Lista 1: Limites

1. Seja f a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6, & \text{se } x \leq 2 \\ -x+1, & \text{se } 2 < x \leq 5 \\ 6, & \text{se } x > 5. \end{cases}$

   (a) Calcule $f(2)$, $f(4)$, $f(1) + f(5) + 3$ e $f(6)$.

   (b) Esboce o gráfico de f.

2. Dada a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{5}{2}x - 1, & \text{se } x \geq 0 \\ x+2, & \text{se } x < 0, \end{cases}$ determine $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 7$.

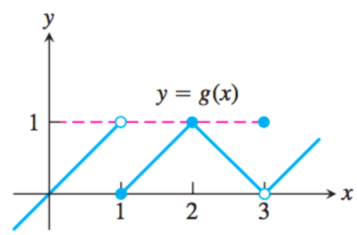
3. Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo.

   (a) $f(x) = |x-1|$
   (b) $f(x) = |x| + 2$
   (c) $f(x) = |\cos x|$
   (d) $f(x) = |\ln x| + 1$
   (e) $f(x) = 2\ln|x|$

4. Seja $g(x) = |x-1| + |x-2|$.

   (a) Dê o domínio de g.
   (b) Esboce o gráfico de g e dê sua imagem.
   (c) Para que valores de x obtemos $g(x) = 1$?
   (d) Encontre os intervalos para os quais $g(x) < 1$.
   (e) Encontre os intervalos para os quais $g(x) > 1$.

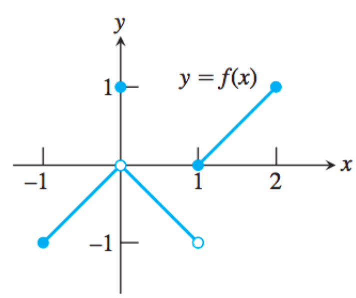
5. Para a função g de gráfico



   determine os seguintes limites ou explique por que eles não existem.

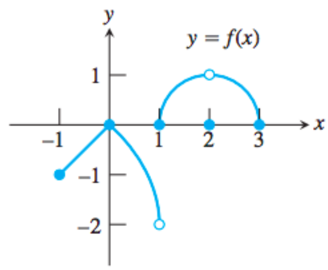
   (a) $\lim_{x\to 1} g(x)$
   (b) $\lim_{x\to 2} g(x)$
   (c) $\lim_{x\to 3} g(x)$
   (d) $\lim_{x\to 2{,}5} g(x)$

6. Decida entre as afirmações abaixo sobre a função f quais são verdadeiras e quais são falsas.



   (a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe
   (b) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$
   (c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
   (d) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$
   (e) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$
   (f) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe em todo ponto x_0 no intervalo $(-1, 1)$.

7. Decida quais afirmações a seguir sobre a função f representada no gráfico são verdadeiras e quais são falsas.



(a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe

(b) $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

(c) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -1$

(d) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -2$

8. Seja $f(x) = \begin{cases} 3-x, & \text{se } x < 2 \\ \frac{x}{2}+1, & \text{se } x > 2. \end{cases}$

(a) Determine $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x)$.

(b) Existe $\lim_{x\to 2} f(x)$? Justifique sua resposta.

(c) Determine $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 4^-} f(x)$.

(d) Existe $\lim_{x\to 4} f(x)$? Justifique sua resposta.

9. Mostre, usando a definição formal (ou seja, via ε e δ) que $\lim_{x\to p} f(x) = l$ nos casos seguintes.

(a) $f(x) = 4x-3,\ p=2,\ l=5$

(b) $f(x) = x+1,\ p=1,\ l=2$

(c) $f(x) = -x^2,\ p=0,\ l=0$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ p=1,\ l=1$

10. Dado que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 2} g(x) = -2$ e $\lim_{x\to 2} h(x) = 0$, encontre, se existir, cada um dos limites abaixo. Caso não exista, explique o porquê.

(a) $\lim_{x\to 2} [5f(x)+g(x)]$

(b) $\lim_{x\to 2} [g(x)]^3$

(c) $\lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$

(d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$

(f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

11. Mostre através de um exemplo que $\lim_{x\to p} f(x)g(x)$ pode existir sem que $\lim_{x\to p} f(x)$ e $\lim_{x\to p} g(x)$ existam.

