UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LISTA DE EXERCÍCIOS DE CÁLCULO 1 (ELABORADA PELA PROFA. TANISE C. PIERIN)

## Lista 2: Limites e funções contínuas

1. Faça o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$ Em seguida, mostre que $f$ não é contínua em $x = 1$.

2. Verifique se a função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ é contínua em $x = 0$.

3. Dê exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ que seja contínua em todos os pontos, exceto em $-1$, 0 e 1.

4. Determine $L$ para que a função dada seja contínua no ponto dado.Justifique. Em seguida esboce o gráfico da função.

   $(a)$ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}, & \text{se } x \neq 2 \\ L, & \text{se } x = 2 \end{cases}$ em $p = 2$

   $(b)$ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}, & \text{se } x \neq 3 \\ L, & \text{se } x = 3 \end{cases}$ em $p = 3$

   $(c)$ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 5}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}}, & \text{se } x \neq 5 \\ L, & \text{se } x = 5 \end{cases}$ em $p = 5$

5. Encontre um valor para a constante $k$, quando possível, para que a função seja contínua em $\mathbb{R}$.

   $(a)$ $f(x) = \begin{cases} -6x + 2, & \text{se } x \leq 2 \\ -kx^2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$

   $(b)$ $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x + 3, & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{3}x^2 - 4x + k, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

6. Decida se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas. Justifique aquelas que forem falsas com um contraexemplo.

   $(a)$ Se $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existe, então $f$ é contínua.

   $(b)$ Se $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ existe, então $f$ é contínua.

   $(c)$ Considere $f(x) = \text{sen} x$ e suponha que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$, então $\lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x) = \text{sen}(L)$.

7. Calcule os seguintes limites:

   $(a)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3}$

   $(b)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} 5 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}$

   $(c)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 1}{x + 3}$

   $(d)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1}$

   $(e)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 + 1}{x^4 + 2x + 3}$

   $(f)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2 + 3}}$

   $(g)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x + 2}$

   $(h)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2 + 1}$

   $(i)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x - \sqrt{x^2 + 1}$

   $(j)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 3}$

8. Calcule os seguintes limites:

   $(a)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 - 3x + 2$

   $(b)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} 5 - 4x + x^2 - x^5$

   $(c)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^3 + 2x + 1$

   $(d)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 - 6x + 1}{6x^2 + x + 3}$

   $(e)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 + 7x - 3}{x^4 - 2x + 3}$

   $(f)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - 2x + 3}{3x^4 + 7x - 1}$

   $(g)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 + x}{3 + x^2}$

9. Calcule os limites:

$(a)\ \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{2t+1}{5t-2}$ $\quad (d)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+4}{3x^2-5}$ $\quad (g)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$ $\quad (j)\ \lim\limits_{s\to-\infty} \dfrac{4s^2+3}{2s^2-1}$

$(b)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+7}{4-5x}$ $\quad (e)\ \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{2y^2-3y}{y+1}$ $\quad (h)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x-4}{3x+1}$ $\quad (k)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+5}{x^2}$

$(c)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^2-2x+1}{3x^2+8x+5}$ $\quad (f)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(3x+\frac{1}{x^2}\right)$ $\quad (i)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+5x}{2-3x}$ $\quad (l)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x+5}{7x^3+x+1}$

10. Calcule os limites:

$(a)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+3}$ $\quad (d)\ \lim\limits_{x\to-\infty} -2x-\sqrt{x^2+3}$ $\quad (g)\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x+3}$

$(b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x+3}}{2x-1}$ $\quad (e)\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{3x^2+2}$ $\quad (h)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-1}$

$(c)\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{x^2+3}$ $\quad (f)\ \lim\limits_{x\to-\infty} -x-\sqrt{3x^2+2}$ $\quad (i)\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt[3]{2+3x^3}$

