CMM 114
Introdução à Teoria da Integração

Notas de aula
(constantemente sendo revisada)

Professor:
Fernando de Ávila Silva
favilasi@gmail.com / fernando.avila@ufpr.br
Departamento de Matemática - UFPR

Sumário

1 Cronograma

Semanas	Tópicos	Conteúdo
1	Funções mensuráveis	Conjuntos mensuráveis, funções mensuráveis Funções entre espaços mensuráveis
2, 3 e 4	Medidas	Espaços mensuráveis
5, 6 e 7	Integrais	Funções integráveis e principais propriedades Teorema da convergência dominada de Lebesgue
8 e 9	Espaços de Banach	Introdução e exemplos básicos
10 e 11	Espaços L_p	Definição e principais propriedades
12 e 13	Desigualdades de Hölder e Minkonski	Demonstrações e aplicações

2 Introdução

O objetivo central deste curso é o estudo das funções Lebesgue integráveis e suas principais propriedades. Entretanto, como parte da motivação para tal estudo, relembremos alguns fatos básicos sobre funções *Rieamann* integráveis.

Para tanto, considere uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, isto é, existe $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$, para todo x no domínio de f. Tome agora uma partição $\mathscr{P}$ (subdivisão) do intervalo $[a,b]$ da forma

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = b.$$

Considere então $\mathscr{P}$ uma partição do intervalo $[a,b]$ e as somas

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_{i-1}) M_i, \quad \text{e} \quad s = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_{i-1}) m_i, \tag{1}$$

sendo[1]

$$M_i = \sup_{x \in [\xi_{i-1}, \xi_i]} f(x) \quad \text{e} \quad m_i = \inf_{x \in [\xi_{i-1}, \xi_i]} f(x). \tag{2}$$

Nestas condições, é possível mostrar que estão bem definidos os números

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{\mathscr{P}} S \quad \text{e} \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{\mathscr{P}} s,$$

nos quais $\inf_{\mathscr{P}} S$ e $\sup_{\mathscr{P}} s$ são tomados relativamente a todas as partições $\mathscr{P}$ em $[a,b]$.

Nestas condições, temos a seguinte definição:

Definição 2.1 (Função Riemann Integrável) *Uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dita Riemann Integrável se $\inf_{\mathscr{P}} S = \sup_{\mathscr{P}} s$. Neste caso, a integral de f em $[a,b]$ é denotada por*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Exemplo 2.1

(a) Toda função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann integrável.

(b) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, exceto num conjunto finito (ou infinito enumerável), então f é Riemann integrável.

(c) A função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

não é Riemann integrável em qualquer intervalo $[a,b]$, pois

$$\inf_{\mathscr{P}} S = 1 \quad \text{se} \quad \sup_{\mathscr{P}} s = 0.$$

[1] Veja Seção C para relembrar o conceito de supremo e ínfimo

É possível apresentar uma noção equivalente para a integral de Riemann. Para tanto, seja $E \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto qualquer. A função **característica** de E, denotada por ξ_E, é definida da seguinte forma:

$$\xi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in E, \\ 0, & \text{se} \quad x \notin E, \end{cases}$$

Uma **função degrau** é uma função φ construída por uma combinação linear de funções característica de intervalos, ou seja,

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \xi_{E_j},$$

sendo cada E_j um intervalo.

Escrevendo $E_j = [a_j, b_j]$, defini-se a integral de uma função degrau φ pondo

$$\int \varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j (b_j - a_j).$$

Então, dada uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, sua integral de Rieamann (quando exite) pode ser definida como o limite de integrais de funções degrau que **aproximam** f. Por exemplo, a **integral inferior** de f pode ser dada por

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{\varphi} \left\{ \int \varphi \right\},$$

sendo o supremo acima tomado sobre todas as funções degrau $\varphi(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$.

A integral de **Lebesgue** pode ser obtida por um processo similar, exceto pelo fato de que troca-se a coleção de funções degrau por uma classe mais geral de funções. De forma um pouco mais precisa, a noção de comprimento (de um intervalo) é generalizada para uma classe mais geral de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Assim, trocamos a utilização de funções degrau por **funções simples**.

A definição de integral segue então um processo semelhante: se

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \xi_{E_j},$$

representa uma função simples, então defini-se

$$\int \varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(E_j),$$

em que $\mu(E_j)$ representa a **medida** do conjunto E_j. Finalmente, dada uma função f, sua integral de **Lebesgue** é definida como o supremo das integrais de certas funções simples.

3 Funções mensuráveis

No desenvolvimento da integral de Lebesgue iremos considerar classes de funções $f : X \to \mathbb{R}$, sendo X um conjunto arbitrário. Nos exemplos e aplicações será possível considerar X com sendo: um intervalo; um conjunto discreto; toda a reta real $\mathbb{R}$. Em particular, essa liberdade torna possível estender o conceito de integral para um grande número de possibilidades.

Para tanto, deveremos considerar, para um conjunto X, uma classe de subconjuntos com propriedades específicas. Esse é o objetivo da próxima seção.

3.1 σ-álgebra

Definição 3.1 (σ-álgebra) *Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X é uma **σ-álgebra** se as seguintes condições são satisfeitas:*

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ *e* $X \in \mathcal{A}$;

ii) Se $E \in \mathcal{A}$, *então* $E^C \in \mathcal{A}$;

iii) Se E_j, $j \in \mathbb{N}$, *é uma sequência de elementos de* $\mathcal{A}$, *então a união* $E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$ *é também um elemento de* $\mathcal{A}$.

Neste caso, o par $(X, \mathcal{A})$ *é dito um **espaço mensurável**. Um elemento* $E \in \mathcal{A}$ *é dito* $\mathcal{A}$*-mensurável (ou simplesmente mensurável).*

Observação 3.1

(a) É importante observar que os elementos $E \in \mathcal{A}$ *são **subconjuntos** de* X.

(b) Ao longo deste texto iremos dizer que um conjunto S *é **enumerável** se uma dentre as seguintes propriedades ocorre:*

- S *é finito, ou seja, existem um conjunto* $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ *e uma função bijetiva* $f : I_n \to S$;
- *existe uma função bijetiva* $f : S \to \mathbb{N}$.

(c) Ao longo deste curso utilizaremos as regras[2] *de De Morgan:*

$$\left[\bigcup_{\alpha\in F} A_\alpha\right]^C = \bigcap_{\alpha\in F} A_\alpha^C \quad e \quad \left[\bigcap_{\alpha\in F} A_\alpha\right]^C = \bigcup_{\alpha\in F} A_\alpha^C \tag{3}$$

[2] Veja o Apêndice A para uma revisão das propriedades da união e interseção de conjuntos

Exemplo 3.1

(a) *Se X é um conjunto qualquer, então $\mathcal{P}(X)$ (o conjunto das partes de X) define uma σ-álgebra sobre X.*

(b) *Se X é um conjunto qualquer, então*

$$\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$$

define uma σ-álgebra sobre X.