12. Dê exemplo de uma função f tal que $\lim_{x\to p} |f(x)|$ exista mas $\lim_{x\to p} f(x)$ não exista.

13. Esboce o gráfico da função dada e, utilizando a ideia intuitiva de função contínua, determine os pontos em que a função deverá ser contínua.

(a) $f(x) = 2$

(b) $f(x) = x+1$

(c) $f(x) = x^2$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \le 1 \\ 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{se } |x| \ge 1 \\ 2, & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{se } |x| \ge 1 \\ 1, & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$

(g) $f(x) = \frac{1}{x}$

(h) $f(x) = x^2+2$

(i) $f(x) = x^3-1$

(j) $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1)+1, & \text{se } x \ge 0. \\ x+1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$

(k) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+7}, & \text{se } x \ge 1. \\ 2, & \text{se } x < 1. \end{cases}$

14. Calcule e justifique. Solução do item (a): A função $f(x) = x^2$ é contínua em $x=2$ e, portanto, $\lim_{x\to 2} x^2 = f(2) = 4$.

(a) $\lim_{x\to 2} x^2$

(b) $\lim_{x\to 1} 3x+1$

(c) $\lim_{x\to -2} 4x+1$

(d) $\lim_{x\to 10} 5$

(e) $\lim_{x\to -9} 50$

(f) $\lim_{x\to -1} -x^2-2x+3$

(g) $\lim_{x\to 4} \sqrt{x}$

(h) $\lim_{x\to -3} \sqrt[3]{x}$

(i) $\lim_{x\to 2} \sqrt[5]{x^3-x+1}$

(j) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x+3}$

(k) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

(l) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

(m) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-1}{2x-1}$

(n) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

(o) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3}$

(p) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+3x-1}{x^2+2}$

(q) $\lim_{x\to 1} e^{x^2-x}$

(r) $\lim_{x\to \pi} \text{sen}(x+\text{sen}(x))$

(s) $\lim_{x\to 4} \dfrac{5+\sqrt{x}}{\sqrt{5+x}}$

(t) $\lim_{x\to 1} \text{arcsen}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

15. Calcule cada limite abaixo, caso exista. Se não existir, justifique.

(a) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

(b) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

(c) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$

(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

(e) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$

(f) $\lim_{x\to 3} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

(g) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, em que $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq 1 \\ 2x, & \text{se } x < 1 \end{cases}$

(h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, em que $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq 1 \\ 2x, & \text{se } x < 1 \end{cases}$

16. (a) O que há de errado na equação a seguir? $\dfrac{x^2+x-6}{x-2} = x+3$

(b) Em vista de (a), explique por que a equação $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+3$ está correta.

17. Calcule:

(a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3+x^2}{3x^3+x^4+x}$

(c) $\lim_{h\to 0} x^2+3xh$

(d) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(e) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x+9}$

(f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^4-5x-6}$

(g) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^4+3x-4}$

(h) $\lim_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}}$

(i) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

(j) $\lim_{x\to p} \dfrac{x^3-p^3}{x-p}$

(k) $\lim_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

18. Calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x+1}}$

(b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$

(c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}$

(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x^2-1}$

19. Calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\text{sen } x}$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(3x)}{x}$

(d) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\text{sen } x}{x-\pi}$

(e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\text{sen}x}$

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{\text{tg } x \text{ sen } x}$

20. Calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(4x)}{3x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(ax)}{\text{sen}(bx)}$, $b \neq 0$.

(c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\text{sen}(x^4-1)}{x-1}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}(ax)}{x}$

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^3(x/2)}{x^3}$

(f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-\cos(2x^3-2)}{x-1}$

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

(h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}(x)+2x}{x+x^2}$

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x+\text{sen } x}{x^2-\text{sen } x}$

(j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x^3)}{1-\cos(x^3)}$

21. Sabendo que $1-\cos^2(x) \leq f(x) \leq x^2$ para todo $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, obtenha $\lim_{x\to 0} f(x)$.

22. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que, para todo $x \neq 1$, $-x^2+3x \leq f(x) \leq \dfrac{x^2-1}{x-1}$. Faça o gráfico das funções $g(x) = -x^2+3x$ e $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$. Em seguida, calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ e justifique.

