Aula 1- 09/02 - O conceito de limite

quarta-feira, 9 de fevereiro de 2022 07:11

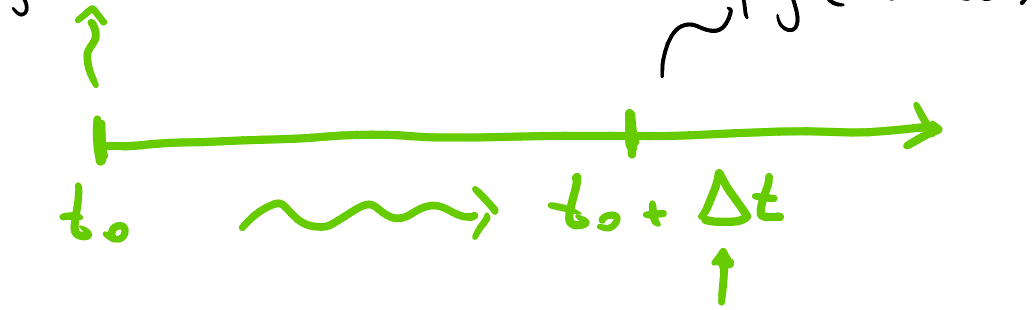
$$\Delta Q = f(t_0+\Delta t) - f(t_0)$$

- A variação em Q do instante de tempo t_0 ao instante $t_0 + \Delta t$ é o valor

$$\Delta Q = f(t_0+\Delta t) - f(t_0).$$

- A taxa média da variação de Q (por unidade de tempo) neste intervalo de tempo é

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t_0+\Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$



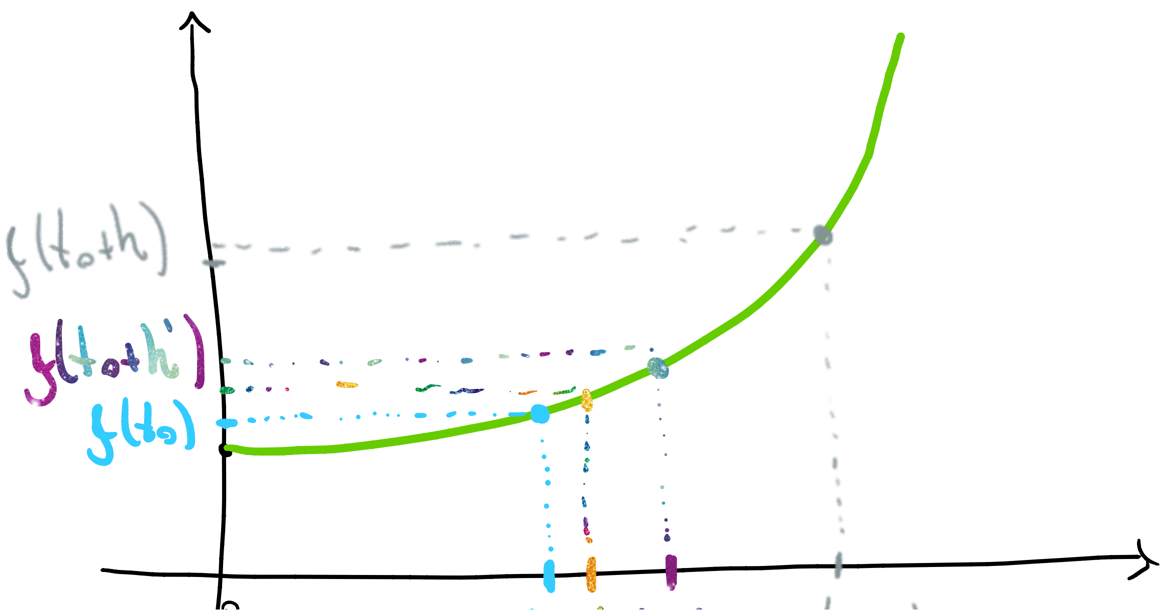
$Q \rightsquigarrow$ variação da posição de um móvel

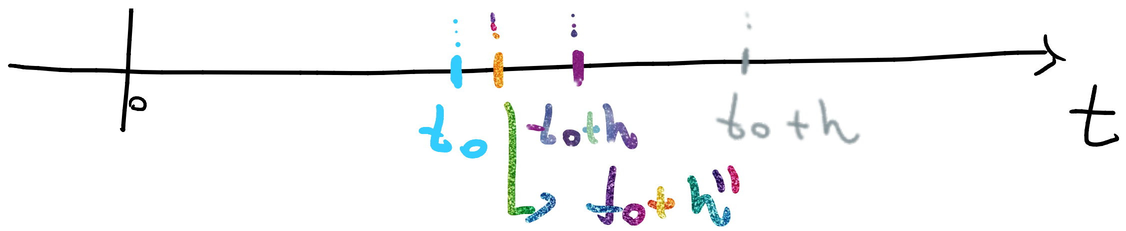
$\downarrow$

com respeito ao tempo t

$$t \longmapsto \underbrace{f(t)}$$

$\hookrightarrow$ Posição no instante t





Velocidade média: $f(t_0) \rightsquigarrow f(t_0+h'')$

$$\frac{f(t_0+h'')-f(t_0)}{h''}$$

$\rightsquigarrow$ h próximo de zero

$\Downarrow$

Mais próximo

estaremos da velocidade em t_0

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}\right)$$

!!!

