UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LISTA DE EXERCÍCIOS DE CÁLCULO 1 (ELABORADA PELA PROFA. TANISE CARNIERI PIERIN)

**Lista 0: Propriedades de funções reais**

1. Considere a função $f : A \to B$. Sabendo que $a \in A$ e $b \in B$, decida quais afirmações abaixo são verdadeiras.

$(a)$ $f(a) = b$
$(b)$ $b \in \text{Im}\, f$
$(c)$ $\text{Im}\, f \subset B$
$(d)$ $f(a) \in \text{Im}\, f$
$(e)$ $f(a) \in B$

2. Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z}; -1 \leq x \leq 3\}$ e a função $f : A \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x + 1$.

$(a)$ Calcule $f(-1)$, $f(0)$ e $f(5)$.
$(b)$ Determine $\text{Im}\, f$.
$(c)$ Encontre $x \in A$ tal que $f(x) = 3$.
$(d)$ Esboce o gráfico de $f$.

3. Determine o domínio de cada uma das funções abaixo.

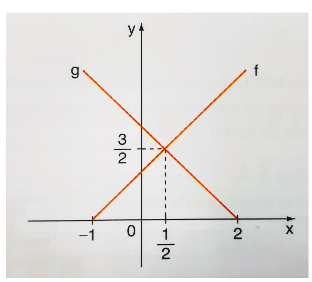
$(a)$ $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x-4}$
$(b)$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$
$(c)$ $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2+1}$
$(d)$ $f(x) = \sqrt{x-1}$
$(e)$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$
$(f)$ $f(x) = \sqrt{x-2}+\sqrt{5-x}$
$(g)$ $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + \sqrt{x-1}$
$(h)$ $f(x) = \sqrt{x^2}$
$(i)$ $f(x) = \sqrt[3]{x}$
$(j)$ $f(x) = \sqrt{x-x^3}$
$(k)$ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$
$(l)$ $f(x) = \sqrt[4]{4-x^2}$
$(m)$ $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$

4. Se $f : \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{2}{1-\sqrt{x}}$, determine:

$(a)$ $f(0)$
$(b)$ $f(9)$
$(c)$ $f(4x)$
$(d)$ o elemento cuja imagem é 0.

5. Se $f$ é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{3^{\sqrt{x}}}{5+x^2}$, determine o valor de $\dfrac{3 \cdot f(10) + f(1)}{f(4)}$.

6. No gráfico abaixo estão representadas as funções $f$ e $g$, definidas para todo $x \in [-1, 2]$.



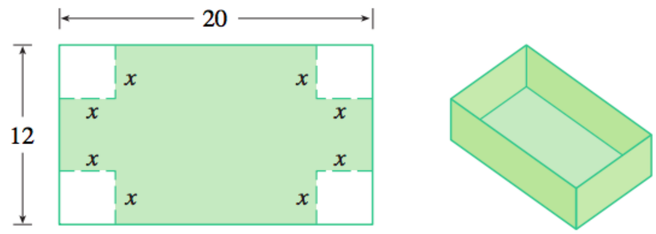

Com base no gráfico, determine os valores de $x$ para os quais:

$(a)$ $f(x) > g(x)$
$(b)$ a função $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ assume valores negativos
$(c)$ a função $p(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ está definida

7. Trezentos livros são vendidos a 40 reais cada, resultando em uma receita de 12 mil reais. Para cada aumento de 5 reais no preço, são vendidos 25 livros a menos. Represente a receita $R$ em função do número $x$ de aumento de 5 reais.

8. Um retângulo tem uma área de $16m^2$. Expresse o perímetro do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.

9. Uma caixa sem tampa deve ser construída de um pedaço retangular de papelão com dimensões $12cm$ por $20cm$. Para isso, devem-se cortar quadrados de lados $x$ de cada canto e depois dobrar, conforme mostra a figura abaixo. Expresse o volume $V$ da caixa como uma função de $x$.




