

## LISTA 1- Entregar até 6 de maio

**Exercício 1** Sejam  $x' = Ax$  e  $y' = By$  dois sistemas lineares e  $\phi_A, \phi_B$  os respectivos fluxos. Dizemos que estes sistemas são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$\phi_B(t, h(x)) = h(\phi_A(t, x)), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Assumindo que ambos são sistemas de ordem 2, mostre que:

- (a) Mostre que se  $A$  e  $B$  possuem os mesmos autovalores  $\pm i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ , então estes sistemas são topologicamente conjugados.
- (b) E se forem autovalores  $\pm i\beta$  e  $\pm i\gamma$ , com  $\beta \neq \gamma$ ?
- (c) E se no item anterior considerarmos  $\beta = -\gamma$ ?

**Exercício 2** Assuma que a origem é um atrator para o sistema  $x' = Ax$ , isto é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}x\| = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- (a) Mostre que se dois sistemas são topologicamente conjugados e a origem é atrator de um deles, então também será do outro.
- (b) Mostre que são equivalentes:
  - (i) A origem é um atrator de  $x' = Ax$ ;
  - (ii) O sistema  $x' = Ax$  é topologicamente conjugado a  $x' = -x$ .

**Exercício 3** Assuma que a origem é uma fonte para o sistema  $x' = Ax$ , isto é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}x\| = \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \neq \{0\}.$$

- (a) Mostre que  $x' = Ax$  é topologicamente conjugado a  $y' = By$  se, e somente se,  $x' = -Ax$  é topologicamente conjugado a  $y' = -By$
- (b) Mostre que são equivalentes:
  - (i) A origem é uma fonte de  $x' = Ax$ ;
  - (ii) O sistema  $x' = Ax$  é topologicamente conjugado a  $x' = x$ .

**Exercício 4** Obtenha uma definição para as funções seno e cosseno através do T.E.U.

**Exercício 5** Dizemos que uma solução  $x(t)$  de  $x' = Ax$  é periódica de existir  $T > 0$  tal que  $x(T) = x(0)$ , mas  $x(t) \neq x(0)$  para  $0 < t < T$ . Neste caso,  $T$  é dito o período da solução. Seja  $A_{2 \times 2}$  e suponha que  $x' = Ax$  tem uma solução periódica.

(a) Mostre que  $A$  não possui autovalores reais.

(b) Mostre que toda solução de  $x' = Ax$  é trivial, ou periódica com mesmo período  $T$ .

**Exercício 6** Considere o sistema não homogêneo

$$x' = Ax + b(t),$$

sendo  $A \in M(n)$  e  $b$  uma função contínua.

(a) Mostre que a solução deste sistema, com  $x(0) = x_0$  é

$$x(t) = e^{tA} \left\{ x_0 + \int_0^t e^{-sA} b(s) ds \right\}.$$

(b) Mostre que existe uma única solução periódica (de período  $2\pi$ ) para o caso

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & b \end{bmatrix}, \quad b(t) = (0, \cos(t)),$$

sendo  $b, k > 0$ .

**Exercício 7** Se  $v \in \mathbb{R}^n$  é um autovetor da matriz  $A \in \mathbb{R}^n$  e  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma solução de  $x' = Ax$  tal que

$$x(t^*) \in \{av \in \mathbb{R}^n; a \in \mathbb{R}\},$$

para algum  $t^*$ , mostre que  $x(t) \in [v]$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 8** Sejam  $A \in M(n)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e denote

$$V_\lambda = \text{Ker}(\lambda I - A) \subset \mathbb{R}^n.$$

Mostre que

(a)  $V_\lambda$  é subespaço de  $\mathbb{R}^n$ ;

(b) se  $x \in V_\lambda$ , então  $Ax \in V_\lambda$ ;

(c) se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma solução de  $x' = Ax$  tal que  $x(t^*) \in V_\lambda$ , para algum  $t^* \in \mathbb{R}$ , então  $x(t) \in V_\lambda$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 9** Seja  $A \in M(n)$  e  $V \subset \mathbb{R}^n$  um subespaço tal que  $A(V) \subset V$ . Mostre que  $e^{tA} \subset V$ .

**Exercício 10** Mostre que não existe  $B \in M(2)$  tal que

$$e^B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

**Exercício 11** Sejam  $A, B \in M(n)$  tais que  $AB = BA$ . Mostre que se os fluxos dos campos lineares de  $A$  e  $B$  são contrativos, então o fluxo de  $A + B$  também é.

**Exercício 12** Dizemos que um isomorfismo linear  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

- contrai volume, se  $\det(T) < 1$ ;

- *preserva volume, se  $\det(T) = 1$ ;*
- *expande volume, se  $\det(T) > 1$ .*

*Assim, dizemos que o fluxo da equação  $x' = Ax$  contrai, preserva ou expande o volume em  $\mathbb{R}^n$  se cada  $e^{tA}$  contrai, preserva ou expande o volume de regiões de volume finito em  $\mathbb{R}^n$ .*

*Mostre que o fluxo da equação  $x' = Ax$  preserva o volume em  $\mathbb{R}^n$  se, e somente se, o traço de  $A$  é nulo.*

**Exercício 13** *Sejam  $A \in M(n)$  invertível e  $b \in \mathbb{R}^n$ . Mostre que*

$$x(t) = e^{tA}x_0 + (e^{tA} - I)A^{-1}b$$

*é a única solução de  $x' = Ax + b$ , com  $x(0) = x_0$ .*