CMM212 - Análise II - S1/2022

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

Entregar até o dia 12 de setembro

- É saudável discutir suas dúvidas com os colegas e também com o professor. (Mas não irei aceitar **cópias...**)
- Resultados provados em sala de aula podem ser utilizados livremente, mas você deve cita-los e justificar que eles se aplicam em suas justificativas.
- Irei ser bem rigoroso com a correção!

Exercício 1 (20 pontos) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se*

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = 0,$$

para todo polinômio $p(x)$, então $f \equiv 0$.

Exercício 2 (20 pontos) *Mostre que em qualquer intervalo $[-a, a]$ existe uma sequência de polinômios p_n que converge uniformemente para a função $f(x) = |x|,\ x \in [-a, a]$, tal que $p_n(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Exercício 3 (20 pontos) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k. Mostre que existe uma sequência de polinômios $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$p_n^{(j)} \longrightarrow f^{(j)},$$

para cada $j = 0, 1, \ldots, k$, sendo as convergências uniformes.

Exercício 4 (20 pontos) *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente para $f : X \to \mathbb{R}$.*

(a) Mostre que se cada f_n é limitada, então $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada.

(b) Mostre que se cada f_n é contínua, então $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente contínua.

Exercício 5 (20 pontos) *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência uniformemente limitada de funções integráveis $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ e considere a sequência de funções $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por*

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt.$$

Mostre que $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência uniformemente convergente em $[a, b]$.