10. Entre os retângulos de perímetro $2p$, qual o de área máxima?

11. Usando translações quando possível, esboce o gráfico de cada uma das seguintes funções.

$(a)$ $f(x) = 4x + 1$

$(b)$ $f(x) = 4(x + 1)$

$(c)$ $f(x) = (x - 1)^2$

$(d)$ $f(x) = x^2 - 1$

$(e)$ $f(x) = \sqrt{x} + 3$

$(f)$ $f(x) = \sqrt{x + 3}$

$(g)$ $f(x) = -\sqrt{x}$

$(h)$ $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

$(i)$ $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$

$(j)$ $f(x) = (x - 1)^2 - 4$

$(k)$ $f(x) = (x - 2)^2 + 2$

$(l)$ $f(x) = -x^2$

$(m)$ $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} + 3$

12. Se $f(x) = x + 5$ e $g(x) = x^2 - 3$, resolva:

$(a)$ $f(g(0))$ $(b)$ $g(f(0))$ $(c)$ $f(f(-5))$ $(d)$ $g(g(2))$

13. Determine as regras de $f \circ g$ e $g \circ f$ em que:

$(a)$ $f(x) = x^2$ e $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

$(b)$ $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = \dfrac{4}{1 + x^2}$

14. Seja $f(x) = \dfrac{x}{x - 2}$. Determine uma função $g$ tal que $(f \circ g)(x) = x$.

15. Considere as funções $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ e $g(x) = 2x + 3$. Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

$(a)$ O valor de $g(f(2))$ é $\dfrac{4}{3}$.

$(b)$ O domínio da função composta $f \circ g$ é $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$(c)$ A função inversa de $g$ é dada por $g^{-1}(x) = \dfrac{x - 3}{2}$.

$(d)$ A reta que é gráfico da função $g$ intercepta o eixo $x$ em $(-\frac{3}{2}, 0)$.

$(e)$ A função $f$ assume valores estritamente positivos para $x < -1$ ou $x > 1$.

16. Decida se a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-4\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 4}$ é inversível. Caso não seja, faça restrições aos domínio e contradomínio, se necessário, a fim de que a função produzida seja inversível. Em seguida, determine a inversa.

17. Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo.

$(a)$ $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$(b)$ $f(x) = 3^x$

$(c)$ $f(x) = e^{-x}$

$(d)$ $f(x) = -e^{-x}$

$(e)$ $f(x) = 1 + e^{-x}$

$(f)$ $f(x) = 1 - e^{-x}$

18. Na igualdade $n(t) = 15000 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{t+k}$, sendo $k$ uma constante, está representada a população $n(t)$ que um pequeno município terá daqui $t$ anos, contados a partir de hoje. Sabendo que a população atual do município é de $10000$ habitantes, determine:

$(a)$ o valor de $k$

$(b)$ a população do município daqui a 3 anos.

19. Se $\log_{x-1}(2x+1) = 2$, calcule $\log_x \sqrt{x+4}$.

20. Sendo $a^2 + b^2 = 70ab$, calcule $\log_5 \dfrac{(a+b)^2}{ab}$ em função de $m = \log_5 2$ e $n = \log_5 3$.

21. Supondo satisfeitas as condições de existência, demonstre que $\dfrac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1 + \log_a b$.

22. Determine o domínio de cada uma das funções abaixo.

$(a)$ $f(x) = \log_2(x+1)$

$(b)$ $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

$(c)$ $f(x) = \ln x$

$(d)$ $f(x) = \ln(-x)$

$(e)$ $f(x) = \log_x 3$

$(f)$ $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{x-1}$

$(g)$ $f(x) = \log_5(x-1)$

$(h)$ $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3x-2)$

$(i)$ $f(x) = \log_4(x^2-9)$

$(j)$ $f(x) = \log_{x-2}(-2x+7)$

23. Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo.

$(a)$ $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

$(b)$ $f(x) = \ln x - 1$

$(c)$ $f(x) = \ln(-x)$

24. Seja $f(x) = \log x$. Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa.

$(a)$ $f(100) = 2$

$(b)$ $f(x^2) = 2f(x)$

$(c)$ $f(10x) = 10f(x)$

$(d)$ $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + f(x) = 0$

25. A igualdade abaixo representa uma estimativa sobre o número de funcionários de uma empresa, em função do tempo de vida:

$$n(t) = 400 + 50 \cdot \log_4(t+2),$$

em que $n(t)$ é o número de funcionários no $t$-ésimo ano de existência da empresa.

$(a)$ Quantos funcionários a empresa possuía na sua fundação?

$(b)$ Quantos funcionários foram incorporados à empresa do segundo ao sexto ano?

26. Em um triângulo retângulo de hipotenusa medindo 15 cm, sabe-se que o seno de um dos outros dois ângulos internos (– que não o reto) é $\dfrac{4}{5}$. Determine:

$(a)$ as medidas dos catetos

$(b)$ o cosseno e a tangente desse mesmo ângulo

$(c)$ seno, cosseno e tangente do terceiro ângulo interno

27. Uma escada de bombeiro pode ser estendida até um comprimento máximo de 25 m, formando um ângulo de $70^o$ com a base, que está apoiada sobre um caminhão, a 2 m do solo. Qual é a altura máxima que a escada atinge? Dados: sen $70^o = 0,940$, $\cos 70^o = 0,342$ e tg $70^o = 2,47$.