(c) *Considere $X = \mathbb{N}$ (o conjunto dos números naturais), então*

$$\mathcal{A} = \{\mathbb{N}, \emptyset, \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, \{2, 4, 6, 8, \ldots\}\}.$$

define uma σ-álgebra sobre $\mathbb{N}$.

(d) *Considere $X = \mathbb{R}$ e*

$$\mathcal{A} = \{E \subset \mathbb{R};\ E \quad \text{é enumerável}\}.$$

Neste caso, $\mathcal{A}$ não é uma σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Lema 3.1 *Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ duas σ-álgebras sobre um conjunto X e defina a coleção*

$$\mathcal{A} = \{E \subset X;\ E \in \mathcal{A}_1 \quad e \quad E \in \mathcal{A}_2\}.$$

Nestas condições, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra.

Demonstração: De fato, como $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são σ-álgebras, então

$$\emptyset \in \mathcal{A}_1,\ \emptyset \in \mathcal{A}_2,\ X \in \mathcal{A}_1,\ X \in \mathcal{A}_2,$$

logo

$$\emptyset \in \mathcal{A} \ \text{ e } \ X \in \mathcal{A}.$$

Portanto, a propriedade i) está cumprida. Para verificar ii), note que se $E \in \mathcal{A}$, então $E \in \mathcal{A}_1$ e $E \in \mathcal{A}_1$. Temos então $E^C \in\in \mathcal{A}_1$ e $E^C \in\in \mathcal{A}_1$, logo

$$E^C \in \mathcal{A}.$$

Finalmente, se $\{E_j\}_{j \in N} \subset \mathcal{A}$, então

$$E_j \in \mathcal{A},\ \forall j \in \mathbb{N} \implies E_j \in \mathcal{A}_1,\ \forall j \in \mathbb{N},$$

logo $\{E_j\}_{j \in N} \subset \mathcal{A}_1$ e assim $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j \in \mathcal{A}_1$. De modo análogo, conclui-se que $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j \in \mathcal{A}_2$, portanto

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j \in \mathcal{A}.$$

$\blacksquare$

Proposição 3.1 *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e* $\{E_\lambda\}_{\lambda \in F}$ *uma coleção* ***enumerável*** *de conjuntos mensuráveis. Nestas condições, a interseção*

$$E = \bigcap_{\lambda \in F} E_\lambda$$

é um conjunto mensurável.

Demonstração: Utilizando (3) obtem-se

$$E^C = \bigcup_{\lambda \in F} E_\lambda^C.$$

Como cada $E_\lambda \in \mathcal{A}$, então a propriedade ii) nos garante que $E_\lambda^C \in \mathcal{A}$, para todo $\lambda \in F$. Por outro lado, segue da propriedade iii) e de (5) que

$$\bigcup_{\lambda \in F} E_\lambda^C \in \mathcal{A}.$$

Assim, $E^C \in \mathcal{A}$. Como $(E^C)^C = E$, então segue novamente de ii) que $E \in \mathcal{A}$.

■

Teorema 3.1 (Interseção de σ-álgebras) *Sejam* X *um conjunto e* $\mathcal{A}_\lambda$, $\lambda \in F$, *uma coleção de* σ*-álgebras sobre* X. *Defina por* $\mathcal{A}$ *a seguinte coleção de conjuntos de* X:

$$\mathcal{A} = \{E \subset X;\ E \in \mathcal{A}_\lambda, \forall \lambda \in F\}$$

Então, $\mathcal{A}$ *é uma* σ*-álgebra sobre* X *e será denotada por* $\mathcal{A} = \bigcap_{\lambda \in F} \mathcal{A}_\lambda$.

Demonstração: Exercício. ■

3.2 σ-álgebra de Borel

Considere X um conjunto e sejam:

- A uma coleção (não vazia) de subconjuntos de X;
- $\mathcal{F}$ a coleção de todas as σ-álgebras que contém A;

Denote por $\mathcal{A}$ a interseção de todas as σ-álgebras que contém A, isto é,

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{S} \in \mathcal{F}} \mathcal{S}. \tag{4}$$

Definição 3.2 *Dizemos que* $\mathcal{A}$ *é* σ*-álgebra erada por* A.

Observação 3.2 *Note que a* σ*-álgebra gerada acima é a menor dentre todas as* σ*-álgebras que contém* A, *isto é, se* $\mathcal{B}$ *é uma* σ*-álgebras que contém* A, *então* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Exemplo 3.2 (σ-álgebra de Borel) *Considere $X = \mathbb{R}$ e ponha*

$$A = \{E \subset \mathbb{R};\ E \quad \text{é um intervalo aberto}\}.$$

A σ-álgebra gerada por A, denotada por $\mathbb{B}$, é comumente chamada de álgebra de Borel (ou σ-álgebra de Borel). Elementos de $\mathbb{B}$ são chamados de conjuntos de Borel.

Para a teoria que iremos desenvolver será conveniente adicionar os símbolos $\pm\infty$ ao conjunto $\mathbb{R}$. (Deve ficar claro que não estaremos considerando $\pm\infty$ como números reais!). Para tanto, introduzimos a notação

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Em particular, diremos que um elemento $a \in \overline{\mathbb{R}}$ é dito finito se $a \in \mathbb{R}$ e infinito quando $a \notin \mathbb{R}$. As seguintes operações serão utilizadas frequentemente: dado $x \in \mathbb{R}$ temos:

- $(\pm\infty) + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x$;
- $(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty$ e $(\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty$;
- $$x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \begin{cases} \pm\infty, & \text{se} \quad x > 0, \\ 0, & \text{se} \quad x = 0, \\ \mp, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Observação 3.3 *Enfatizamos que não estamos definindo quociente com denominador $(\pm\infty)$ e nem a soma $(+\infty) + (-\infty)$.*

A chamada álgebra de Borel estendida é definida da seguinte forma: considere as as famílias de conjuntos

$$E_1 = \{E \cup \{-\infty\};\ E \in \mathbb{B}\},\ E_2 = \{E \cup \{+\infty\};\ E \in \mathbb{B}\},\ E_3 = \{E \cup \{-\infty, +\infty\};\ E \in \mathbb{B}\}.$$

e defina

$$\overline{\mathbb{B}} \doteq E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \mathbb{B}.$$

3.3 Exercícios

Exercício 3.1 *Verifique as afirmações do exemplo 3.1.*

Exercício 3.2 *Seja $(X, \mathcal{A})$ é dito um espaço mensurável.*

(a) Mostre que se $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$, então $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$.

(b) Mostre que se E_j, $j \in \mathbb{N}$, é uma sequência em $\mathcal{A}$, então a interseção $E = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} E_j$ também é um elemento de $\mathcal{A}$.

