado ao trabalho mais relevante de Cantor – a Teoria dos Conjuntos –, apesar de não ser tão atraente como a maioria dos fractais, possui características matemáticas bastante incomuns.

Construção do Conjunto de Cantor

A figura é construída partindo-se de um segmento de reta com comprimento unitário que é subdividido em três partes iguais. Em seguida, o terço médio do segmento é retirado, repetindo-se o mesmo processo nos dois segmentos restantes, e assim sucessivamente (Figura 7). O Conjunto de Cantor é a “poeira” de pontos que fica após as infinitas iterações onde, mesmo restando infinitos pontos, possui extensão total zero.

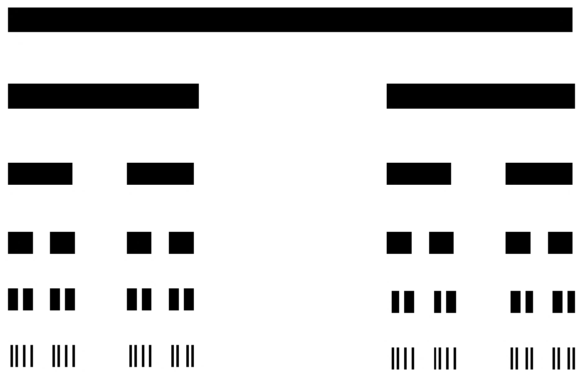


Figura 7 – Construção do Conjunto de Cantor

Conjunto de Cantor e Função Exponencial

É interessante analisarmos o que ocorre com o número de segmentos, o seu comprimento, bem como o comprimento total do conjunto a cada etapa x de sua construção. Entende-se por comprimento total a soma dos comprimentos dos intervalos de um conjunto.

No nível 0 o conjunto apresenta 1 segmento de comprimento 1 e o comprimento total 1.

No nível 1 o conjunto apresenta 2 segmentos de comprimento $\frac{1}{3}$ e o comprimento total $\frac{2}{3}$.

No nível 2 o conjunto apresenta 4 segmentos de comprimento $\frac{1}{9}$ e o comprimento total $\frac{4}{9}$.

No nível 3 o conjunto apresenta 8 segmentos de comprimento $\frac{1}{27}$ e o comprimento total $\frac{8}{27}$.

Generalizando, no nível x o conjunto apresentará 2^x segmentos de comprimento $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ e comprimento total de $\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

Desse conjunto é possível extrair informações, listadas na Tabela 3, relativas ao número de segmentos, comprimento de cada segmento e comprimento total da curva em cada nível de construção.

Tabela 3 – Construção do Conjunto de Cantor

Nível x	N.º de segmentos $f(x)$	Comprimento de cada segmento $g(x)$	Comprimento total do conjunto $h(x)$
0	1	1	1
1	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	4	$\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{4}{9}$
3	8	$\frac{1}{27}=\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\frac{8}{27}$
...			
x	2^x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\left(\frac{2}{3}\right)^x$

Analisando a coluna número de segmentos, Tabela 3, percebemos que a cada nível essa quantidade aumenta, resultando numa função exponencial crescente de base 2. Agora, analisando a coluna comprimento de cada segmento vemos que esse gera uma função exponencial decrescente de base $\frac{1}{3}$, o mesmo acontece com o comprimento total do conjunto que gera uma função exponencial decrescente de base $\frac{2}{3}$.

Conjunto de Cantor e Função Logarítmica

Com a finalidade de relacionar os conhecimentos da função logarítmica e o processo de obtenção do Conjunto de Cantor, utilizaremos a relação apresentada na Tabela 3: nível e número de segmentos.

Dada a função exponencial $f(x) = 2^x$ que relaciona $f(x)$ número de segmentos e x o nível de construção, temos que:

$f(x) = n$ então $2^x = n$.

Sendo n o número de segmentos para um certo nível, aplicando o conceito de logaritmo é possível obter o nível de construção, dado pela relação a seguir:

$2^x = n \Rightarrow \log_2 n = x$

Aplicando a propriedade de mudança de base, temos:

$$x = \frac{\log n}{\log 2} \tag{4}$$

Logo, obtemos a fórmula (4) que determina o nível de construção dado o número de segmentos.

Analogamente, podemos relacionar nível e comprimento de cada segmento. Dada a função exponencial $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ que relaciona $g(x)$ comprimento de cada segmento e x o nível de construção, temos que:

$g(x) = m$ então $\left(\frac{1}{3}\right)^x = m$.

Sendo m o comprimento de cada segmento para um determinado nível, aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade é possível obter o nível de construção, dado pela relação abaixo:

$$m = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Aplicando logaritmo em ambos os membros da igualdade

$$\log m = \log\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$$

Aplicando a propriedade 3 de função logarítmica

$$\log n = x \log \frac{1}{3}$$

Aplicando a propriedade 2 de função logarítmica

$$\log m = -x \log 3$$

Isolando x, temos:

$$x = -\frac{\log m}{\log 3}. \qquad (5)$$

Dessa forma, é possível obter a fórmula (5) que determina o nível de construção dado o comprimento de cada segmento.

Situações-problema que podem ser exploradas pelo docente

1. Determine, usando a fórmula (4), em que nível o número de segmentos é igual a 1024.

   Solução:

   Sabemos que n = 1024 = 2^{10}. Aplicando em (4), temos:

   $$x = \frac{\log n}{\log 2}$$

   $$x = \frac{\log 1024}{\log 2}$$

   $$x = \frac{\log 2^{10}}{\log 2}$$ aplicando a propriedade 3 de logaritmos

   $$x = \frac{10 \cdot \log 2}{\log 2}$$

   x = 10

   No nível 10 o número de segmentos é igual a 1024.

2. Sabendo que o comprimento de cada segmento é $\frac{1}{81}$, usando a fórmula (5) calcule o nível x.

   Solução:

   $$x = -\frac{\log m}{\log 3}$$

$$x = -\frac{\log\left(\frac{1}{81}\right)}{\log 3}$$ aplicando a propriedade 2 de logaritmos

$$x = -\frac{\log 1 - \log 81}{\log 3}$$

$$x = -\frac{-\log 81}{\log 3}$$

$$x = -\frac{-\log 3^4}{\log 3}$$ aplicando a propriedade 3 de logaritmos

$$x = -\frac{-4 \cdot \log 3}{\log 3}$$

$x = 4$

No nível 4 o comprimento de cada segmento é $\frac{1}{81}$.