28. Resolva cada uma das equações abaixo.

$(a)$ sen $x =$ sen $\left(\dfrac{\pi}{18}\right)$

$(b)$ $\cos x = \dfrac{1}{2}$

$(c)$ tg$(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

29. Determine sen $\alpha$ e $\cos \alpha$ sabendo que tg $\alpha = 5$ e que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

30. Assumindo que $\cos(x+y) = \cos x \cos y -$ sen $x$ sen $y$, escreva $\cos(2x)$ em função de $\cos^2 x$.

31. Determine o domínio da função $f(x) = \dfrac{1 - \text{sen}^2\, x}{1 + \text{sen}\, x}$.

32. Determine o domínio e a imagem, e esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo. Caso se trate de uma função periódica, determine seu período.

$(a)$ $f(x) = \cos(2x)$

$(b)$ $g(x) = -\text{sen } x$

$(c)$ $f(x) = 2\cos x$

$(d)$ $g(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$(e)$ $f(x) = \text{sen } \pi x$

$(f)$ $f(x) = \cos x - \pi.$

$(g)$ $g(x) = \cos(x - \pi)$

$(h)$ $f(x) = \frac{1}{2}\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

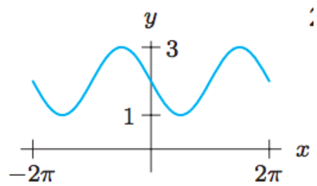
$(i)$ $g(x) = \text{tg } x$

$(j)$ $f(x) = \text{tg}(x - \pi)$

$(k)$ $g(x) = \text{tg } x + 1$

$(l)$ $f(x) = 1 + 4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

33. Encontre uma regra para a função cujo gráfico está representado abaixo.




34. Uma população de animais oscila de forma senoidal entre um mínimo de 700 em primeiro de janeiro e um máximo de 900 em primeiro de julho.

$(a)$ Esboce o gráfico da população pelo tempo.

$(b)$ Determine uma fórmula da população como função do tempo $t$ em meses desde o início do ano.

35. Calcule:

$(a)$ $\text{arcsen } \frac{1}{2}$

$(b)$ $\text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$(c)$ $\text{arctg } 1$

$(d)$ $\text{arctg}(-1)$

$(e)$ $\text{arcsen}(-1)$

$(f)$ $\text{arctg}(-\sqrt{3})$

$(g)$ $\text{arcsen}(\text{sen } 0)$

36. Verifique que $\cos(\text{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$ e calcule $\cos\left(\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

37. Decida se a função $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ é invertível. Caso não seja, faça restrições ao domínio e ao contradomínio de $f$ a fim de produzir uma função invertível de mesma regra de $f$. Explicite a função inversa.

**Lista de exercícios complementar**

1. Determine o coeficente angular da reta de equação $-x + 2y = -1$.

2. $(a)$ Determine a equação reduzida da reta que passa pelo ponto $(2, 0)$ e tem coeficiente angular $-1$.
   $(b)$ Encontre, caso existam, os pontos em que a reta dada intercepta cada um dos eixos.

3. $(a)$ Determine a equação reduzida da reta que passa pelos pontos $(-1, 2)$ e $(3, 5)$.
   $(b)$ Qual é o coeficiente angular dessa reta?
   $(c)$ Encontre, caso existam, os pontos em que a reta intercepta cada um dos eixos.

4. Esboce o gráfico de cada uma das retas abaixo.

   $(a)$ $y = -2x + 1$
   $(b)$ $y = \dfrac{2}{3}x + 3$

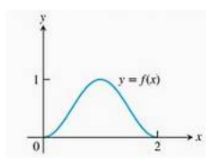
5. Um móvel é lançado verticalmente e sabe-se que no instante $t$ sua altura é dada por $h(t) = 4t - t^2$, $0 \leq t \leq 4$ (Suponha que o tempo é medido em segundos e a altura em quilômetros).

   $(a)$ Esboce o gráfico de $h$.
   $(b)$ Qual a altura máxima atingida pelo móvel? Em que instante esta altura máxima é atingida?