Exercício 3.3 *Seja F um conjunto enumerável e $\{A_\lambda\}_{\lambda \in F}$ uma família de elementos de $\mathcal{A}$. Mostre que*

$$\bigcup_{\lambda \in F} A_\lambda \in \mathcal{A}. \tag{5}$$

Exercício 3.4 *Demonstre o teorema 3.1.*

Exercício 3.5 *Verifique que, de fato, a álgebra de Borel estendida é uma σ-álgebra.*

Exercício 3.6 *Sejam X, Y dois conjuntos e $f : X \to Y$ uma função. Mostre que se $\mathcal{B}$ uma σ-álgebra em Y, então*

$$\mathcal{A} = \{f^{-1}(E);\ E \in \mathcal{B}\}$$

define uma σ-álgebra em X, sendo [3]*:*

$$f^{-1}(E) = \{x \in X;\ f(x) \in E\}.$$

Dica: verifique os seguintes fatos:

a) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ *e* $f^{-1}(Y) = X$.

b) se $E, F \subset Y$, então

$$f^{-1}(E \setminus F) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F),$$

sendo $E \setminus F = \{x \in E; x \notin F\}$.

c) $f^{-1}\left[\bigcup B_\mu\right] = \bigcup f^{-1}\left[B_\mu\right]$ *e* $f^{-1}\left[\bigcap B_\mu\right] = \bigcap f^{-1}\left[B_\mu\right]$.

3.4 Funções Mensuráveis

Para introduzirmos o conceito de funções mensuráveis iremos estar sempre considerando um espaço mensurável fixado $(X, \mathcal{A})$. Assim, temos a seguinte definição:

Definição 3.3 (Função mensurável) *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaçao mensurável. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita $\mathcal{A}$-mensurável (ou simplesmente mensurável) se vale a seguinte propriedade:*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \text{ tem-se que } \ A_\alpha = \{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \tag{6}$$

Exemplo 3.3

1. *Toda função constante é mensurável*

2. *Sejam $E \subset X$ e $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & se \ \ x \in E, \\ 0, & se \ \ x \notin E. \end{cases}$$

3. *Considre $X = \mathbb{R}$ e $\mathbb{B}$ a álgebra de Borel. Então, toda função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $\mathbb{B}$-mensurável.*

Proposição 3.2 *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que* $A_\alpha = \{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$*;*

---

[3] Veja o Apêndice B para uma revisão sobre imagem inversa.

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que* $B_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$;

c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que* $C_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$;

d) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que* $D_\alpha = \{x \in X;\ f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$.

Demonstração: Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que $A_\alpha^C = B_\alpha$. Se for $A_\alpha \in \mathcal{A}$, então $B_\alpha \in \mathcal{A}$, em virtude da propriedade ii). De modo análogo, temos que $B_\alpha \in \mathcal{A}$ implica em $A_\alpha \in \mathcal{A}$ o que demonstra $a) \iff b)$. Um argumento semelhante monstra que $c) \iff d)$.

Observe então que a demonstração da proposição estará completa se verificarmos que $a) \iff c)$.

Suponha então que vale $a)$. Então, para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$ devemos ter $A_\beta \in \mathcal{A}$. Em particular, dado qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e qualquer $n \in \mathbb{N}$ devemos ter

$$A_{\alpha-1/n} = \{x \in X;\ f(x) > \alpha - 1/n\} \in \mathcal{A}.$$

Afirmamos que

$$C_\alpha = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\alpha-1/n}.$$

De fato, se $x \in C_\alpha$, então

$$f(x) \geq \alpha > \alpha - 1/n, \forall n \in N,$$

logo $x \in A_{\alpha-1/n}$, $\forall n \in N$. Portanto, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\alpha-1/n}$, donde $C_\alpha \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\alpha-1/n}$. Por outro lado, se $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\alpha-1/n}$, então

$$f(x) > \alpha - 1/n, \forall n \in N.$$

Segue disto que $f(x) \geq \alpha$ (Por quê?), logo $x \in C_\alpha$ e assim $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\alpha-1/n} \subset C_\alpha$. Isso conclui a prova da afirmação.

Como cada $A_{\alpha-1/n} \in \mathcal{A}$, então segue da propriedade iii) que $C_\alpha \in \mathcal{A}$, isto é, $a) \Longrightarrow c)$.

Finalemente, a parte $c) \Longrightarrow a)$ segue da igualdade

$$A_\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_{\alpha+1/n}.$$

■

Proposição 3.3 *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$ um número real qualquer. Assim, as seguintes funções são mensuráveis:*

a) cf; *b)* f^2; *c)* $f + g$; *d)* fg; *e)* $|f|$.

Demonstração: Exercício. ■

Observação 3.4 (Funções complexas) *Considere X um espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{C}$ uma função. Neste caso, existem duas funções reais $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),\ \forall x \in X.$$

Usualmente, utilizam-se as notações $f_1 = \Re(f)$ e $f_2 = \Im(f)$.

Em virtude dessas observações, podemos introduzir a seguinte definição

Definição 3.4 *Seja $(X, \mathcal{A})$. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{C}$ é dita $\mathcal{A}$-mensurável (ou simplesmente mensurável) se vale ambas funções $\Re(f)$ e $\Im(f)$ são mensuráveis.*

3.5 Exercícios

Exercício 3.7 *Mostre que f é mensurável se, e somente se, $f^+ : X \to \mathbb{R}$ e $f^- : X \to \mathbb{R}$ são ambas mensuráveis. (Ver exercício* (3.12)*.)*

Exercício 3.8 *Verifique as afirmações do exemplo 3.3.*

Exercício 3.9 *Conclua a demonstração da proposição 3.2.*

3.6 Funções mensuráveis a valores na reta estendida

Definição 3.5 *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma função real (estendida) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é dita mensurável se vale a seguinte propriedade:*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \textit{tem-se que} \quad A_\alpha = \{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Denotamos ainda

$$\mathbb{M}(X, \mathcal{A}) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}};\ \ f \textit{ é mensurável}\}.$$

Observação 3.5 *Note que se $f \in \mathbb{M}(X, \mathcal{A})$, então*

$$\{x \in X;\ f(x) = +\infty\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{x \in X;\ f(x) > j\} \in \mathcal{A}$$

e

$$\{x \in X;\ f(x) = -\infty\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{x \in X;\ f(x) \le -j\} \in \mathcal{A}.$$

Teorema 3.2 *Temos $f \in \mathbb{M}(X, \mathcal{A})$ se, e somente se, os conjuntos*

$$A = \{x \in X;\ f(x) = +\infty\} \quad e \quad B = \{x \in X;\ f(x) = -\infty\}$$

pertencem a $\mathcal{A}$ e, além disso, a função $f_1 : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & se \ \ x \notin A \cup B, \\ 0, & se \ \ x \in A \cup B, \end{cases}$$

é mensurável.

3.7 Exercícios adicionais

Exercício 3.10 *Considere $X = \mathbb{R}$ e ponha*

$$A = \{E \subset \mathbb{R};\ E \ \ \textit{é um intervalo fechado } [a, b]\}.$$

Mostre que a σ-álgebra gerada por A coincide com de álgebra de Borel.

