CM301/A
CÁLCULO EM UMA VARIÁVEL REAL -Semestre 2-2021

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Aula 2 - 11/02

Aula de hoje: Limites laterais e limite de função composta

- Limites laterais
- Composição de funções.
- Limites de funções compostas

As funções de interesse

IMPORTANTE

Iremos considerar neste curso funções do tipo $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para as quais o domínio $Dom(f)$ é um intervalo, ou uma **reunião de intervalos**.

Definição (Limite)

Sejam $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e x_0 um número real pertencente ao domínio de f, ou um dos extremos dos intervalos que compõem $Dom(f)$. Dizemos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ se vale a seguinte propriedade:

($\star$) dado (qualquer) $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in Dom(f) \text{ e } |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Ou, de modo equivalente,

($\star\star$) dado (qualquer) $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in Dom(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon).$$

Limite à direita

Definição

Sejam $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e p um número real que satisfaz a seguinte condição:

- existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $(p, b) \subseteq Dom(f)$.

O limite lateral de f à direita em p, quando existe, é o número real M que satisfaz a seguinte propriedade:

($\star$) dado (qualquer) $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (p, p+\delta) \implies |f(x) - M| < \epsilon.$$

Ou, de modo equivalente,

($\star\star$) dado (qualquer) $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (p, p+\delta) \implies f(x) \in (M - \epsilon, M + \epsilon).$$

- Utilizaremos a notação

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = M.$$

Limite à esquerda

Definição

Sejam $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e p um número real que satisfaz a seguinte condição:

- existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(a, p) \subseteq Dom(f)$.

O limite lateral de f à esquerda em p, quando existe, é o número real N que satisfaz a seguinte propriedade:

$(\star)$ dado (qualquer) $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (p - \delta, p) \implies |f(x) - N| < \epsilon.$$

Ou, de modo equivalente,

$(\star\star)$ dado (qualquer) $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

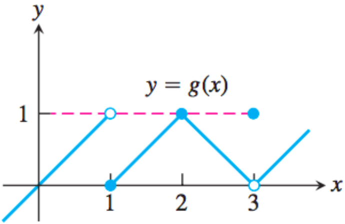
$$x \in (p - \delta, p) \implies f(x) \in (N - \epsilon, N + \epsilon).$$

- Utilizaremos a notação

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = N.$$

Exemplo

- Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico é exibido abaixo.



(a) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = ?$

(b) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = ?$

(c) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = ?$

(d) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = ?$

(e) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = ?$

(f) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = ?$

Um resultado importante

Teorema

Sejam $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e p um número real que satisfaz a seguinte condição:

- existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(a, p) \subseteq Dom(f)$.
- existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $(p, b) \subseteq Dom(f)$.

Nestas condições, temos

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

(I) existe $\lim\limits_{x \to p^+} f(x)$;

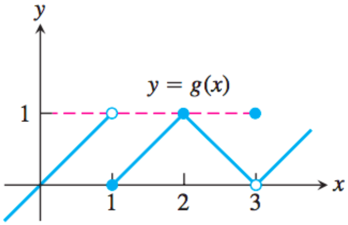
(II) existe $\lim\limits_{x \to p^-} f(x)$;

(III) vale a igualdade

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L = \lim_{x \to p^+} f(x).$$

Exemplo

- Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico é exibido abaixo.



(a) $\lim_{x \to 1} f(x) = ?$ (b) $\lim_{x \to 2} f(x) = ?$ (c) $\lim_{x \to 3} , f(x) = ?$

Consequências importantes do teorema anterior

- Sejam $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e p um número real que satisfaz a seguinte condição:
  - ⋆ existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(a,p) \subseteq Dom(f)$.
  - ⋆ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $(p,b) \subseteq Dom(f)$.

Temos então que:

(a) se não existe um dos limites laterais, então não existe $\lim\limits_{x \to p} f(x)$.

(b) se os limites laterais existem, mas

$$\lim_{x \to p^-} f(x) \neq \lim_{x \to p^-} f(x),$$

então não existe $\lim\limits_{x \to p} f(x)$.

Exemplo

- Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

Afirmação: Não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$.

RELEMBRANDO...

FUNÇÃO COMPOSTA

Sejam $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : Dom(g) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções que satisfazem a seguinte propriedade:

$$Im(f) \subseteq Dom(g).$$

Nestas condições, defini-se a função

$$g \circ f : Dom(f) \to \mathbb{R}$$

pondo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ x \in Dom(f).$$

EXEMPLO

Dadas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = e^x$, temos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^2 + 1 = [e^x]^2 + 1 = e^{2x} + 1.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{x^2+1}.$$

Limites

Teorema (limite por substituição)

Seja $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que f é de um dos seguintes tipos:

- polinomial;
- trigonométrica;
- exponencial;
- logarítmica.

Suponha $g : Dom(g) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que exista a composta $f \circ g$. Se

$$\lim_{x \to p} g(x) = L \in Dom(f),$$

então

$$\lim_{x \to p} (f \circ g)(x) = f\left(\lim_{x \to p} g(x)\right) = f(L).$$

EXEMPLOS

- $\lim\limits_{x \to 0} sen\left(x^2 + \pi/2\right)$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x+1)$
- $\lim\limits_{x \to 0} e^{\left(x^2+2\right)}$