6. Esboce o gráfico de cada uma das funções.

   $(a)$ $f(x) = x^2 - 1$
   $(b)$ $f(x) = x^2 + 1$
   $(c)$ $f(x) = (x + 1)^2 - 2$
   $(d)$ $f(x) = x^2 - 2x + 2$

7. A figura a seguir mostra o gráfico de uma função $f$ com domínio $[0, 2]$ e imagem $[0, 1]$. Encontre os domínios e as imagens das funções a seguir e esboce seus gráficos.




   $(a)$ $g(x) = f(x) + 2$
   $(b)$ $g(x) = -f(x)$
   $(c)$ $g(x) = 2f(x)$
   $(d)$ $g(x) = f(-x)$
   $(e)$ $g(x) = f(x - 1)$

8. Estude o sinal de cada uma das funções abaixo, isto é, diga para quais valores de $x$ a expressão $f(x)$ é positiva, negativa ou nula.

   $(a)$ $f(x) = x^2 - 1$
   $(b)$ $f(x) = x^2 + x + 1$
   $(c)$ $f(x) = -x^2 - 2x - 1$
   $(d)$ $f(x) = x^2 - 5x + 6$
   $(e)$ $f(x) = -x^2 + 3x$
   $(f)$ $f(x) = x^2 + 6x + 9$

9. Estude o sinal de cada uma das expressões abaixo.

   $(a)$ $(x - 1)^2 x$
   $(b)$ $(x + 2)(x - 3)$
   $(c)$ $\dfrac{x}{x - 4}$
   $(d)$ $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 + 3}$
   $(e)$ $(x + 3) \cdot \dfrac{x^2 - 1}{x + 4}$
   $(f)$ $x^2 \cdot \dfrac{x^4 + 1}{x - 1}$

10. Com a seca, estima-se que o nível da água (em metros) em um reservatório, daqui a $t$ meses, seja dado por $n(t) = 3,7 \cdot 4^{-0,2t}$. Qual é o tempo necessário para que o nível de água se reduza à oitava parte do nível atual?

11. Seja $f(x) = a + 2^{bx+c}$, em que $a$, $b$ e $c$ são números reais. A imagem de $f$ é a semirreta $(-1, +\infty)$ e o gráfico de $f$ intercepta os eixos coordenados nos pontos $(1, 0)$ e $\left(0, -\dfrac{3}{4}\right)$. Calcule o produto $abc$.

**Gabarito da lista 1**

1. $(a)$ falso, $(b)$ falso, $(c)$ verdadeiro, $(d)$ verdadeiro, $(e)$ verdadeiro.

2. $(a)$ $f(-1) = 0, f(0) = 1, f(5)$ não está definido, pois 5 não pertence ao domínio de $f$; $(b)$ Im $f = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 4\}$; $(c)$ $x = 2$; $(d)$

3. Os domínios das funções dadas são:

$(a)$ $\mathbb{R} - \{4\}$
$(b)$ $[1, +\infty) - \{2\}$
$(c)$ $\mathbb{R}$
$(d)$ $[1, +\infty)$
$(e)$ $(-3, +\infty)$
$(f)$ $[2, 5]$
$(g)$ $[1, 3) \cup (3, +\infty)$
$(h)$ $\mathbb{R}$
$(i)$ $\mathbb{R}$
$(j)$ $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$
$(k)$ $(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$
$(l)$ $[-2, 2]$
$(m)$ $\left(-\sqrt{2}, 0\right]$

4. $(a)$ $f(0) = 2$; $(b)$ $f(9) = 2$; $(c)$ $f(4x) = 2\sqrt{x} + 2\frac{1}{1-2\sqrt{x}}$; $(d)$ $f(4) = 0$.

5. $\dfrac{3 \cdot f(10) + f(1)}{f(4)} = \dfrac{3^{\sqrt{10}}}{15} + \dfrac{7}{6}$.

6. $(a)$ $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$; $(b)$ Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) < 0$; $(c)$ $p(x)$ está definido para $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

7. $R(x) = (300 - 25x)(40 + 5x)$. **Dica**: Continue a tabela abaixo:

| Aumento 5 reais | Preço livro | Receita |
|---|---|---|
| 0 | $40 = 40 + 5 \cdot 0$ | $(300 - 0) \cdot (40 + 0) = 12000$ |
| 1 | $45 = 40 + 5 \cdot 1$ | $(300 - 25 \cdot 1) \cdot (40 + 5 \cdot 1)$ |

8. $p = p(x) = 2(x + \frac{16}{x})$, em que $p$ é o perímetro do retângulo e $x$ é o comprimento de um dos lados do retângulo.