Exercício 3.11 *Pergunta: Produtos e somas de funções complexas mensuráveis são mensuráveis? e quanto a função* $|f| : X \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$|f|(x) = \sqrt{\Re(f)^2 + \Im(f)^2}?$$

Exercício 3.12 *Dada uma função* $f : X \to \mathbb{R}$ *definimos as funções* $f^+ : X \to \mathbb{R}$ *e* $f^- : X \to \mathbb{R}$ *pondo*

$$f^+(x) = \sup\{f(x)\,,\,0\} \quad e \quad f^+(x) = \sup\{-f(x)\,,\,0\}.$$

a) Mostre que $f = f^+ - f^-$ *e* $|f| = f^+ + f^-$.

b) Mostre que $f^+ = \frac{1}{2}\left(|f| + f\right)$ *e* $f^- = \frac{1}{2}\left(|f| - f\right)$.

c) Mostre que f *é mensurável se, e somente se,* f^+ *e* f^- *são ambas mensuráveis.*

Exercício 3.13 *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável,* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável e* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Mostre que a composta* $\varphi \circ f : X \to \mathbb{R}$ *é mensurável.*

Exercício 3.14 *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *e* $(Y, \mathcal{B})$ *dois espaços mensuráveis. Dizemos que uma função* $f : X \to Y$ *é mensurável se*

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{A},\ \forall E \in \mathcal{B},$$

em que

$$f^{-1}(E) = \{x \in X;\ f(x) \in E\}.$$

a) Verifique que se se $Y = \mathbb{R}$ *e* $\mathcal{B} = \mathbb{B}$*, então o conceito acima coincide com aquele que foi estudado anteriormente. Mais do que isso, é possível perceber uma relação com as propriedades de funções contínuas* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$, $(Z, \mathcal{C})$ *espaços mensuráveis e duas funções mensuráveis*

$$f : X \to Y \quad e \quad g : Y \to Z.$$

Mostre que a conposta $g \circ f : X \to Z$ *é mensurável.*

4 Medidas

Na seção anterior foi introuduzido o conceito de espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$, o qual consiste de um conjunto X e uma σ-álgebra $\mathcal{A}$. Nosso objetivo agora é considerar certas funções definidas sobre $\mathcal{A}$, as quais são chamdas de *medidas* e generalizam a ideia de *comprimento*, *área*, *volume*, etc.

Definição 4.1 (Medida) *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma função*[4]

$$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$$

*é dita uma **medida** sobre $\mathcal{A}$ se valem as seguintes propriedades:*

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

(M2) $\mu(E) \geq 0$*, para todo* $E \in \mathcal{A}$*;*

(M3) Se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$*, com* $E_j \cap E_k = \emptyset$ *para* $j \neq k$*, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \tag{7}$$

*Diremos então que a tripla $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um **espaço de medida.***

A propriedade M3 é comumente chamada de propriedade *contável aditiva.* Note que estamos admitindo que μ assuma o valor $+\infty$, logo o lado direito de (7) pode ser igual a $+\infty$. Assim, podemos ter $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = +\infty$ em duas situações:

- $\mu(E_n) = +\infty$, para algum n, ou
- $\mu(E_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ diverge.

Em particular, introduzimos os seguintes conceitos:

- Uma medida μ é dita **finita** se $\mu(E) \neq \infty$, para todo $E \in \mathcal{A}$.
- Uma medida μ é dita σ-**finita** se existe $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \quad \text{e} \quad \mu(E_n) < \infty, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 4.1

[4]Note que o domínio de tal função é a coleção $\mathcal{A}$, ou seja, ela age sobre conjuntos.

1. *Considere* $X \neq \emptyset$ *and* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.

$$\mu_1(E) = 0, \ \forall E \in \mathcal{P}(X).$$

$$\mu_2(E) = \begin{cases} 0, & se \ \ E = \emptyset, \\ \infty, & se \ \ E \neq \emptyset. \end{cases}$$

2. *Considere* $X \neq \emptyset$ *and* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. *Fixado* $p \in X$ *defina*

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & se \ \ p \notin E \\ 1, & se \ \ p \in E. \end{cases}$$

3. *Considere* $X = \mathbb{N}$ *e* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$$\mu(E) = \begin{cases} \#(E), & se\ E\ é\ finito \\ \infty, & se\ E\ é\ infinito. \end{cases}$$

4. *Será demonstrado que no espaço mensurável* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *existe uma única medida* $\mu : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ *tal que*

$$\mu((a, b)) = b - a$$

Tal medida recebe o nome: Medida de Lebesgue

Lema 4.1 *Considere* μ *uma medida sobre uma* σ*-álebra* $\mathcal{A}$. *Sejam* $E, F \in \mathcal{A}$ *tais que* $E \subseteq F$. *Temos então*

a) $\mu(E) \leq \mu(F)$;

b) *Se* $\mu(E) < \infty$, *então* $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

Demonstração: Primeiramente, note que podemos escrever $F \setminus E = F \cap E^C$, logo se $E, F \in \mathcal{A}$, então $F \setminus E \in \mathcal{A}$. Portanto, podemos está bem definido o valor $\mu(F \setminus E)$.

Por outro lado, temos que

$$F = E \cup (F \setminus E) \ \text{ e } \ E \cap (F \setminus E) = \emptyset,$$

logo

$$\mu(F) = \mu(E \cup (F \setminus E)) \stackrel{(12)}{=} \mu(E) + \mu(F \setminus E),$$

donde $\mu(E) \leq \mu(F)$ o que prova a).

Para provar b), observe que se $\mu(E) < \infty$, então está bem definido $\mu(F) - \mu(E)$.

■

Teorema 4.1 *Considere* μ *uma medida sobre uma* σ*-álebra* $\mathcal{A}$.

a) *Se* $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *é uma sequência crescente em* $\mathcal{A}$, *então*

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n); \tag{8}$$

b) Se $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente em $\mathcal{A}$ com $\mu(F_1) < \infty$. Então

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n). \tag{9}$$

Demonstração: Comecemos com o item a). Note que se $\mu(E_n) = +\infty$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então ambos os lados de (8) são iguais a $+\infty$. Suponha então que $\mu(E_n) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Defina a sequência $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pondo

$$A_1 = E_1 \ \text{ e } \ A_n = E_n \setminus E_{n-1},\ n > 1.$$

Note que $A_j \cap A_k = \emptyset$, $j \neq k$, e ainda

$$E_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \ \text{ e } \ \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Temos então

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\
&\overset{M3}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \\
&= \mu(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{m=2}^{n} \mu(A_m) \\
&\overset{Lema\ 4.1}{=} \mu(E_1) + \lim_{m\to\infty} \sum_{m=2}^{n} [\mu(E_m) - \mu(E_{m-1})] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(E_n),
\end{aligned}$$

o que demonstra a parte a).