3. O que acontece com o comprimento de cada segmento à medida que x aumenta? Qual propriedade justifica sua resposta?

   Solução:

   Como a função exponencial é sempre positiva, à medida que x aumenta, o comprimento do segmento diminui tendendo a zero. Isso pode ser justificado pela terceira propriedade de função exponencial, pois o comprimento de cada segmento é dado pela função $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ que tem como base $0 < \frac{1}{3} < 1$, logo, g é decrescente.

4. Qual será o comprimento total do conjunto no nível 5?

   Solução:

$$h(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$x = 5 \Rightarrow h(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

$x \cong 0{,}13$

No nível 5 o comprimento total do conjunto é 0,13.

5. O que acontece com o comprimento total do conjunto à medida que x aumenta? Qual propriedade justifica sua resposta?

   Solução:

   Como a função exponencial é sempre positiva, à medida que x aumenta, o comprimento total do conjunto diminui tendendo a zero. Isso pode ser justificado pela terceira propriedade de função exponencial, pois o comprimento total do conjunto é dado pela função $h(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ que tem como base $0 < \frac{2}{3} < 1$, logo, h é decrescente.

Características do Conjunto de Cantor

O fractal Conjunto de Cantor apresenta algumas das características fractais vistas anteriormente. O conjunto é obtido pela repetição de um processo iterativo. Se observarmos partes do conjunto, facilmente percebemos que esses repetem a forma do conjunto como um todo.

2.5 CURVA DE PEANO

A Curva de Peano foi batizada em homenagem ao matemático Giuseppe Peano (1858-1932) que descreveu a curva em 1890. Até agora, foram analisadas curvas que se caracterizam pela dimensão entre 0 e 2. Esse fato implica que, independentemente do número de iterações realizadas, estas curvas nunca preencheriam todo o plano. Em oposição a isso, a Curva de Peano possui dimensão igual a 2.

De fato, o interesse matemático de Peano ao construir as primeiras curvas dessa família era exatamente esse – curvas contínuas capazes de preencher completamente o plano, ou em outras palavras:

> O século XIX se iniciou com a descoberta de que curvas e funções não precisam ser do tipo bem comportado que até então dominara o campo, e Peano em 1890 mostrou até que ponto a matemática podia insultar o senso comum quando construiu curvas contínuas que enchem o espaço – isto é, curvas dadas por equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, onde f e g são funções reais contínuas no intervalo $0 \leq t \leq 1$, cujos pontos preenchem totalmente o quadrado unitário $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Este paradoxo, é claro, combina perfeitamente com a descoberta de Cantor de que não há mais pontos no quadrado unitário que no segmento de reta unitário.
>
> Boyer (1996)

Construção da Curva de Peano

1. Inicia-se a construção com um segmento de comprimento ℓ;
2. Divide-se o segmento em três partes iguais;
3. Usa-se o terço médio como base de dois quadrados, um no semiplano superior e outro no semiplano inferior;
4. Repete-se o processo infinitamente em cada novo segmento, obtendo dessa forma a Figura 8.

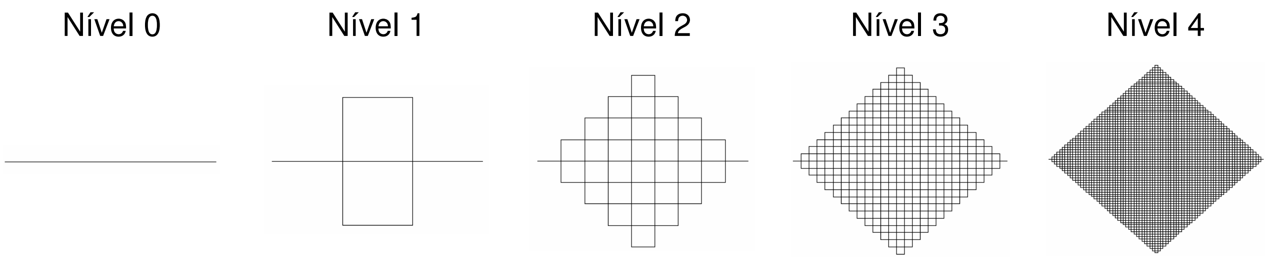
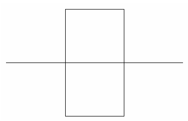
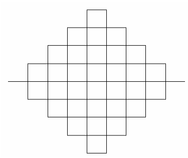
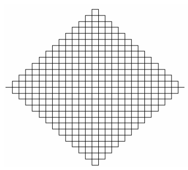
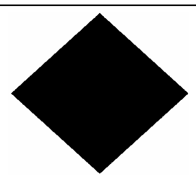


Figura 8 – Níveis da Curva de Peano

Após feita a construção da Curva de Peano, podemos retirar informações relativas ao número de segmentos, comprimento de cada segmento e comprimento total da curva em cada nível de sua construção. Essas informações estão listadas na Tabela 4.

Tabela 4 – Estudo da Curva de Peano

Nível x	N.º de segmentos $f(x)$	Comprimento de cada segmento $g(x)$	Comprimento total da curva $h(x)$
0	1	ℓ	ℓ
1 	9	$\ell \cdot \frac{1}{3}$	$9 \cdot \frac{\ell}{3} = 3\ell$
2 	$81 = 9^2$	$\ell \cdot \frac{1}{9} = \ell \cdot \frac{1}{3^2}$	$81 \cdot \frac{\ell}{9} = \ell \cdot 3^2$
3 	$729 = 9^3$	$\ell \cdot \frac{1}{27} = \ell \cdot \frac{1}{3^3}$	$729 \cdot \frac{\ell}{27} = \ell \cdot 3^3$
...			
x 	9^x	$\ell \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$9^x \cdot \frac{\ell}{3^x} = \ell \cdot 3^x$

Curva de Peano e Função Exponencial

Neste tópico iremos analisar o que ocorre com o número de segmentos, o comprimento de cada segmento, bem como o comprimento total da curva em cada etapa x de sua construção. Entende-se por comprimento total a soma dos comprimentos dos intervalos de um conjunto.