9. $V(x) = x(20 - 2x)(12 - 2x)$.

10. Gráficos.

11. O quadrado de lados iguais a $\frac{p}{2}$ é o retângulo de área máxima.

12. $(a)$ $f(g(0)) = 2$; $(b)$ $g(f(0)) = 22$; $(c)$ $f(f(-5)) = 5$; $(d)$ $g(g(2)) = -2$.

13. $(a)$ $(f \circ g)(x) = 1 - 2\sqrt{x} + x$ e $(g \circ f)(x) = 1 - \sqrt{x^2}$. Cuidado: $\sqrt{x^2} \neq x$; $(b)$ $(f \circ g)(x) = \dfrac{7 - x^2}{1 + x^2}$; $(g \circ f)(x) = \dfrac{4}{4x^2 - 4x + 2}$.

14. $g(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$.

15. $(a)$ Falso; $(b)$ Verdadeiro; $(c)$ Verdadeiro; $(d)$ Verdadeiro; $(e)$ Verdadeiro.

16. Note que $f(x) = 2 - \frac{11}{x+2}$. Prove que $f$ é injetora, entretanto não é sobrejetora. Restringindo o contradomínio de $f$ a $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, a função obtida, $h : \mathbb{R} \setminus \{-4\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ dada por $h(x) = f(x)$, se torna invertível e $h^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ é dada por $h^{-1}(x) = \dfrac{4x + 3}{2 - x}$.

17. Gráfico.

18. $(a)$ $k = -1$; $(b)$ 33750.

19. $\log_x \sqrt{x + 4} = \frac{3}{4}$.

20. $\log_5 \dfrac{(a + b)^2}{ab} = 2n + 3m$.

21. **Dica**: Use que $\log_a N = \frac{\ln N}{\ln a}$ e $\log_{ab} N = \frac{\ln N}{\ln ab}$.

22.

$(a)$ Dom $f = (-1, +\infty)$
$(b)$ Dom $f = (0, +\infty)$
$(c)$ Dom $f = (0, +\infty)$
$(d)$ Dom $f = (-\infty, 0)$
$(e)$ Dom $f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$
$(f)$ Dom $f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
$(g)$ Dom $f = (1, +\infty)$
$(h)$ Dom $f = (\frac{2}{3}, +\infty)$
$(i)$ Dom $f = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
$(j)$ Dom $f = (2, 3) \cup (3, \frac{7}{2})$

23. Gráfico.

24. $(a)$ Verdadeiro; $(b)$ Verdadeiro; $(c)$ Falso; $(d)$ Verdadeiro.

25. $(a)$ 425 funcionários; $(b)$ 25 funcionários.

26. $(a)$ As medidas dos catetos são 9 e 12; $(b)$ O cosseno e tangente desse mesmo ângulo são, respectivamente $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{3}$; $(c)$ seno, cosseno e tangente do terceiro ângulo interno são $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{4}$ respectivamente.

27. A altura máxima que a escada atinge é $25,5$m.

28. $(a)$ $x = \frac{\pi}{18} + 2k\pi$ ou $x = \frac{17}{18}\pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$; $(b)$ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$; $(c)$ $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

29. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ e $\cos\alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$.

30. $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

31. $\operatorname{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} |\ x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\}$.

32. $(a)$ Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = [-1, 1]$.
    $(b)$ Dom $g = \mathbb{R}$, Im $g = [-1, 1]$.
    $(c)$ Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = [-2, 2]$.
    $(d)$ Dom $g = \mathbb{R}$, Im $g = [-2, 2]$.
    $(e)$ Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = [-1, 1]$.
    $(f)$ Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = [-1 - \pi, 1 - \pi]$.
    $(g)$ Dom $g = \mathbb{R}$, Im $g = [-1, 1]$.
    $(h)$ Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
    $(i)$ Dom $g = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ , Im $g = \mathbb{R}$.
    $(j)$ Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, Im $f = \mathbb{R}$.
    $(k)$ Dom $g = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ , Im $g = \mathbb{R}$.
    $(l)$ Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = [-3, 5]$.

33. $f(x) = \operatorname{sen}(-x) + 2$.

34. **Dica:** O valor mínimo e máximo da função seno é $-1, 1$ respectivamente, sabendo disso e que a função é do tipo $a\operatorname{sen}(cx + d) + b$ imponha as condições:

$$\begin{aligned} a(\quad) + b &= 700 \\ a(\quad) + b &= 900. \end{aligned}$$

Assim, obtemos parte da função que expressa o comportamento da população de animais, $a\operatorname{sen}(cx + d) + b$. Em seguida, imponha valores para $x$ os quais o problema te da informação, para obter $c$ e $d$.