Para a parte b), considere a sequencia $E_n = F_1 \setminus F_n$, $n \in \mathbb{N}$. Note que $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz as hipóteses da parte a), logo:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &\overset{(a)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_1 \setminus F_n) \\
&\overset{Lema\ 4.1}{=} \mu(F_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(F_n).
\end{aligned} \tag{10}$$

Uma vez que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = F_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \overset{Lema\ 4.1}{=} \mu(F_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right). \tag{11}$$

Finalmente, combinando (10) e (11) obtemos o resultado.

■

4.1 O conceito q.t.p.

Num espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ diremos que uma propriedade $\mathscr{P}$ vale $\mu-$q.t.p. (quase todos os pontos[5]) se existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) = 0$

$$\text{e a propriedade } \mathscr{P} \text{ é verdadeira em } X \setminus E$$

Exemplo 4.2 *Dizemos que duas funções $f, g : X \to \mathbb{R}$ são iguais $\mu-$q.t.p. (ou simplesmente iguais q.t.p.) se existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) = 0$ e*

$$f(x) = g(x), \ \forall x \in X \setminus E$$

A notação usual é:

$$f(x) = g(x), \ q.t.p.$$

Exemplo 4.3 *Dizemos que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, converge q.t.p. para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) = 0$ e*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in X \setminus E,$$

Neste caso, temos a notação

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \ q.t.p.$$

4.2 Exercícios

Exercício 4.1 *Verifique que os exemplos dados em 4.1 são medidas.(Não se preocupe com a Medida de Lebesgue). Verifique quais são finitas, não finitas e σ-finitas.*

Exercício 4.2 *Sejam $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos. Mostre que*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j). \tag{12}$$

Exercício 4.3 *Sejam μ uma medida em X e $U \in \mathcal{A}$ fixado. Mostre que a função $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, definida por*

$$\lambda(E) = \mu(U \cap E),$$

é uma medida em X.

Exercício 4.4 *Considere $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de medidas em X tais que $\mu_n(X) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a função $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, definida por*

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu_n(E),$$

é uma medida em X.

[5] Nas referências escritas em inglês você irá encontra a expressão *almost everywhere* e a abreviação *a.e.*

Exercício 4.5 *Considere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medidae defina*

$$\mathcal{Z} = \{E \in \mathcal{A};\ \mu(E) = 0\}.$$

a) A família $\mathcal{Z}$ define uma nova σ-álgebra em X?

b) Mostre que, se $E \in \mathcal{Z}$ e $F \in \mathcal{A}$, então $E \cap F \in \mathcal{Z}$.

c) Se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{Z}$.

Exercício 4.6 (Desafiador...) *Seja λ a Medida de Lebesgue. Mostre que*

a) Se $E = \{p\}$, então $E \in \mathbb{B}$ e vale $\lambda(E) = 0$;

b) Se E é um conjunto enumerável, então $E \in \mathbb{B}$ e vale $\lambda(E) = 0$;

c) $\lambda((a, b)) = \lambda([a, b)) = \lambda((a, b]) = \lambda([a, b]) = b - a$;

d) Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto, então $\lambda(K) < +\infty$.

5 Integração de funções simples

Ao longo desta seção estaremos considerando fixado um **espaço de medida** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e utilizaremos as notações

$$\begin{aligned}\mathbb{M} =& \{f : X \to \overline{\mathbb{R}};\ f \ \text{ é mensurável}\}\\ \mathbb{M}^+ =& \{f \in \mathbb{M};\ f(x) \geq 0,\ \forall x \in X\},\\ \mathbb{M}^- =& \{f \in \mathbb{M};\ f(x) \leq 0,\ \forall x \in X\}.\end{aligned}$$

Definição 5.1 *(Função simples) Diremos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é simples se ela assume apenas finitos valores, isto é, o conjunto $f(X)$ é finito.*

Exercício 5.1

1. *Toda função constante $f : X \to \mathbb{R}$ é simples;*
2. *Sejam $A_1, A_2 \subset X$ tais que $X = A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Dados dois números reais distintos c_1, c_2, a função $f : X \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & se \ \ x \in A_1, \\ c_2, & se \ \ x \in A_2 \end{cases}$$

é simples.

Definição 5.2 *Dado um subconjunto $A \subset X$, define-se a função característica de A, denotada por $\chi_A : X \to \mathbb{R}$, pondo-se*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & se \ \ x \in A, \\ 0, & se \ \ x \notin A. \end{cases}$$

Lema 5.1 *Se $f \in \mathbb{M}$ é uma função simples, então existem números reais distintos $a_1, \ldots, a_n$ e conjuntos mensuráveis $E_1, \ldots, E_n$, dois a dois disjuntos, tais que*

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}. \tag{13}$$

A expressão (15) será chamada de representação canônica de f.

‘

Demonstração: Exercício. ∎

Definição 5.3 *(Integral de funções simples) Seja $f \in \mathbb{M}^+$ um função simples e (15) sua representação canônica. A integral de f, com respeito a medida μ, é definida como sendo*

$$\int_X f \, d\mu \doteq \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j). \tag{14}$$

Observação 5.1 *Note que podemos ter $\int_X f\,d\mu = +\infty$, caso $\mu(E_j) = +\infty$, para algum j. Além disso:*

1. *adotaremos a notação $0(+\infty) = 0$, pois assim,*
$$f \equiv 0 \Longrightarrow \int_X f\,d\mu = 0;$$
2. *o valor $\int_X f\,d\mu$ está bem definido, pois uma vez que $f \geq 0$, então todos os a_j são não negativos e assim não corremos o risco de obter a indeterminação $(+\infty) + (-\infty)$.*

Lema 5.2 *Sejam $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos. Então,*
$$\int_X \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}\,d\mu \right) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j),\ \ c_j \geq 0.$$

Demonstração: Defina $A_{n+1} = X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \right)$ e $c_{n+1} = 0$. Assim, temos a função simples não negativa
$$\phi = \sum_{j=1}^{n+1} c_j \chi_{A_j},$$
já na sua forma canônica.