No nível 0 a curva apresenta 1 segmento de comprimento ℓ e o comprimento total ℓ.

No nível 1 a curva apresenta 9 segmentos de comprimento $\ell \cdot \frac{1}{3}$ e o comprimento total 3ℓ.

No nível 2 a curva apresenta 81 segmentos de comprimento $\ell \cdot \frac{1}{9}$ e o comprimento total 9ℓ.

No nível 3 a curva apresenta 729 segmentos de comprimento $\ell \cdot \frac{1}{27}$ e o comprimento total 27ℓ.

Generalizando, no nível x o conjunto apresentará 9^x segmentos de comprimento $\ell \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e comprimento total de $\ell \cdot 3^x$.

Analisando a coluna número de segmentos, Tabela 4, percebemos que a cada nível essa quantidade aumenta, resultando numa função exponencial crescente de base 9. Agora, analisando a coluna comprimento de cada segmento vemos que esse gera uma função exponencial decrescente de base $\frac{1}{3}$. O mesmo não acontece com o comprimento total da curva que gera uma função exponencial crescente de base 3.

Curva de Peano e Função Logarítmica

Com a finalidade de relacionar os conhecimentos da função logarítmica com o processo de obtenção da Curva de Peano, utilizaremos a relação apresentada na Tabela 4: nível e número de segmentos.

Dada a função exponencial $f(x) = 9^x$ que relaciona *f(x)* número de segmentos e x o nível de construção, temos que:

$f(x) = n$ então $9^x = n$.

Sendo n o número de segmentos para certo nível, aplicando o conceito de logaritmo é possível obter o nível de construção, dado pela relação abaixo:

$9^x = n \Rightarrow \log_9 n = x$

Aplicando a propriedade de mudança de base, temos:

$$x = \frac{\log n}{\log 9} \qquad (6)$$

Logo, obtemos a fórmula (6) que determina o nível de construção dado o número de segmentos.

Analogamente, podemos relacionar nível e comprimento de cada segmento. Dada a função exponencial $g(x) = \ell \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ que relaciona $g(x)$ comprimento de cada segmento e x o nível de construção, temos que:

$g(x) = m$ então $\ell \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = m.$

Sendo m o comprimento de cada segmento para um determinado nível, aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade é possível obter o nível de construção, dado pela relação abaixo:

$$m = \ell \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Aplicando logaritmo em ambos os membros da igualdade

$$\log m = \log \ell \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Aplicando a propriedade 1 de função logarítmica

$$\log m = \log \ell + \log \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Aplicando a propriedade 3 de função logarítmica

$$\log m = \log \ell + x \log \left(\frac{1}{3}\right)$$

Aplicando a propriedade 2 de função logarítmica

$$\log m = \log \ell - x \log 3$$

Isolando x, temos:

$$x = \frac{\log \ell - \log m}{\log 3}. \quad (7)$$

Dessa forma, é possível obter a fórmula (7) que determina o nível de construção dado o comprimento de cada segmento.

Situações-problema que podem ser exploradas pelo docente

1. Determine, usando a fórmula (6), em que nível x o número de segmentos é igual a 6561.

   Solução:

   Sabemos que n = 6561 = 9^4. Aplicando em (6), temos:

   $$x = \frac{\log n}{\log 9}$$

   $$x = \frac{\log 6561}{\log 9}$$

   $$x = \frac{log\, 9^4}{log\, 9}$$ aplicando a propriedade 3 de logaritmos

   $$x = \frac{4 \cdot log\, 9}{log\, 9}$$

   $$x = 4$$

   No nível 4 o número de segmentos é igual a 6561.

2. Sabendo que o comprimento inicial do segmento é $\ell = 10$, qual será o comprimento de cada segmento no nível 6?

   Solução:

   $$g(x) = \ell \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

   $$g(6) = 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6$$

   $$g(6) = 10 \cdot \frac{1}{729}$$

   $$g(6) \cong 0{,}014$$

   O comprimento de cada segmento no nível 6 será 0,014.

3. O que acontece com o comprimento de cada segmento à medida que x aumenta? Qual propriedade justifica sua resposta?

   Solução:

   Como a função exponencial é sempre positiva, à medida que x aumenta, o comprimento do segmento diminui tendendo a zero. Isso pode ser justificado pela terceira propriedade de função exponencial, pois o comprimento de cada segmento é dado pela função $g(x) = \ell.\left(\frac{1}{3}\right)^x$ que tem como base $0 < \frac{1}{3} < 1$, logo, g é decrescente.

4. Qual será o comprimento total da curva no nível 4? Considere $\ell = 10$.

   Solução:

   $h(x) = \ell \cdot 3^x$

   $x = 4 \Rightarrow h(x) = 10 \cdot 3^4 = 10 \cdot 81$

   $x = 810$

   O comprimento da total da curva no nível 4 é 810.

5. O que acontece com o comprimento total da curva à medida que x aumenta? Qual propriedade justifica sua resposta?

   Solução:

   À medida que x aumenta, o comprimento total da curva aumenta tendendo ao infinito. Isso pode ser justificado pela terceira propriedade de função exponencial, pois o comprimento total da curva é dado pela função $h(x) = \ell \cdot 3^x$ que tem como base $3 > 1$, logo, h cresce indefinidamente.

Características da Curva de Peano

A Curva de Peano possui algumas das características fractais citadas anteriormente. Ao ampliarmos a curva, não importando o fator de ampliação, não perderemos a quantidade de detalhes que ela possui. Pequenas partes da curva repetem a forma da curva como um todo, ou seja, se fizermos uma ampliação de uma região específica da curva, iremos encontrar uma réplica do fractal como um todo.

2.6 ÁRVORE BIFURCADA

Neste tópico será estudada a construção da Árvore Bifurcada que neste caso possui ângulo de bifurcação de 120° e fator de redução $\frac{1}{2}$, porém nada impede que se usem outros ângulos na sua construção, bem como outro fator de redução.

