CM301/A
CÁLCULO EM UMA VARIÁVEL REAL -Semestre 2-2021

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Aula 1 - 09/02

Aula de hoje: O conceito de limite

- Motivação: Taxas de variação média e instantânea.
- Definição de limite.
- Primeiras propriedades.
- Exemplos.

Taxa de variação

- Considere por Q uma **grandeza** que varia com o tempo t e digamos que a variação desta grandeza é dada por uma função f. Por exemplo, Q poderia ser:

⋆ O tamanho de uma população;

⋆ O volume de água em um reservatório;

⋆ A quantidade de uma substância química em uma reação;

⋆ A distância percorrida por um objeto após t segundos.

- A variação em Q do instante de tempo t_0 ao instante $t_0 + \Delta t$ é o valor

$$\Delta Q = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0).$$

- A taxa média da variação de Q (por unidade de tempo) neste intervalo de tempo é

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Pergunta: Qual é a taxa de variação no instante t_0? Ou ainda, como determina-la?

Velocidade instantânea

- Suponha que uma partícula se movimenta ao longo de uma reta horizontal e que sua posição (em metros) num instante t (em segundos) seja descrita por uma função, digamos

$$t \mapsto s(t) = 5t^2 + 100.$$

⋆ Como obter a velocidade média durante um certo intervalo de tempo?

⋆ Como obter a velocidade instantânea num instante t_0?

ACHO QUE VOCÊS JÁ OUVIRAM FALAR SOBRE O MOVIMENTO UNIFORMEMENTE VARIADO...

- O movimento uniformemente variado pode ser caracterizado pela função

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c.$$

- ⋆ $s(t)$ é a posição no instante t.
- ⋆ a indica a aceleração.
- ⋆ c indica a posição inicial no instante $t = 0$.
- ⋆ b indica a velocidade inicial no instante $t = 0$.

BATENDO O MARTELO...

Taxa de variação de variação no instante t_0:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

- ⋆ Como formalizar o conceito $\lim_{\Delta t \to 0}$?
- ⋆ Todas as funções possuem uma *taxa de variação de variação instantânea* em qualquer ponto de seu domínio?
- ⋆ Como calcular limites?
- ⋆ Terei que fazer muitos exercícios? (*Spoiler: sem limites.....*)

As funções de interesse

IMPORTANTE

Iremos considerar neste curso (a menos de menção contrária) funções do tipo

$$f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

para as quais o domínio $Dom(f)$ é um intervalo, ou uma **reunião de intervalos**.

Exemplos:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2 + 1$.
- $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, com $f(x) = \cos(x)$.
- $f : (0, 5] \to \mathbb{R}$, com $f(x) = \ln(x)$.
- $f : (-\infty, 0) \cup (0, 7] \to \mathbb{R}$, com $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Relembrando propriedades do módulo de um número real

Definição

Dado um número real t, defini-se

$$|t| = \begin{cases} t, & \text{se } t \geq 0, \\ -t, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Exercício: Mostre as seguintes propriedades

(a) $|t| < a$ se, e somente se, $-a < t < a$.

(b) $|t| = \sqrt{t^2}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(c) $|xy| = |x||y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(d) $|x + y| \leq |x| + |y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(e) $|x - y| \geq |x| - |y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(f) $|x - y| \geq |y| - |x|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(g) $||x| - |y|| \leq |x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Um pouco mais sobre a propriedade (a)....

- Considere $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. Note que vale a igualdade

$$\{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Um exemplo bem interessante

- Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0, L \in \mathbb{R}$ dois números reais. Suponha que tal função satisfaça a seguinte propriedade:

(I) dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

- É importante observar que a propriedade (I) equivale a seguinte afirmação:

(II) dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon).$$

Definição (Limite)

Sejam $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e x_0 um número real pertencente ao domínio de f, ou um dos extremos dos intervalos que compõem $Dom(f)$. Dizemos que f tende a um número real L, quando x se aproxima de x_0, se vale a seguinte propriedade

($\star$) dado (qualquer) $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in Dom(f) \text{ e } |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

- Neste caso, poderemos utilizar as seguintes notações:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \;\; f(x) \xrightarrow{x \to x_0} L$$

- Note que ($\star$) equivale a:

($\star\star$) dado (qualquer) $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in Dom(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon).$$

Exemplos (por definição e analisando os gráficos)

- Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 2$. Neste caso, $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$.
- Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x \geq 1, \\ -x, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

  Neste caso, não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$.
- Sejam $A = (0,1) \cup (1,\infty)$ e a função $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/(x-1)$. Neste caso, não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Um resultado muito importante

Teorema (operações)

Sejam f e g duas funções reais com mesmo domínio e suponha qu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = M.$$

São válidas as seguintes afirmações:

(a) $\lim_{x\to x_0}[(f+g)(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = L + M$;

(b) $\lim_{x\to x_0}[(f-g)(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = L - M$;

(c) dado $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda L$;

(d) $\lim_{x\to x_0}[(f\cdot g)(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = L\cdot M$;

(e) supondo que g não se anule em seu domínio e que $M \neq 0$, então

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Um resultado muito útil

Teorema (limite por substituição)

Seja $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que f é de um dos seguintes tipos:

- polinomial;
- trigonométrica;
- exponencial;
- logarítmica.

Nestas condições, dado $x_0 \in Dom(f)$, vale a igualdade

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

EXEMPLOS

- Considere a função constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$. Neste caso,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c, \quad \text{seja qual for } \; x_0 \in \mathbb{R}.$$

- Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 2$. Neste caso,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 5$$

- Considere a função $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$. Neste caso,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(1) = e^1 = e.$$

- Considere a função $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = sen(x)$. Neste caso,

$$\lim_{x \to \pi/2} f(x) = f(\pi/2) = sen(\pi/2) = 1.$$

Exemplos

- Considere a função $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2+e^x-3\ln x$. Neste caso

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2}[x^2+e^x-3\ln x]\\ &= \lim_{x\to 2} x^2+\lim_{x\to 2} e^x-3\lim_{x\to 2}\ln x\\ &= 4+e^2-3\ln 2.\end{aligned}$$

- Considere a função $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$h(x)=\frac{sen(x)}{x^2+1}$$

neste caso,

$$\lim_{x\to\pi/2} h(x)=\frac{\lim_{x\to\pi/2} sen(x)}{\lim_{x\to\pi/2} x^2+1}=\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}+1}.$$

Alguns casos de quocientes...

- Note que não podemos aplicar a **regra** do quociente em

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+4x+3}$$

Teorema

Sejam f e g duas funções que satisfazem a seguinte propriedade:

- ⋆ existe $r > 0$ tal que

$$f(x) = g(x),\ \forall x \in (p-r, p+r),\ x \neq p.$$

Nestas condições, se existe $\lim\limits_{x\to p} g(x)$, então também existirá $\lim\limits_{x\to p} f(x)$. Além disso,

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} g(x).$$