Como $\phi = \sum_{j=1}^{n+1} c_j \chi_{A_j} = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}$, pois $c_{n+1} = 0$, então
$$\begin{aligned}
\int_X \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}\,d\mu \right) &= \int_X \phi d\mu = \sum_{j=1}^{n+1} c_j \mu(A_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} c_j \mu(A_j) == \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j) + c_{n+1}\mu(A_{n+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j)
\end{aligned}$$

■

Proposição 5.1 *Sejam $f, g \in \mathbb{M}^+$ duas funções simples e $c \geq 0$. Então,*
$$\int_X cf + g\,d\mu = c\int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

Demonstração: Provemos primeiramente que $\int_X cf\,d\mu = c\int_X f$. De fato, se $c = 0$, então cf é a função identicamente nula e não temos o que demonstrar. Suponha então que $c > 0$. Neste caso, temos necessariamente que $\psi = cf \in \mathbb{M}^+$. Além disso, a representação canônica de ψ é dada por

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} ca_j \chi_{E_j}, \tag{15}$$

sendo $\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ a representação canônica de f. Assim, temos

$$\begin{aligned}\int_X cf \, d\mu = \int_X \psi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} ca_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) \\ = c \int_X f \, d\mu.\end{aligned}$$

Por fim, note que a proposição ficará demonstrada se verificarmos que

$$\int_X f + g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

Para tanto, considere as representações canônicas

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \quad \text{e} \quad g = \sum_{k=1}^{\ell} b_k \chi_{F_k}.$$

Note que $\sum_{k=1}^{\ell} \chi_{F_k} = 1$, logo, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$\begin{aligned}\chi_{E_j} = \chi_{E_j} \cdot 1 = \chi_{E_j} \cdot \sum_{k=1}^{\ell} \chi_{F_k} \\ = \sum_{k=1}^{\ell} \chi_{E_j} \chi_{F_k} \\ \overset{(16)}{=} \sum_{k=1}^{\ell} \chi_{E_j \cap F_k}.\end{aligned}$$

Segue disto que

$$f = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} a_j \chi_{E_j \cap F_k},$$

e uma vez que os conjuntos $S_{j,k} = E_j \cap F_k$ são dois a dois disjuntos, então podemos obter do lema 5.2 que

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} a_j \mu(E_j \cap F_k),$$

Um argumento semelhante nos dá

$$\int_X g \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} b_k \mu(E_j \cap F_k),$$

Uma vez que

$$f + g = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} (a_j + b_k)\mu(E_j \cap F_k),$$

então obtemos novamente do lema 5.2 que

$$\int_X f + g \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} b_k \mu(E_j \cap F_k)$$

■

5.1 Exercícios

Exercício 5.2 *Demonstre o lema 5.1.*

Exercício 5.3 *Mostre que*

$$\chi_A \cdot \chi_B = \chi_{A \cap B} \tag{16}$$

Exercício 5.4 *Sejam $f, g \in \mathbb{M}^+$ duas funções simples tais que $f \leq g$ e defina a função $h : X \to [0, +\infty]$ pondo*

$$h(x) = \begin{cases} g(x) - f(x), & se \quad x \in f^{-1}([0, +\infty)) \\ 0, , & se \quad x \in f^{-1}(\{\infty\}). \end{cases}$$

a) Mostre que h é mensurável.

b) Mostre que h é simples.

c) Mostre que $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.

6 Integrais de funções mensuráveis não negativas

Ao longo desta seção estaremos considerando fixado um **espaço de medida** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e utilizaremos as notações

$$\begin{aligned}
\mathbb{M} =& \{f : X \to \overline{\mathbb{R}};\ f \quad \text{é mensurável}\} \\
\mathbb{M}^+ =& \{f \in \mathbb{M};\ f(x) \geq 0,\ \forall x \in X\}, \\
\mathbb{M}^- =& \{f \in \mathbb{M};\ f(x) \leq 0,\ \forall x \in X\}.
\end{aligned}$$

Dada uma função $f \in \mathbb{M}^+$, considere o conjunto

$$\mathscr{I}_f \doteq \{\phi \in \mathbb{M}^+, \quad \text{tais que} \quad \phi \text{ é simples} \quad \text{e } \phi \leq f\}.$$

Definição 6.1 *A integral de uma função $f \in \mathbb{M}^+$ é definida como sendo o valor*

$$\int_X f d\mu \doteq \sup_{\phi \in \mathscr{I}_f} \left\{ \int_X \phi \, d\mu \right\}. \tag{17}$$

Em particular, se $E \in \mathcal{A}$, então definimos

$$\int_E f d\mu \doteq \int_X f \chi_E d\mu,$$

sendo χ_E a função característica de E.

Observação 6.1 *Note que $\int_X f d\mu$ está bem definido, pois*

$$\left\{ \int_X \phi \, d\mu; \quad \text{tais que} \quad \phi \in \mathscr{I}_f \right\} \subset \overline{\mathbb{R}}.$$

Em particular, toda função $f \in \mathbb{M}^+$ é intregrável!.

Teorema 6.1 *Sejam $f, g \in \mathbb{M}^+$ tais que $f \leq g$. Então:*

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Além disso, se $U, V \in \mathcal{A}$ são tais que $U \subset V$, então

$$\int_U f d\mu \leq \int_V f d\mu.$$

Demonstração: Note que nestas condições temos $\mathscr{I}_f \subset \mathscr{I}_g$, logo

$$\left\{ \int_X \phi d\mu;\ \phi \in \mathscr{I}_f \right\} \subset \left\{ \int_X \phi d\mu;\ \psi \in \mathscr{I}_f \right\}.$$

Portanto, segue do Exercício C.4 que

$$\sup_{\phi \in \mathscr{I}_f} \left\{ \int_X \phi \, d\mu \right\} \leq \sup_{\phi \in \mathscr{I}_g} \left\{ \int_X \phi \, d\mu \right\}$$

Para demonstrar a segunda parte, basta notar que

$$f \chi_U \leq f \chi_V.$$

■

Proposição 6.1 *Fixada uma função simples $\varphi \in \mathbb{M}^+$, a função $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por*

$$\lambda(E) \doteq \int_X \varphi \chi_E \, d\mu$$

define uma medida em X.

Demonstração: Exercício. ■

6.1 Teorema da convergência monótona

Nesta seção temos como objetivo estudar o compartamento da integral com respeito a uma sequência de funções, isto é, queremos obter algo do tipo

$$\int_X \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu.$$

Para tanto, se faz necessário introduzir alguns conceitos, o que é feito na sequência. Primeiramente, recordemos o seguinte: uma sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} subset \mathbb{R}$ converge para um número $y \in \mathbb{R}$ se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |y_n - y| < \epsilon.$$

Além disso, da uma sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $subset \mathbb{R}$, definimos

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} y_n \doteq \sup_{n\geq 1}\{\inf_{m\geq n} y_m\}$$

e

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} y_n \doteq \inf_{n\geq 1}\{\sup_{m\geq n} y_m\}$$

É possível mostrar que

$$\lim_n y_n = y_0 \iff \liminf_{n\in\mathbb{N}} y_n = \limsup_{n\in\mathbb{N}} y_n = y_0$$

Definição 6.2 *Considere uma sequência de funções mensuráveis $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$. Defninimos então as funções $f, F, f^*, F^* : X \to \overline{\mathbb{R}}$ pondo:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} \\ F(x) &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} \\ f^*(x) &= \liminf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\} \\ F^*(x) &= \limsup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\}. \end{aligned}$$

Teorema 6.2 *Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções mensuráveis, então f, F, f^* e F^* são também mensuráveis.*

Demonstração: Exercício. ■

Definição 6.3 *Diremos que uma sequência de funções $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, converge para uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se*

$$f(x) = \lim_n f_n(x), \ \forall x \in X.$$

Teorema 6.3 *Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções mensuráveis que converge para uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, então f também é mensurável.*