Construção da Árvore Bifurcada

1. Constrói-se um segmento de reta de $\overline{AB}$ comprimento ℓ, arbitrário.
2. Sobre o segmento $\overline{AB}$ marca-se o ponto O.
3. A partir do ponto O constrói-se um ângulo de 120° no sentido horário, marcando o ponto C.
4. Constrói-se outro ângulo de 120° no sentido anti-horário, marcando o ponto D.
5. Traçam-se dois segmentos com fator de redução $\frac{1}{2}$ do lado, começando no ponto A e passando pelo ponto C, e o outro passando pelo ponto D.
6. Em cada novo segmento repete-se o processo indefinidamente, conforme Figura 9.

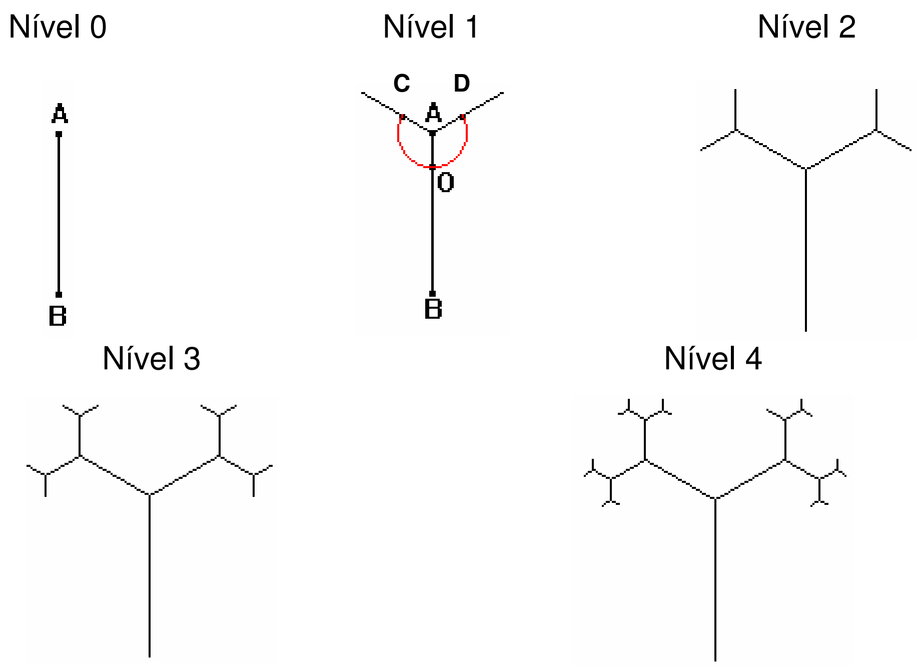


Figura 9 – Primeiros níveis de construção da Árvore Bifurcada

Árvore Bifurcada e Função Exponencial

Neste tópico iremos analisar o que ocorre com o número de novos segmentos e o comprimento de cada novo segmento em cada etapa x de sua construção.

No nível 1 a curva apresenta 2 novos segmentos de comprimento $\frac{\ell}{2}$.

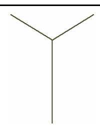
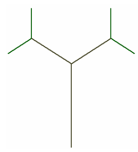
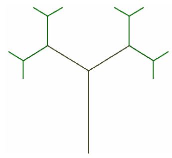
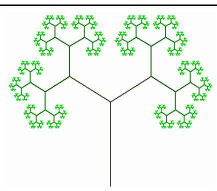
No nível 2 a curva apresenta 4 novos segmentos de comprimento $\frac{\ell}{4}$.

No nível 3 a curva apresenta 8 novos segmentos de comprimento $\frac{\ell}{8}$.

Generalizando, no nível x o conjunto apresentará 2^x segmentos de comprimento $\ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Na Tabela 5, estão presentes algumas informações relativas ao número de segmentos, comprimento de cada segmento e comprimento total da Árvore Bifurcada em cada nível de construção.

Tabela 5 – Estudo da Árvore Bifurcada

Nível x	N.º de novos segmentos $f(x)$	Comprimento de cada novo segmento $g(x)$
0	---	ℓ
1 	2	$\ell \cdot \frac{1}{2}$
2 	2^2	$\ell \cdot \frac{1}{4} = \ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$
3 	2^3	$\ell \cdot \frac{1}{8} = \ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$
...		
x 	2^x	$\ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Analisando a coluna número de novos segmentos, Tabela 5, percebemos que a cada nível essa quantidade aumenta, resultando numa função exponencial crescente de base 2. Agora, analisando a coluna comprimento de cada novo segmento vemos que esse gera uma função exponencial decrescente de base $\frac{1}{2}$.

Árvore Bifurcada e Função Logarítmica

Com a finalidade de relacionar os conhecimentos da função logarítmica e o método de construção da Árvore Bifurcada, apresentaremos a relação existente entre nível e número de novos segmentos (Tabela 5).

Dada a função exponencial $f(x) = 2^x$ que relaciona $f(x)$ número de novos segmentos e x o nível de construção, temos que:

$f(x) = n$ então $2^x = n$.

Sendo n o número de novos segmentos para certo nível, aplicando o conceito de logaritmo é possível obter o nível de construção, dado pela relação abaixo:

$$2^x = n \Rightarrow \log_2 n = x$$

Aplicando a propriedade de mudança de base, temos:

$$x = \frac{\log n}{\log 2} \qquad (8)$$

Logo, obtemos a fórmula (8) que determina o nível de construção dado o número de novos segmentos.

Analogamente, podemos relacionar nível e comprimento de cada novo segmento. Dada a função exponencial $g(x) = \ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ que relaciona $g(x)$ comprimento de cada segmento e x o nível de construção, temos que:

$g(x) = m$ então $\ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = m$.

Sendo m o comprimento de cada novo segmento para um determinado nível, aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade é possível obter o nível de construção, dado pela relação abaixo:

$$m = \ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$\log m = \log\left[\ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x}\right]$ aplicando a propriedade 1 de função logarítmica

$log\, m = log\, \ell + log\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ aplicando a propriedade 3 de função logarítmica

$log\, m = log\, \ell + x\, log\left(\frac{1}{2}\right)$ aplicando a propriedade 2 de função logarítmica

$\log m = \log \ell - x\log 2$

Isolando x, temos:

$$x = \frac{\log \ell - \log m}{\log 2}. \tag{9}$$

Dessa forma é possível obter a fórmula (9) que determina o nível de construção dado o comprimento de cada novo segmento.