23. Use o Teorema do Confronto para calcular os limites abaixo.

    (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\text{sen}\left(\frac{5}{x}\right)}{x+1}$ $\qquad$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2\text{tg}\left(\frac{7}{x}\right)}{2x+1}$ $\qquad$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\ln|2x|}$

24. Verifique que $\lim\limits_{x\to 0} \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ não existe.

25. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, em que f é dada por:

    (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$ $\qquad$ (b) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$

Gabarito da lista 2

1. (a) $f(2) = -4$, $f(4) = -3$, $f(1) + f(5) + 3 = -7$ e $f(6) = 6$; (b) gráfico.

2. $x_0 = \dfrac{5 + 3\sqrt{17}}{4}$.

3. Gráficos.

4. (a) $\mathbb{R}$
   (b) $[1, +\infty)$
   (c) $[1, 2]$
   (d) Não há
   (e) $\mathbb{R} \setminus [1, 2]$

5. (a) Não existe, pois $\lim_{x \to 1^-} g(x) \neq \lim_{x \to 1^+} g(x)$
   (b) 1
   (c) 0
   (d) $\dfrac{1}{2}$

6. (a) Verdadeiro
   (b) Falso
   (c) Verdadeiro
   (d) Falso
   (e) Falso
   (f) Verdadeiro

7. (a) Falso
   (b) Falso
   (c) Verdadeiro
   (d) Verdadeiro

8. (a) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$
   (b) Não, pois os limites laterais são diferentes.
   (c) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 3$ e $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 3$
   (d) Sim, pois os limites laterais são iguais.

9. Demonstrações.

10. (a) 18
    (b) -8
    (c) 2
    (d) -6
    (e) Nada se pode afirmar
    (f) 0

11. Considere $p = 0$, $f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

12. Considere $p = 0$ e $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

13. (a) f é contínua em $\mathbb{R}$
    (b) f é contínua em $\mathbb{R}$
    (c) f é contínua em $\mathbb{R}$
    (d) f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
    (e) f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
    (f) f é contínua em $\mathbb{R}$
    (g) f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
    (h) f é contínua em $\mathbb{R}$
    (i) f é contínua em $\mathbb{R}$
    (j) f é contínua em $\mathbb{R}$
    (k) f é contínua em $\mathbb{R}$

14. (a) 4
    (b) 4
    (c) -7
    (d) 5
    (e) 50
    (f) 4
    (g) 2
    (h) $\sqrt[3]{-3}$
    (i) $\sqrt[5]{7}$
    (j) 0
    (k) 6
    (l) 2
    (m) 2
    (n) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$
    (o) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{9}}$
    (p) $-\dfrac{1}{2}$
    (q) 1
    (r) 0
    (s) $\dfrac{7}{3}$
    (t) $\dfrac{\pi}{6}$

15. (a) 1
    (b) -1
    (c) 0
    (d) Não existe (limites laterais diferentes)
    (e) 1
    (f) 1
    (g) 1
    (h) Não existe (limites laterais diferentes)

16. (a) A igualdade é somente obtida para $x \neq 2$; (b) Uma vez que as funções $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ e $g(x) = x + 3$ são iguais para todo $x \neq 2$, segue que $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} g(x)$.

17. (a) $-\frac{3}{2}$ (b) 0 (c) x^2 (d) $3x^2$ (e) 0 (f) 0 (g) $\frac{3}{7}$ (h) $\sqrt{2}$ (i) $-\frac{1}{4}$ (j) $3p^2$ (k) $\frac{1}{4}$

18. (a) $\sqrt[3]{3}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{12}$ (d) $\frac{1}{8}$

19. (a) 1 (b) 1 (c) 3 (d) -1 (e) 1 (f) 0 (g) 3

20. (a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{a}{b}$ (c) 4 (d) a (e) $\frac{1}{8}$ (f) 0 (g) 0 (h) 3 (i) -2 (j) 4

21. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

22. $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$.

23. (a) 0, (b) 0, (c) 0.

24. Observe o que ocorre com o gráfico de $f(x) = \text{sen}x$ em um intervalo em torno de 0.

25. (a) 0; (b) Não existe o limite.