Demonstração: Exercício. ■

Teorema 6.4 (da Convergência Monótona) *Considere $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções em $\mathbb{M}^+$ tais que $f_n \leq f_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $f_n \to f$, então*

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu.$$

Demonstração: Uma vez que (exercício) $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, então devemos ter

$$\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f_{n+1} \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu,$$

logo

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu. \tag{18}$$

Por outro lado, considere um número real $< \alpha < 1$, uma função $\varphi \in \mathscr{I}_f$ e defina

$$A_n = \{x \in X; \ \alpha\varphi(x) \leq f_n(x)\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Note que:

- $A_n \in \mathcal{A}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $A_n \subset A_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Assim, obtemos

$$\int_{A_n} \alpha\varphi \, d\mu \leq \int_{A_n} f_n \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu \tag{19}$$

Nestas condições segue[6] da Proposição 6.1 que

$$\int_X \varphi \, d\mu = \lim_n \int_{A_n} \varphi \, d\mu. \tag{20}$$

Assim, aplicando o limite em (19) chaga-se em

$$\alpha \int_X \varphi \, d\mu \leq \lim_n \int_X f_n \, d\mu.$$

[6]verifique isso!!!

Uma vez que a desigualdade acima vale para qualquer $0 < \alpha < 1$, então

$$\int_X \varphi \, d\mu \leq \lim_n \int_X f_n \, d\mu.$$

Por sua vez, tomamos $\varphi \in \mathscr{I}_f$ arbitrariamente, logo

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X \varphi \, d\mu \leq \lim_n \int_X f_n \, d\mu.$$

Combinando esta última desigualdade com (18) chega-se em

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \leq \lim_n \int_X f_n \, d\mu,$$

ou seja,

$$\int_X f \, d\mu = \lim_n \int_X f_n \, d\mu.$$

■

6.2 Propriedades básicas

Veremos nesta seção algumas básicas sobre integrais de funções mensuráveis positias. Para tanto, comecemos com o seguinte resultado.

Lema 6.1 *Dada $f \in \mathbb{M}^+$, existe uma sequência de funções monótona $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{I}_f$ tal que*

$$f = \lim_{n \to \infty} \varphi_n.$$

Demonstração: Veja lema 2.11 na livro do Bartle. ■

Proposição 6.2 *Sejam $f, g \in \mathbb{M}^+$ e $c \geq 0$. Nestas condições, $cf + g \in \mathbb{M}^+$. Além disso, temos*

$$\int_X cf + g \, d\mu = c \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

Demonstração: É fácil ver que $cf + g \in \mathbb{M}^+$. Vamos verificar primeiramente que

$$\int_X cf \, d\mu = c \int_X f \, d\mu.$$

Note que se $c = 0$, então não temos o que provar. Suponha $c > 0$ e considere uma sequência monótona $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{I}_f$ tal que $f = \lim_{n \to \infty} \varphi_n$.

Note que

$$cf = \lim_{n \to \infty} c\varphi_n,$$

logo, pelo teorema da Convergência Monótona,

$$\begin{aligned}
\int_X cf \, d\mu &= \int_X \lim c\varphi_n \, d\mu \\
&= c \lim \int_X \varphi_n \, d\mu \\
&= c \int_X f \, d\mu.
\end{aligned}$$

Provemos agora que

$$\int_X f + g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

Para tanto, considere sequências monótonas $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{I}_f$ e $\{\psi_n\} \subset \mathscr{I}_g$ que convergem para f e g, respectivamente.

Note que, pela Proposição 5.1, temos

$$\int_X \varphi_n + \psi_n \, d\mu = \int_X \varphi_n \, d\mu + \int_X \psi_n \, d\mu, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Uma vez que $f + g = \lim(\varphi_n + \psi_n)$, então o Teorema da Convergência monótona nos dá

$$\begin{aligned}
\int_X f + g \, d\mu &= \int_X \lim(\varphi_n + \psi_n) \, d\mu \\
&= \lim \int_X (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu \\
&= \lim \int_X \varphi_n \, d\mu + \lim \int_X \psi_n \, d\mu \\
&= \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.
\end{aligned}$$

∎

O próximo resultado, que é consequência do Teorema da Convergência monótona, é importante pois nos permite trabalhar com sequência de funções que não são necessariamente monótonas.

Teorema 6.5 (Lema de Fatou) *Considere uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{M}^+$. Val a seguinte desigualdade:*

$$\int_X \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int_X f_n \, d\mu \tag{22}$$

Demonstração: Dado $m \in \mathbb{N}$, defina a função $g_m : X \to \overline{\mathbb{R}}$ pondo

$$g_m(x) = \inf\{f_m(x), f_{m+1}(x), \ldots\}.$$

Uma vez que $g_m \leq f_n$, para todo $m \leq n$, então

$$\int_X g_m \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu, \ m \leq n,$$

logo

$$\int_X g_m \, d\mu \leq \liminf \int_X f_n \, d\mu.$$

Uma vez que a sequência $\{g_m\}$ é crescente, então ela deve convergir para $\liminf f_n$. Segue do Teorema da Convergência monótona que

$$\int_X \liminf f_n \, d\mu \leq \lim \int_X g_n \, d\mu \leq \liminf \int_X f_n \, d\mu.$$

∎

Definição 6.4 *Dizemos que duas funções $f, g \in \mathbb{M}(X, \mathcal{A}, \mu)$ são iguais em* ***quase todos os pontos*** *se o conjunto*

$$E = \{x \in X;\ f(x) \neq g(x)\}$$

tem medida nula, ou seja, $\mu(E) = 0$. Utilizaremos a notação $f = g,\ q.t.p.$

Definição 6.5 *Dizemos que uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{M}(X, \mathcal{A}, \mu)$ converge para uma função $f \in \mathbb{M}(X, \mathcal{A}, \mu)$ em* ***quase todos os pontos*** *se o conjunto*

$$E = \{x \in X;\ \lim f_n(x) \neq f(x)\},$$

tem medida nula, ou seja, $\mu(E) = 0$. Neste caso, temos a notação

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f,\ q.t.p.$$

Proposição 6.3 *Considere $f \in \mathbb{M}^+$. Então, $f = 0,\ q.t.p.$ se, e somente se,*

$$\int_X f\, d\mu = 0. \tag{23}$$

Demonstração: Suponha que seja válida a igualdade (23). Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina o conjunto

$$E_n = \{x \in X;\ f(x) > 1/n\}.$$

Uma vez que $f \geq 1/n\chi_{E_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$0 = \int_X f_n\, d\mu \geq 1/n\mu(E_n) \geq 0,$$

donde $\mu(E_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Note que

$$\{x \in X;\ f(x) \neq 0\} = \{x \in X;\ f(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n,$$

logo

$$\mu\left(\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}\right) = 0.$$

Para provar a outa implicação, suponha $f = 0,\ q.t.p.$ e seja

$$E = \{x \in X;\ f(x) \neq 0\},$$

para o qual devemos ter $\mu(E) = 0$.