Situações-problema que podem ser exploradas pelo docente

1. Determine, usando a fórmula (8), em que nível x o número de novos segmentos é igual a 128.

   Solução:

   Sabemos que n = 128 = 2^7. Aplicando em (8), temos:

   $x = \frac{\log n}{\log 2}$

   $x = \frac{\log 128}{\log 2}$

   $x = \frac{\log 2^7}{\log 2}$ aplicando a propriedade 3 de logaritmos

   $x = \frac{7 \cdot \log 2}{\log 2}$

   $x = 7$

   No nível 7 o número de novos segmentos é igual a 128.

2. Sabendo que o comprimento inicial do segmento é $\ell = 24$, qual será o comprimento de cada novo segmento no nível 7?

   Solução:

$$g(x) = \ell \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$g(7) = 24 \cdot \frac{1}{128}$$

$$g(7) \cong 0{,}19$$

O comprimento de cada novo segmento no nível 7 será 0,19.

3. O que acontece com o número de novos segmentos à medida que x aumenta? Qual propriedade justifica sua resposta?

   Solução:

   À medida que x aumenta, o número de novos segmentos aumenta tendendo ao infinito. Isso pode ser justificado pela terceira propriedade de função exponencial, pois o número de novos segmentos é dado pela função $f(x) = 2^x$ que tem como base 2 > 1, logo, f cresce indefinidamente.

4. O que acontece com o comprimento de cada novo segmento à medida que x aumenta? Qual propriedade justifica sua resposta?

   Solução:

   Como a função exponencial é sempre positiva, à medida que x aumenta, o comprimento do segmento diminui tendendo a zero. Isso pode ser justificado pela terceira propriedade de função exponencial, pois o comprimento de cada segmento é dado pela função $g(x) = \ell.\left(\frac{1}{2}\right)^x$ que tem como base $0 < \frac{1}{2} < 1$, logo, g é decrescente.

Características da Árvore Bifurcada

As características fractais citadas anteriormente também são encontradas na Árvore Bifurcada. Se observarmos um pequeno ramo da árvore, nele encontraremos a mesma riqueza de detalhes da curva inteira. Seu processo de construção é simples e direto. Outras características que se referem ao número total de segmento e ao comprimento total da curva envolvendo o estudo de Progressão Aritmética e Geométrica podem ser encontrados em Pallesi (2007).

3 DIMENSÃO

Antes de definir o que é dimensão fractal, é necessário retomar o conceito de dimensão euclidiana. Figuras geométricas convencionais têm dimensão bem determinada por Euclides: um ponto tem dimensão 0, uma linha tem dimensão 1, uma superfície dimensão 2, enquanto o espaço tem dimensão 3 (Figura 10).

Segundo Serra e Karas (1997), uma característica importante dessas dimensões é que elas não dependem nem da forma nem do tamanho da figura: uma linha é unidimensional, seja ela reta ou curva; uma superfície é bidimensional, seja ela plana, esférica ou de qualquer outra forma, e qualquer que seja a sua extensão. A dimensão de uma figura assim caracterizada é a *dimensão topológica*, que se exprime sempre como um número inteiro.

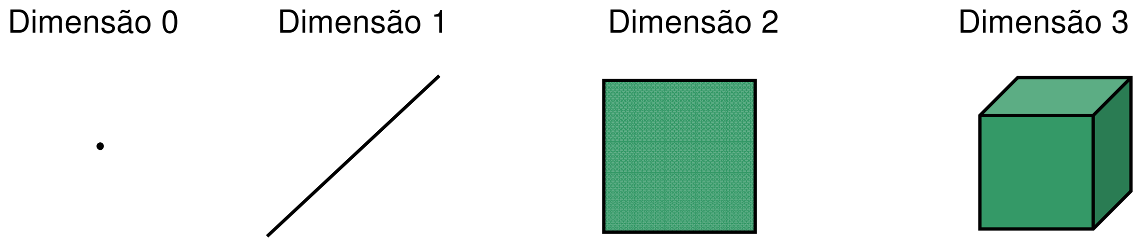


Figura 10 – Dimensão Topológica

Os fractais também possuem dimensão topológica. A Curva de Koch, por exemplo, tem a dimensão topológica de uma curva qualquer, ou seja, dimensão 1. Outros fractais possuem dimensão topológica 2 ou até maior.

Porém, há também o conceito de dimensão espacial que é muito importante considerar, e que se relaciona com o espaço que a figura ocupa. Dimensão maior que 1 e menor que 2 é uma dimensão fracionária. As dimensões fracionárias são usualmente denominadas *dimensões fractais*. A dimensão fractal é estritamente maior que a dimensão topológica.

O conceito de dimensão fractal surge a partir de uma relação que expressa a nossa noção intuitiva de dimensão euclidiana. A seguir, figuras conhecidas serão reduzidas segundo um fator de redução de semelhança r, e em seguida serão contadas quantas das novas figuras n são necessárias para reconstruir a figura original.

Observe que, se temos um segmento de reta e queremos dividi-lo em partes iguais, semelhantes ao segmento original, porém reduzidas a um fator r (Figura 11). O número n de segmentos obtidos relaciona-se com a razão de semelhança r da seguinte forma:

$$n = \frac{1}{r}$$

D = 1

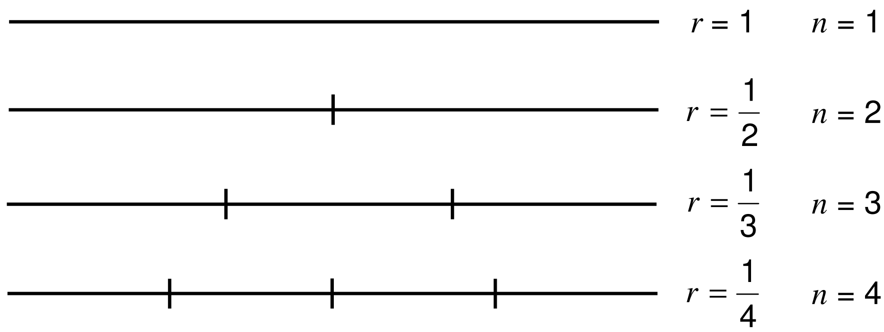


Figura 11 – Segmento de reta dividido

Note que em um quadrado ao dividir seus lados em partes iguais, semelhantes aos lados do quadrado original, porém reduzidas a um fator r (Figura 12); temos que o número n de quadrados obtidos relaciona-se ao fator de redução r da seguinte forma:

$$n = \frac{1}{r^2}$$

D = 2

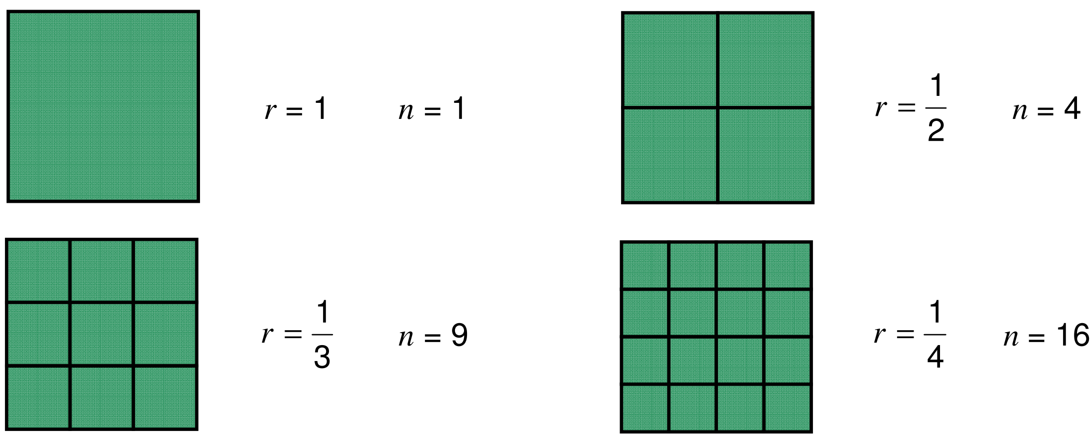


Figura 12 – Quadrado dividido

Analogamente, em um cubo ao dividir suas arestas em partes iguais, semelhantes às arestas do cubo original, porém reduzidas a um fator r (Figura 13); temos que o número n de cubos obtidos relaciona-se ao fator de redução r da seguinte forma:

$$n = \frac{1}{r^3}$$

D = 3

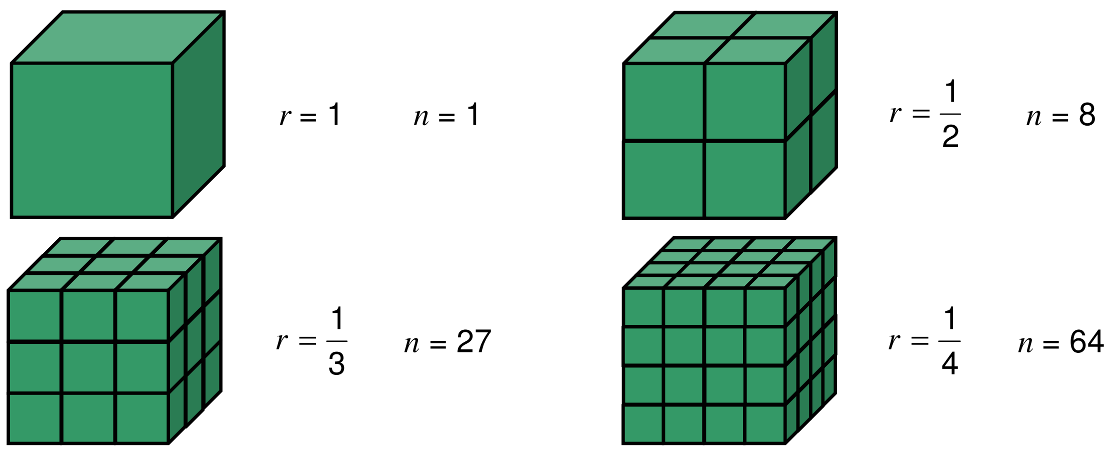


Figura 13 – Cubo dividido

Perceba que a relação entre n e r é exponencial, e essa é dada pela dimensão das figuras, da seguinte forma:

$n = \frac{1}{r^d}$, onde d é a dimensão topológica da figura.

Considerando que a dimensão espacial das figuras geométricas convencionais é igual à dimensão topológica, podemos afirmar que:

$$n = \frac{1}{r^d} \tag{10}$$

onde d é a dimensão espacial da figura, r é o fator de redução de semelhança e n o número de figuras semelhantes à original.

Como queremos determinar a dimensão d, basta aplicar logaritmo em ambos os membros da igualdade (10)

$$\log n = \log \frac{1}{r^d}$$

Aplicando as propriedades de logaritmo para isolar d, obtemos:

$$log\, n = log\ 1 - log\, r^d$$
$$log\, n = 0 - d\, log\, r$$
$$d\, log\, r = -\, log\, n$$
$$d = -\frac{\log n}{\log r}. \qquad (11)$$

O método usado para se obter a fórmula de dimensão é denominado de auto-similaridade, que consiste em obter réplicas menores da figura através de sua divisão. Quando as réplicas são sempre idênticas e obtidas através do mesmo fator de redução, diz-se que a figura possui auto-similaridade estrita.

Quando um fractal apresenta auto-similaridade estrita, sua dimensão pode ser determinada por um método simples que se delineia na passagem de um dado nível na construção do fractal para o nível imediatamente seguinte, bastando anotar-se: o número n de subpartes similares que se tomam no lugar de uma dada parte do fractal; e o fator de redução r da parte considerada para cada subparte que entra em seu lugar. A dimensão espacial é calculada, então, pela fórmula (11).

As figuras geométricas convencionais têm dimensão espacial igual à dimensão topológica, expressa por um número inteiro. Isso não acontece no caso dos fractais, que possuem uma dimensão espacial estritamente maior que sua dimensão topológica.

3.1 ALGUMAS DIMENSÕES FRACTAIS

Conhecida a fórmula $d = -\frac{\log n}{\log r}$ que determina a dimensão de um fractal, onde r é o fator de redução de semelhança e n o número de novas figuras necessárias para reconstruir a figura original, podemos explorar esse tópico nos fractais estudados no Capítulo 2.

