CMM 134 - Introdução à Teoria de Integração - S1/2022

Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1- Entregar até o final da aula do dia 27 de julho

- É saudável discutir suas dúvidas com os colegas e também com o professor. (Mas não irei aceitar **cópias...**)
- Resultados provados em sala de aula podem ser utilizados livremente, mas você deve cita-los e justificar que eles se aplicam em suas justificativas.
- Irei ser bem rigoroso com a correção!

Exercício 1 *Sejam X, Y dois conjuntos e $f : X \to Y$ uma função. Mostre que se $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra em Y, então*

$$\mathcal{A} = \{f^{-1}(E);\ E \in \mathcal{B}\}$$

define uma σ-álgebra em X, sendo

$$f^{-1}(E) = \{x \in X;\ f(x) \in E\}.$$

Exercício 2 *Considere X um espaço mensurável. Dada uma função $f : X \to \mathbb{C}$ existem únicas funções reais $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),\ \forall x \in X.$$

Dizemos então que f é mensurável ambas funções f_1 e f_2 são mensuráveis.

(a) Mostre que produtos e somas de funções complexas mensuráveis são mensuráveis.

(b) A função $|f| : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$|f|(x) = \sqrt{(f_1(x))^2 + f_2(x)^2}$$

é mensurável?

Exercício 3 *Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ dois espaços mensuráveis. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é mensurável se*

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{A},\ \forall E \in \mathcal{B},$$

em que $f^{-1}(E) = \{x \in X;\ f(x) \in E\}$.

a) Verifique que se se $Y = \mathbb{R}$ e $\mathcal{B} = \mathbb{B}$, então o conceito acima coincide com aquele que foi estudado anteriormente. Mais do que isso, é possível perceber uma relação com as propriedades de funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) *Sejam* $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$, $(Z,\mathcal{C})$ *espaços mensuráveis e duas funções mensuráveis*

$$f : X \to Y \quad e \quad g : Y \to Z.$$

Mostre que a conposta $g \circ f : X \to Z$ *é mensurável.*

Exercício 4 *Sejam* μ *uma medida em* X *e* $U \in \mathcal{A}$ *fixado. Mostre que a função* $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, *definida por*

$$\lambda(E) = \mu(U \cap E),$$

é uma medida em X.

Exercício 5 *Considere* $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de medidas em* X *tais que* $\mu_n(X) = 1$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Mostre que a função* $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, *definida por*

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mu_n(E),$$

é uma medida em X.

Exercício 6 *Sejam* $f, g \in \mathbb{M}^+$ *duas funções simples tais que* $f \leq g$ *e defina a função* $h : X \to [0, +\infty]$ *pondo*

$$h(x) = \begin{cases} g(x) - f(x), & se \;\; x \in f^{-1}([0, +\infty)) \\ 0, & se \;\; x \in f^{-1}(\{\infty\}). \end{cases}$$

a) *Mostre que* h *é mensurável.*

b) *Mostre que* h *é simples.*

c) *Mostre que* $\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$.

Exercício 7 *Considere* $X = \mathbb{R}$ *e ponha*

$$A = \{E \subset \mathbb{R};\; E \;\; \text{é um intervalo aberto}\}.$$

A σ*-álgebra gerada por* A, *denotada por* $\mathbb{B}$, *é comumente chamada de* σ*-álgebra de Borel e os elementos de* $\mathbb{B}$ *são chamados de conjuntos de Borel.*

Considere agora $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *e sea* $\mathbb{B}_X$ *a coleção de todos os conjuntos de Borel em* X. *Mostre que*

a) $\mathbb{B}_X$ *é uma* σ*-álgebra de* X;

b) *se* $f : X \to \mathbb{R}$ *é não negativa e contínua, então*

$$\int_X f d\mu = \int_a^b f(x)dx,$$

sendo que $\int_a^b f(x)dx$ *indica a integral de Riemann. (Dica: comece provando o resultado acima para funções simples.)*

Exercício 8 *Considere o conjunto* $X = \mathbb{N}$, *a* σ*-álgebra* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *e a medida*

$$\mu(E) = \begin{cases} \#(E), & se\ E\ \text{é finito} \\ \infty, & se\ E\ \text{é infinito}. \end{cases}$$

Mostre que se $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ *é não negativa, então* $f \in \mathbb{M}^+$. *Além disso, temos que*

$$\int f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} f(j).$$