11. Calcule os limites:

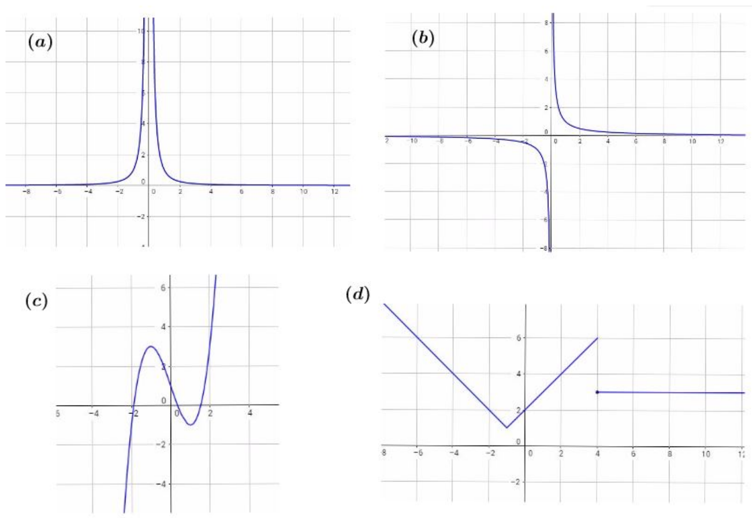
$(a)\ \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{5}{3-x}$ $\quad (c)\ \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x-3}{x^2}$ $\quad (e)\ \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{2x+3}{x^2+x}$ $\quad (g)\ \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{2x+1}{x^2+x}$

$(b)\ \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x}$ $\quad (d)\ \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{3}{x^2-x}$ $\quad (f)\ \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$ $\quad (h)\ \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{3x-5}{x^2+3x-4}$

12. Dê um exemplo de funções $f$ e $g$ tais que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-g(x)\neq 0$. Represente graficamente $f$ e $g$.

13. Dê um exemplo de funções $f$ e $g$ tais que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}\neq 1$. Represente graficamente $f$ e $g$.

14. Associe cada um dos itens abaixo ao seu respectivo gráfico.




$(i)\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty;$

$(ii)\ \lim\limits_{x\to0} g(x)\neq\pm\infty$ e $2<\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)<4;$

$(iii)\ \lim_{x\to+\infty} p(x)=+\infty;$

$(iv)\ \lim\limits_{x\to0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to0^-} h(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0.$

15. Esboce o gráfico de uma função $f$ que satisfaça as seguintes condições:

$(a)\ f(0)=0,\ f(1)=2,\ f(-1)=-2,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1.$

$(b)\ f(0)=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=2$ e $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-2.$

16. Calcule os limites:

$(a)$ $\lim_{x\to+\infty} e^x$ $(c)$ $\lim_{x\to+\infty} (2^x - 3^x)$ $(e)$ $\lim_{x\to+\infty} (2^x + 2^{-x})$

$(b)$ $\lim_{x\to+\infty} (0,13)^x$ $(d)$ $\lim_{x\to-\infty} 2^{-x}$ $(f)$ $\lim_{x\to-\infty} (2^x + 2^{-x})$

17. Calcule os limites:

$(a)$ $\lim_{x\to+\infty} \log_3 x$ $(c)$ $\lim_{x\to+\infty} \ln \dfrac{x}{x+1}$ $(e)$ $\lim_{x\to 1} \ln \dfrac{x^2-1}{x-1}$

$(b)$ $\lim_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{3}} x$ $(d)$ $\lim_{x\to+\infty} [\ln(2x+1) - \ln(x+3)]$

18. Sabendo que $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, calcule:

$(a)$ $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$ $(b)$ $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ $(c)$ $\lim_{x\to 3\pi/2}(1+\cos x)^{1/\cos x}$ $(d)$ $\lim_{x\to 2}\dfrac{5^x-25}{x-2}$

19. Seja $f(x) = x^5 + x + 1$. Use o Teorema do Valor Intermediário para verificar que $f$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[-1, 0]$.

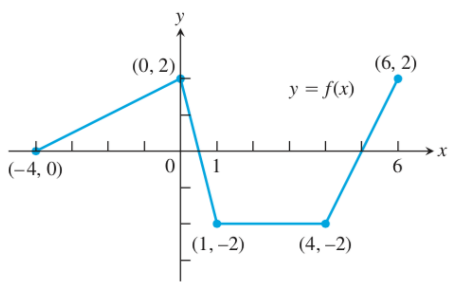
20. Mostre que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ tem três raízes reais distintas.

21. Seja $f(x) = 2x$. Pensando geometricamente, qual o valor que você espera para $f'(p)$? Calcule $f'(p)$.

22. A reta tangente ao gráfico de uma função $f$ no ponto $(0, -1)$ passa pelo ponto $(1, 1)$. Determine $f'(0)$.

23. A curva de equação $y = \sqrt[3]{x}$ passa pelos pontos $P = (1, 1)$ e $Q = (x, \sqrt[3]{x})$. Determine a inclinação da reta que liga $P$ e $Q$.