3.1.1 Curva de Koch

Na construção da Curva de Koch (Figura 3), o segmento inicial foi substituído por 4 segmentos no nível 1, o que nos dá $n = 4$; cada um desse segmentos mede $\frac{1}{3}$ do comprimento do segmento inicial, portanto o fator de redução $r = \frac{1}{3}$. Temos, assim, que sua dimensão é dada da seguinte forma:

$$d = -\frac{\log n}{\log r}$$

$$d = -\frac{\log 4}{\log\left(\frac{1}{3}\right)}$$ aplicando a propriedade 2 de logaritmos

$$d = -\frac{\log 4}{\log 1 - \log 3}$$ conseqüência 1 da definição

$$d = -\frac{\log 4}{0 - \log 3}$$

$$d = \frac{log\, 4}{log\, 3}$$

$$d \cong 1{,}26$$

Segundo Serra e Karas (1997), a curva de Koch tem a dimensão topológica de uma curva qualquer, ou seja, dimensão 1. Mas, devido ao detalhamento que apresenta em escalas arbitrariamente pequenas, ocupa mais espaço que uma curva convencional, não dotada de estrutura fina, tendo, portanto, uma dimensão maior que a unidade, mas não chega a ocupar tanto espaço quanto a faixa do plano que a contém, possuindo, conseqüentemente, uma dimensão menor que 2.

3.1.2 Triângulo de Sierpinski

Em qualquer um dos passos da construção do Triângulo de Sierpinski, o coeficiente de redução é $r = \frac{1}{2}$ (do comprimento do segmento do passo anterior) sendo o número de triângulos obtidos o triplo do obtido no passo anterior, isto é, n =3. A dimensão do Triângulo de Sierpinski será então:

$$d = -\frac{\log n}{\log r}$$

$$d = -\frac{\log 3}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$ aplicando a propriedade 2 de logaritmos

$$d = -\frac{\log 3}{\log 1 - \log 2}$$ conseqüência 1 da definição

$$d = -\frac{log\, 3}{0 - log\, 2}$$

$$d = \frac{log\, 3}{log\, 2}$$

$$d \cong 1{,}58$$

No Capítulo 2 vimos duas maneiras de construir o Triângulo de Sierpinski, uma trata da remoção de triângulos e a outra da construção da curva. Dessa forma temos que o Triângulo de Sierpinski é uma curva, portanto tem dimensão topológica 1, estritamente menor que sua dimensão espacial, o que o caracteriza como um fractal. Portanto, o Triângulo de Sierpinski ocupa mais espaço que uma curva e menos espaço que uma figura bidimensional convencional.

3.1.3 Conjunto de Cantor

Ao construir o Conjunto de Cantor (Figura 7), a cada nível, são obtidos dois novos segmentos com um terço do segmento anterior. Temos então n = 2 e $r = \frac{1}{3}$. Portanto, a dimensão fractal do Conjunto de Cantor é dada por:

$$d = -\frac{\log n}{\log r}$$

$$d = -\frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{3}\right)}$$ aplicando a propriedade 2 de logaritmos

$$d = -\frac{\log 2}{\log 1 - \log 3}$$ conseqüência 1 da definição

$$d = -\frac{\log 2}{0 - \log 3}$$

$$d = \frac{log\,2}{log\,3}$$

$$d \cong 0{,}63$$

O Conjunto de Cantor é a poeira de pontos que fica após as infinitas iterações onde, mesmo restando infinitos pontos, possui extensão total zero.

3.1.4 Curva de Peano

Em cada nível da construção (Figura 8) um segmento dá origem a 9 segmentos (n = 9), tendo um terço do comprimento do segmento inicial $\left(r = \frac{1}{3}\right)$. Portanto, a dimensão da Curva de Peano é:

$$d = -\frac{\log n}{\log r}$$

$$d = -\frac{\log 9}{\log\left(\frac{1}{3}\right)}$$ aplicando a propriedade 2 de logaritmos

$$d = -\frac{\log 9}{\log 1 - \log 3}$$ conseqüência 1 da definição

$$d = -\frac{\log 9}{0 - \log 3}$$

$$d = \frac{log\,9}{log\,3}$$

$$d = 2$$

Como vimos no capítulo 2, a Curva de Peano é uma curva, logo tem dimensão topológica 1. Porém, sua dimensão espacial é igual a 2, o que significa que a curva preenche a área do plano na qual é traçada.

3.2 MÉTODO DE CONTAGEM DE CAIXA

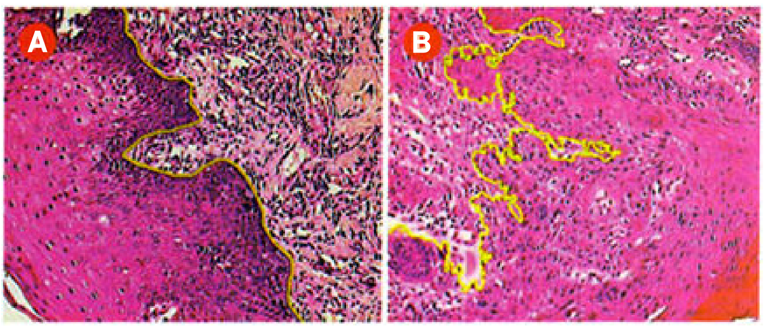
Segundo Serra e Karas (1997), um método mais geral para se determinar a dimensão espacial, não sujeito ao requisito da existência de auto-similaridade, e aplicável a qualquer espécie de figura, é o da *contagem de caixas,* que, no caso de uma figura plana, reduz-se a uma contagem de quadrículos.