35. $(a)$ $\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$; $(b)$ $\operatorname{arccos}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$; $(c)$ $\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$; $(d)$ $\operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$; $(e)$ $\operatorname{arcsen}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$; $(f)$ $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3}$; $(g)$ $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 0) = 0$.

36. **Dica**: Use que $\cos^2(\operatorname{arcsen}x) + \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen}x) = 1$. Note que $\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$.

37. A função $f$ não é injetora, nem sobrejetora. $f$ é injetora no intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$. Logo, $g : \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right] \to [-1, 1]$ dada por $g(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ é invertível. $g^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x + \frac{\pi}{4}$.

**Gabarito da lista complementar**

1. O coeficiente angular da reta dada é $\frac{1}{2}$.

2. $(a)$ $y=-x+2$; $(b)$ $(0,2),(2,0)$.

3. $(a)$ $y=\frac{3}{4}x+\frac{11}{4}$; $(b)$ $\frac{3}{4}$; $(c)$ $(0,\frac{11}{4}),(-\frac{11}{3},0)$.

4. Gráfico.

5. $(b)$ 4 quilômetros no instante $t=2$.

6. Gráficos.

7. Domínio e imagem:

| | $(a)$ | $(b)$ | $(c)$ | $(d)$ | $(e)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Dom $g$ | $[0,2]$ | $[0,2]$ | $[0,2]$ | $[-2,0]$ | $[1,3]$ |
| Im $g$ | $[2,3]$ | $[-1,0]$ | $[0,2]$ | $[0,1]$ | $[0,1]$ |

8.

| | $(a)$ | $(b)$ | $(c)$ | $(d)$ | $(e)$ | $(f)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)>0$ | $(\infty,-1)\cup(1,\infty)$ | $\mathbb{R}$ | $\emptyset$ | $(-\infty,2)\cup(3,\infty)$ | $(0,3)$ | $\mathbb{R}-\{-3\}$ |
| $f(x)=0$ | $\{-1,1\}$ | $\emptyset$ | $\{-1\}$ | $\{2,3\}$ | $\{0,3\}$ | $\{-3\}$ |
| $f(x)<0$ | $(-1,1)$ | $\emptyset$ | $\mathbb{R}-\{-1\}$ | $(2,3)$ | $(-\infty,0)\cup(3,\infty)$ | $\emptyset$ |

9. $(a)$ $(x-1)^2x>0 \Leftrightarrow x>0$ e $x\neq 1$, $(x-1)^2x<0 \Leftrightarrow x<0$ e $(x-1)^2x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$.

   $(b)$ $(x+2)(x-3)>0 \Leftrightarrow x<-2$ ou $x>3$, $(x+2)(x-3)<0 \Leftrightarrow -2<x<3$ e $(x+2)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=3$.

   $(c)$ $\dfrac{x}{x-4}>0 \Leftrightarrow x<0$ ou $x>4$, $\dfrac{x}{x-4}<0 \Leftrightarrow 0<x<4$ e $\dfrac{x}{x-4}=0 \Leftrightarrow x=0$.

   $(d)$ $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+3}>0 \Leftrightarrow x>1$, $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+3}<0 \Leftrightarrow 0\leq x<1$ e $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+3}=0 \Leftrightarrow x=1$.

   $(e)$ $(x+3)\cdot\dfrac{x^2-1}{x+4}>0 \Leftrightarrow x<-4$ ou $-3<x<-1$ ou $x>1$, $(x+3)\cdot\dfrac{x^2-1}{x+4}<0 \Leftrightarrow -4<x<-3$ ou $-1<x<1$ e $(x+3)\cdot\dfrac{x^2-1}{x+4}=0 \Leftrightarrow x=-3$ ou $x=-1$ ou $x=1$.

   $(f)$ $x^2\cdot\dfrac{x^4+1}{x-1}>0 \Leftrightarrow x>1$, $x^2\cdot\dfrac{x^4+1}{x-1}<0 \Leftrightarrow x<1$ e $x^2\cdot\dfrac{x^4+1}{x-1}=0 \Leftrightarrow x=0$.

10. $7,5$ meses.

11. $abc=4$. **Dica**: Use a informação dada que Im$f=(-1,\infty)$ e que $2^{bx+c}>0$ para todo $(bx+c)\in\mathbb{R}$.