CMM 134 - Introdução à Teoria de Integração - S1/2022

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 2- Entregar até o final da aula do dia 31 de agosto

- É saudável discutir suas dúvidas com os colegas e também com o professor. (Mas não irei aceitar **cópias...**)
- Resultados provados em sala de aula podem ser utilizados livremente, mas você deve cita-los e justificar que eles se aplicam em suas justificativas.

Exercício 1 *Denote por $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ o conjunto das funções reais $f : X \to \mathbb{R}$ e mensuráveis tais que*

$$\int_X f^+ \, d\mu < \infty \quad e \quad \int_X f^- \, d\mu < \infty.$$

Dada $f \in \mathcal{L}$, sua integral, com respeito a medida μ, é definida pelo número real

$$\int_X f \, d\mu \doteq \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu.$$

(a) Considere uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f = 0$, em quase todos os pontos. Mostre que $f \in \mathcal{L}$ e que

$$\int_X f \, d\mu = 0.$$

(b) Considere uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$ e seja $g \in \mathcal{L}$ tais que $f = g$, q.t.p. Mostre que $f \in \mathcal{L}$ e que

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

Exercício 2 *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida no qual $\mu(X) < \infty$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em L_p, $1 \leq p < \infty$, que converge em quase todos os pontos para uma função mensurável f. Suponha que existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$|f_n(x)| \leq K, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N};$$

Mostre que

(a) $f \in L_p$.

(b) f_n converge para f em L_p, ou seja

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Exercício 3 *Considere a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : L_2 \to L_2 \to \mathbb{R}$ dada por Mostre que*

$$\langle [f], [g] \rangle = \int_X fg \, d\mu.$$

(a) *Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ está bem definida, isto é, independe da escolha dos representantes e que $\int_X fg\, d\mu < \infty$.*

(a) *Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em L^2. Conclua que L^2 é um espaço de Hilbert quando munido com tal produto interno.*

Exercício 4 *Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Um funcional linear sobre V é uma aplicação $T : V \to \mathbb{R}$ tal que:*

- *$T(\alpha u + w) = \alpha T(u) + T(w)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $u, w \in V$.*
- *existe $M > 0$ tal que $|T(v)| \leq M\|v\|$, para todo $v \in V$.*

Seja $g \in L^q$ e considere $T : L_p \to \mathbb{R}$, $1/p + 1/q = 1$, definido por

$$T(f) = \int fg\, d\mu.$$

Mostre que T é um funcional linear.

Exercício 5 *Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado. A norma $\|\cdot\|$ provém de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se, e somente se, vale a igualdade (lei do paralelogramo)*

$$\|x + y\|^2 \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \ \forall x, y \in V.$$

Considere $(X, \mathbb{A}, \mu)$ um espaço de medida no qual existem $E, W \in \mathbb{A}$ tais que

$$A \cap B = \emptyset, \ 0 < \mu(A) < \infty, \ 0 < \mu(B) < \infty, \quad e \quad \mu(A) \neq \mu(B),$$

e seja $L_p(X)$, com $1 \leq p < \infty$. Mostre que a norma $\|\cdot\|_p$ em provém de um produto interno se, e somente se , $p = 2$.

Dica: Considere as funções características de E e W.