O método consiste em cobrir a figura com uma malha quadriculada de lado δ (Figura 15) e contar quantos n quadrados contêm pelo menos um ponto da figura. Se a malha for muito larga (com δ grande), a cobertura será pouco precisa, mas a precisão aumentará se estreitarmos a malha, diminuindo o lado δ dos quadrados, fazendo-o tender para zero. No limite,

$$d = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log n}{-\log \delta}$$

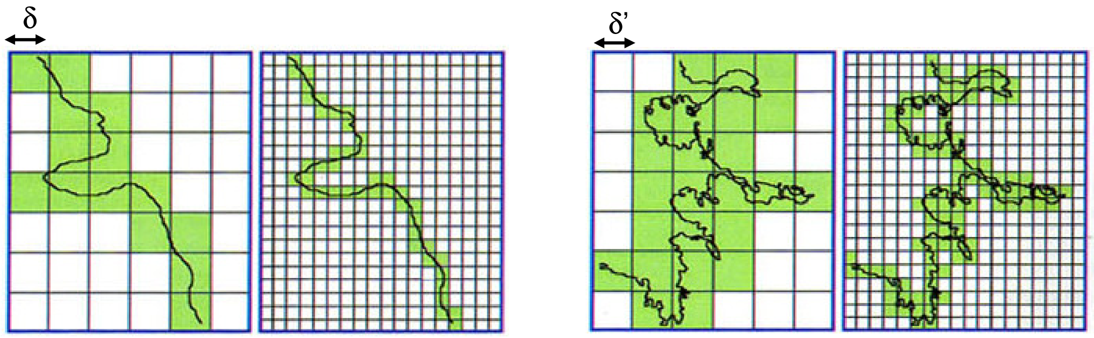
Para maiores detalhes, ver Murr (2007).

Uma das aplicações desse método é usada para realizar prognósticos mais confiáveis de neoplasias da mucosa oral. Atualmente os especialistas observam imagens tumorais de diversos pacientes e os graduam de acordo com as classificações disponíveis, as quais têm fundamentação essencialmente estatística (Figura 14). Com o auxílio da Geometria Fractal é possível medir a 'tortuosidade' da borda tumoral. O princípio é simples: quanto mais agressivo o câncer, mais infiltrativo será seu crescimento. Logo, a linha de 'fronteira' entre os tecidos ocupa o espaço mais densamente, pois, sendo mais rugosa, apresenta maior dimensão. (Figura 15)



FONTE: Ciência Hoje, vol. 39, n.º 232

Figura 14 – Prognóstico de neoplasias da mucosa oral



δ e $n = 14$ $\quad \frac{\delta}{3}$ e $n = 43$ $\quad \delta'$ e $n' = 24$ $\quad \frac{\delta'}{3}$ e $n' = 100$

FONTE: Ciência Hoje, vol. 39, n.º 232

Figura 15 – Representação do método da contagem de caixas

Na Figura 14, temos lâminas da mucosa da boca, identifica-se o epitélio (tecido superficial da mucosa, mais corado, compacto e sem vasos) e o estroma (tecido situado sob o epitélio, menos corado, mais frouxo e com vasos). A linha traçada entre um e outro (A) representa a interface (fronteira) entre eles. O tecido canceroso (B), cujo crescimento é infiltrativo, apresenta maior sinuosidade nessa fronteira. Quando o tamanho do lado das caixas é reduzido a um terço, a quantidade de caixas ‘ocupadas’ praticamente triplica no epitélio normal, o que significa que sua dimensão é muito próxima de 1. No câncer em que a ‘fronteira’ é mais tortuosa, o número de caixas aumenta além do triplo, ou seja, a dimensão fractal é maior.

O método descrito é adequado para uso no computador, empregando-se elementos finitos no lugar de quadrículos infinitamente pequenos, desde que se tome δ com um valor suficientemente pequeno e que se possa detectar a condição de o quadrículo conter ou não uma parte do fractal.

4 CONCLUSÃO

Iniciamos esse trabalho com o objetivo de utilizar a Geometria Fractal como motivador para o ensino das funções exponenciais e logarítmicas, visando à criação de situações didáticas. Assim, partimos da hipótese de que a utilização da Geometria Fractal poderia criar um terreno potencialmente fértil para a exploração didática de funções a serem ensinadas, tendo a resolução de problemas como procedimento metodológico de ensino.

Ao longo dos capítulos foram fornecidos subsídios para que esse objetivo fosse alcançado. Começamos pelas definições de funções exponenciais e logarítmicas e justificativas para seu estudo. Seguimos, apresentando a Geometria Fractal e suas características. Posteriormente, fizemos um estudo minucioso de alguns tipos de fractais e sugerimos problemas a serem trabalhados em sala de aula no Ensino Médio, em particular para funções exponenciais e logarítmicas. Terminamos mostrando o conceito de dimensão fractal e algumas aplicações.

Desta forma, mostramos como a Geometria Fractal permite ao docente trabalhar com vários conceitos de função exponencial e logarítmica. Sugerimos também que o professor faça uso deste e outros trabalhos, desenvolvidos em conjunto por Bianco (2007), Gomes (2007) e Pallesi (2007), para aprimorar sua prática docente.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BIANCO, K. F. **Fractais Geométricos: características, construção e implementação**. Curitiba, a ser apresentada em 20 out. 2007. Monografia de Especialização para professores de Matemática, UFPR.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN$_+$: Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 2002.

GOMES, A. S. **Motivação do estudo de áreas e perímetros de figuras geométricas através de fractais**. Curitiba, a ser apresentada em 20 out. 2007. Monografia de Especialização para professores de Matemática, UFPR.

IEZZI, G. et al. **Fundamentos da Matemática Elementar, 2.** São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio, volume 1.** Coleção do Professor. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

LIMA, E. L. **Logaritmo.** Coleção do Professor. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MURR, et al. **Fractais: propriedades e construção**. Curitiba: Prodocência UFPR, 2007.

ONUCHIC, L.R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO (Org.), M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.** São Paulo: UNESP, 1999. p.199-218.

PALLESI, D. **Motivação do estudo de progressões aritméticas e geométricas através da geometria fractal**. Curitiba, a ser apresentada em 20 out. 2007. Monografia de Especialização para professores de Matemática, UFPR.

SALLUM, E. M. Fractais no ensino médio. **Revista do Professor de Matemática, SBM**, São Paulo, n.º 57, p. 1-8, maio/ago. 2005.

SERRA, C. P. e KARAS, E. W. **Fractais Gerados por Sistemas Dinâmicos Complexos**. Curitiba: Champagnat, 1997.

DINIZ, G. A matemática do câncer. **Ciência Hoje**, Curitiba, v. 39, n.º 232, p. 48-49, nov. 2006.