- Suponha que uma partícula se movimenta ao longo de uma reta horizontal e que sua posição (em metros) num instante t (em segundos) seja descrita por uma função, digamos

$$t \mapsto s(t) = 5t^2 + 100.$$

⋆ Como obter a velocidade média durante um certo intervalo de tempo?

⋆ Como obter a velocidade instantânea num instante t_0?

$$\frac{s(t_0+h) - s(t_0)}{h}$$

⇝ o que acontece quando h se aproxima do 0!

- Suponha que uma partícula se movimenta ao longo de uma reta horizontal e que sua posição (em metros) num instante t (em segundos) seja descrita por uma função, digamos

$$t \mapsto s(t) = 5t^2 + 100.$$

⋆ Como obter a velocidade média durante um certo intervalo de tempo?

⋆ Como obter a velocidade instantânea num instante t_0?

$$\boxed{t_0 = 10}$$

$$\frac{s(10+h) - s(10)}{h} = \frac{5(10+h)^2 + 100 - [5(10)^2 + 100]}{h}$$

$$= \frac{5(10^2 + 20h + h^2) + 100 - 5 \cdot 10^2 - 100}{h}$$

$$= \frac{\cancel{5 \cdot 10^2} + 100h + 5h^2 + \cancel{100} - \cancel{5 \cdot 10^2} - \cancel{100}}{h}$$

$$= \frac{100h + 5h^2}{h}$$

$$= h(100 + 5h)$$

$$\overline{}$$
$$h$$

$$= 100 + 5h$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{s(10+h) - s(10)}{h}} = 100 + 5h$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(10+h) - s(10)}{h} = 100$$

$\rightsquigarrow$ Velocidade em $t = 10$ s

é 100 m/s

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c.$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{s(t_0+h) - s(t_0)}{h} \right) = ?$$

$h \to 0 \quad h$

$$|t| = \begin{cases} t, & \text{se } t \geq 0, \\ -t, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

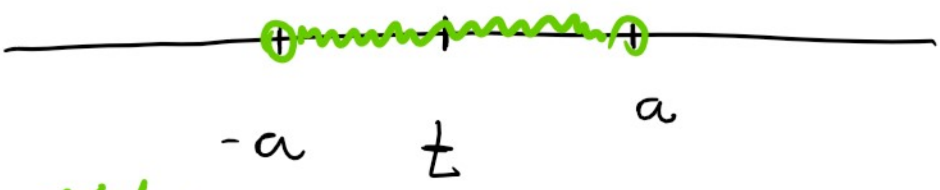
$|7| = 7$

$|-5| = -(-5) = 5$

↳ $t \leq 0$

$|t| < a$ se, e somente se, $-a < t < a$.

$|t| < a$



$|t| < a \iff -a < t < a$

Considere $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. Note que vale a igualdade

$$\underbrace{\{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < \delta\}}_{A} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

→ $t = x - x_0$

↳ $|x - x_0| < \delta$

$\iff$

$-\delta < x - x_0 < \delta$

$$\Rightarrow \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

$$x \in A \Rightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

UM EXEMPLO BEM INTERESSANTE

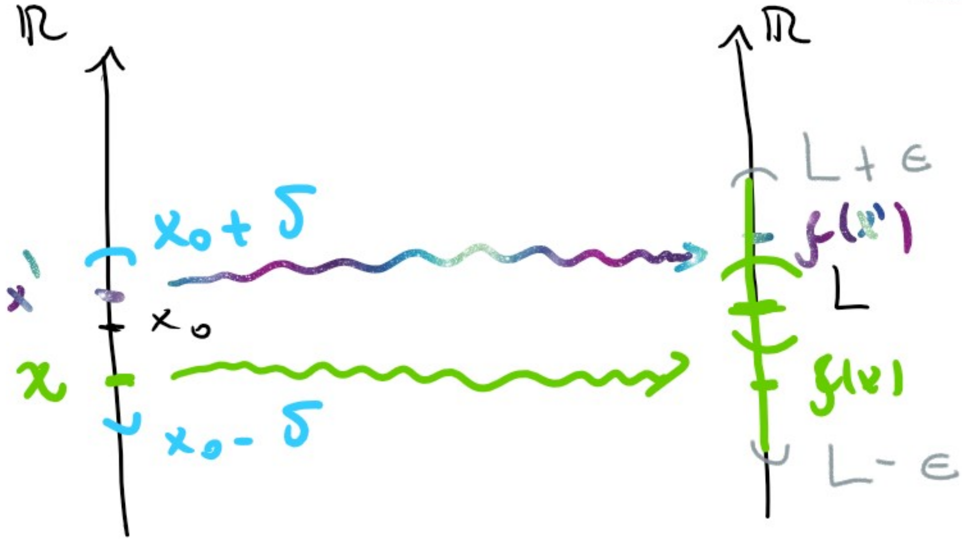
- Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0, L \in \mathbb{R}$ dois números reais. Suponha que tal função satisfaça a seguinte propriedade:

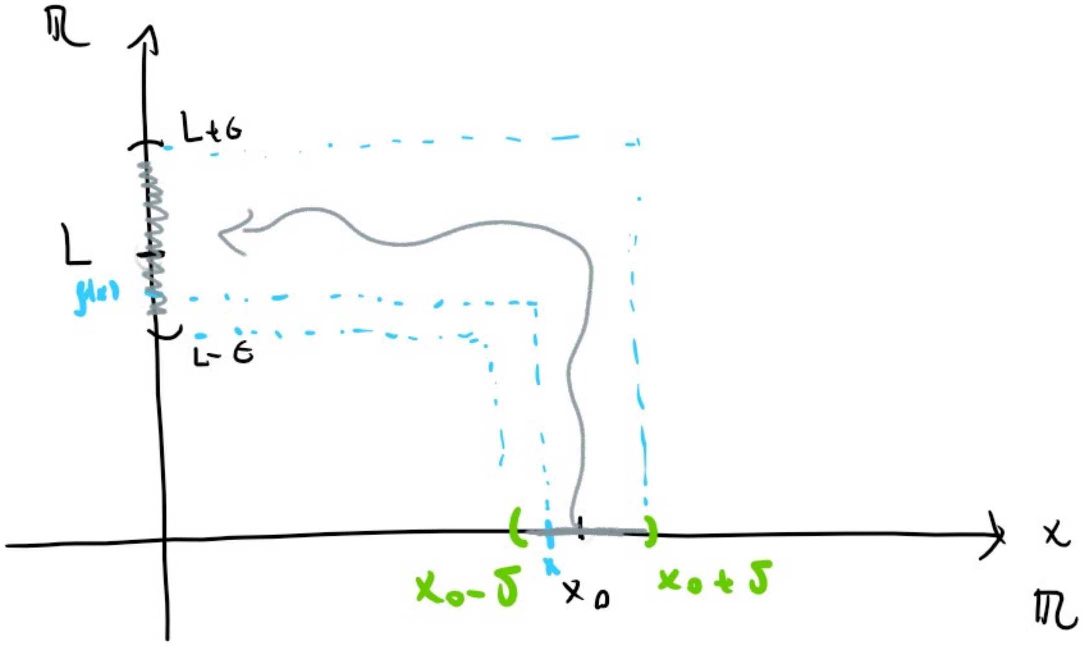
(I) dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ tq

$$\text{(II)} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Longrightarrow \boxed{f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)}$$





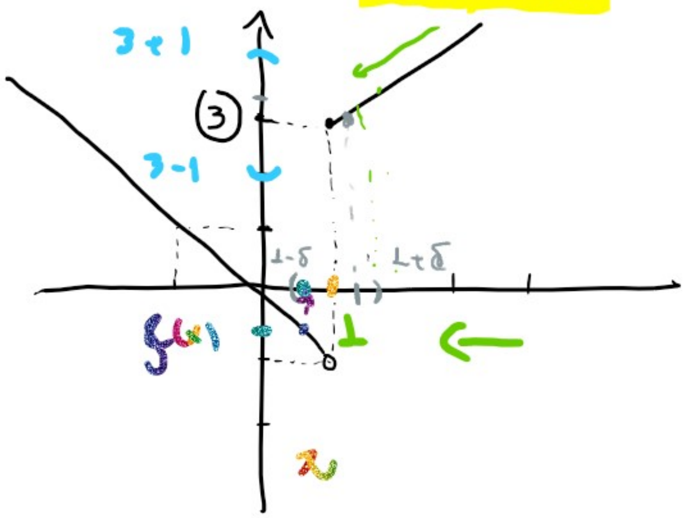
Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x \geq 1, \\ -x, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \overset{?}{=} -1$$

$\epsilon = 1$

Neste caso, não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$.



Se $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

$\rightsquigarrow \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ ;$

$x \in (1-\delta, 1+\delta) \Rightarrow |f(x)| \in (3-\epsilon, 3+\epsilon)$