24. Calcule $\lim_{x\to-2}\dfrac{f(x) - f(-2)}{x-(-2)}$, em que $f$ é a função de gráfico:




Em seguida, encontre os valores de $x$ para os quais não existe $f'(x)$.

25. Calcule $f'(p)$, pela definição, sendo dados:

$(a)$ $\begin{cases} f(x) = x^2 + x \\ p = 1 \end{cases}$ $(b)$ $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \\ p = 4 \end{cases}$ $(c)$ $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} \\ p = 2 \end{cases}$ $(d)$ $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2} \\ p = 2 \end{cases}$

## Gabarito da lista 3

1. Basta notar que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$, ou seja, não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (e, em particular, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$).

2. Basta notar que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ (todos são iguais a 1).

3. Considere $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1 \\ 0, & \text{se } x = -1, 0, 1. \end{cases}$

4. $(a)$ $12$    $(b)$ $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$    $(c)$ $3\sqrt[3]{5}$

5. $(a)$ $\frac{5}{2}$; $(b)$ 3.

6. $(a)$ Falso, considere por exemplo $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$

   $(b)$ Falso, considere por exemplo $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 1 \\ 0, & \text{se } x < 1 \end{cases}$

   $(c)$ Verdadeiro.

7. $(a)$ $0$; $(b)$ $5$; $(c)$ $2$; $(d)$ $\frac{1}{3}$; $(e)$ $0$; $(f)$ $0$; $(g)$ $\frac{1}{3}$; $(h)$ $0$; $(i)$ $-\infty$; $(j)$ $0$

8. $(a)$ $+\infty$; $(b)$ $-\infty$; $(c)$ $-\infty$; $(d)$ $+\infty$; $(e)$ $0$; $(f)$ $\dfrac{1}{3}$; $(g)$ $0$

9. $(a)$ $\frac{2}{5}$; $(b)$ $-\frac{2}{5}$; $(c)$ $\frac{7}{3}$; $(d)$ $0$; $(e)$ $+\infty$; $(f)$ $-\infty$; $(g)$ $1$; $(h)$ $2$; $(i)$ $-\frac{5}{3}$; $(j)$ $2$; $(k)$ $1$; $(l)$ $0$

10. $(a)$ $0$; $(b)$ $\frac{1}{2}$; $(c)$ $+\infty$; $(d)$ $+\infty$; $(e)$ $-\infty$; $(f)$ $-\infty$; $(g)$ $+\infty$; $(h)$ $\frac{1}{2}$; $(i)$ $-\infty$

11. $(a)$ $-\infty$; $(b)$ $-\infty$; $(c)$ $-\infty$; $(d)$ $+\infty$; $(e)$ $-\infty$; $(f)$ $+\infty$; $(g)$ $+\infty$; $(h)$ $-\infty$

12. Considere, por exemplo, $f(x) = 2x$ e $g(x) = x$

13. Considere, por exemplo, $f(x) = 2x$ e $g(x) = x$.

14. $(a)$ corresponde ao item $(iv)$; $(b)$ corresponde ao item $(i)$; $(c)$ corresponde ao item $(iii)$; e $(d)$ corresponde ao item $(ii)$.

15. Gráfico.

16. $(a)$ $+\infty$; $(b)$ $0$; $(c)$ $-\infty$; $(d)$ $+\infty$; $(e)$ $+\infty$; $(f)$ $+\infty$

17. $(a)$ $+\infty$; $(b)$ $+\infty$; $(c)$ $0$; $(d)$ $\ln 2$; $(e)$ $\ln 2$

18. $(a)$ $e$; $(b)$ $\frac{1}{e}$; $(c)$ $e$; $(d)$ $25\ln 5$.

19. $f$ é contínua, já que é polinomial, $f(-1) = -1 < 0$ e $f(0) = 1 > 0$ (possuem sinais opostos).

20. Use o Teorema do Valor Intermediário.

21. $f'(p) = 2$, para todo $p \in \mathbb{R}$.

22. $f'(0) = 2$.

23. A inclinação da reta é $\dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$.

24. $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \frac{1}{2}$; $f'(x)$ não existe para $x = 0$, $x = 1$ e $x = 4$.

25. $(a)$ $3$ $\quad$ $(b)$ $\dfrac{1}{4}$ $\quad$ $(c)$ $-\dfrac{1}{4}$ $\quad$ $(d)$ $-\dfrac{1}{4}$