Definindo $f_n = n\chi_E$, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos $f \leq \liminf f_n$. Assim, segue do Lema de Fatou que

$$0 \leq \int_X f\, d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu = 0.$$

■

O próximo resultado nos da uma versão do Teorema da Convergência Monótona no caso de convergência q.t.p.

Teorema 6.6 *Sejam $f \in \mathbb{M}^+$ uma função e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{M}^+$ uma sequência crescente de funções tais que converge para f em quase todos os pontos. Nestas condições:*

$$\int_X f\, d\mu = \lim \int_X f_n\, d\mu.$$

Demonstração: Considere $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) = 0$ e

$$\lim f_n(x) = f(x),\ \forall x \in F \doteq X \setminus E.$$

Uma vez que a sequência de funções $\{f_n\chi_F\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a função $f\chi_F$, então o Teorema da Convergência Monótona nos dá

$$\int_X f\chi_F\, d\mu = \lim \int_X f_n\chi_F\, d\mu$$

Por outro lado, segue de $\mu(E) = 0$ que as funções

$$h = f\chi_E \ \text{ e } \ h_n \doteq f_n\chi_E,\ n \in \mathbb{N}$$

se anulam q.t.p, logo

$$\int_X f\chi_E\, d\mu = 0 \ \text{ e } \ \int_X f_n\chi_E\, d\mu = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Assim, segue das identidades

$$f = f\chi_F + f\chi_E \ \text{ e } \ f_n = f_n\chi_F + f_n\chi_E$$

que

$$\begin{aligned}\int_X f\, d\mu = \int_X f\chi_F + f\chi_E\, d\mu &= \int_X f\chi_F\, d\mu + \int_X f\chi_E\, d\mu \\ &= \int_X f\chi_F\, d\mu \\ &= \lim \int_X f_n\chi_F\, d\mu \\ &= \lim \int_X f_n\, d\mu\end{aligned}$$

■

6.3 Exercícios

Exercício 6.1 *Mostre que se $f \in \mathbb{M}^+$ e $\phi \in \mathscr{I}_f$, então*

$$\int_X \phi d\mu \leq \int_X f d\mu. \tag{24}$$

Exercício 6.2 *Considere o conjunto $X = \mathbb{N}$, a σ-álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e a medida*

$$\mu(E) = \begin{cases} \#(E), & \text{se } E \text{ é finito} \\ \infty, & \text{se } E \text{ é infinito.} \end{cases}$$

Mostre que se $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ é não negativa, então $f \in \mathbb{M}^+$. Além disso, temos que

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} f(j).$$

Exercício 6.3 *(Desafiador) Considere* $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{B}_X$ *a coleção de todos os conjuntos de Borel em* X*.*

a) $\mathbb{B}_X$ *é uma* σ*-álgebra de* X*;*

b) se $f : X \to \mathbb{R}$ *é não negativa e contínua, então*

$$\int_X f d\mu = \int_a^b f(x)dx,$$

sendo que $\int_a^b f(x)dx$ *indica a integral de Riemann.*

Exercício 6.4 *Demonstre a Proposição 6.1.*

Exercício 6.5 *(Desafiador) Demonstre o Teorema 6.2.*

Exercício 6.6 *Demonstre o Teorema 6.3.*

Exercício 6.7 *Considere* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de funções em* $\mathbb{M}^+$ *tais que* $f_n \leq f_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Se* $f_n \to f$*, então* $f_n \leq f$*.*

Exercício 6.8 *(Desafiador) Demonstre a validade da igualdade* (20)*.*

Exercício 6.9 *Demonstre a Proposição 6.1 utilizando o Teorema da Convergência monótona .*

Exercício 6.10 *Mostre que se* $f, g \in \mathbb{M}^+$ *são tais que* $f = g$*, q.t.p., então*

$$\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

Exercício 6.11 *Considere* $f \in \mathbb{M}^+$ *e defina* $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *pondo*

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu.$$

Mostre que se $\mu(E) = 0$*, então* $\lambda(E) = 0$*.*

Exercício 6.12 *Considere uma sequência* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{M}^+$*. Mostre que*

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n\, d\mu$$

Exercício 6.13 *Considere uma função* $f \in \mathbb{M}^+$ *tal*

$$\int_X f\, d\mu < \infty.$$

a) Mostre que existe uma sequência de conjuntos $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *tal que*

- $\{x \in X;\ f(x) > 0\} = \bigcup -n \in \mathbb{N} F_n$ *e*
- $\mu(F_n) < \infty$*, para todo* n*.*

b) Dado $\epsilon > 0$*, existe* $E \in \mathcal{A}$ *tais que*

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_E f\, d\mu + \epsilon.$$

7 Funções integráveis

Neste capítulo iremos considerar a integral de funções que assumem valores positivos e negativos. Para tanto, recordemos as seguintes notações: dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$, defini-se $f^+ : X \to \mathbb{R}$ e $f^- : X \to \mathbb{R}$ pondo

$$f^+(x) = \max\{f(x)\,,\,0\} \ \text{ e } \ f^+(x) = \max\{-f(x)\,,\,0\},$$

donde obtemos

$$f = f^+ - f^-.$$

Definição 7.1 *Denotaremos por*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$$

o conjunto das funções reais $f : X \to \mathbb{R}$ e mensuráveis tais que

$$\int_X f^+ \, d\mu < \infty \quad e \quad \int_X f^- \, d\mu < \infty.$$

Dada $f \in \mathcal{L}$, sua integral, com respeito a medida μ, é definida pelo número real

$$\int_X f \, d\mu \doteq \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu.$$

Observação 7.1 *Se $f \in \mathbb{M}$ pode ser escrita como $f = f_1 - f_2$, com*

$$f_1, f_2 \in \mathbb{M}, \ f_1 \geq 0, \ f_2 \geq 0, \ \int_X f_1 \, d\mu < \infty \quad e \quad \int_X f_2 \, d\mu < \infty,$$

então

$$\int_X f \, d\mu \doteq \int_X f_1 \, d\mu - \int_X f_2 \, d\mu.$$

Proposição 7.1 *Dada $f \in \mathcal{L}$, a função $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu \tag{25}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

a) $\lambda(\emptyset) = 0$;

b) se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ é uma sequência dois a dois disjunta, então

$$\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E_n).$$

Demonstração: Exercício. ■

Observação 7.2 *O número $\lambda(E)$ definido em (25) será chamado de **integral indefinida de f**. Em particular, se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$é como na proposição, então denotando $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ obtemos*

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} f\,d\mu.$$

Essa igualdade será relembrada através da seguinte frase: ***a integral indefinida de uma função $f \in \mathcal{L}$ é contável-aditiva.***

Teorema 7.1 *Uma função mensurável f pertence a $\mathcal{L}$ se, e somente se, $|f|$ também pertence a $\mathcal{L}$. Nesse caso,*

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu \tag{26}$$

Demonstração: Exercício. ■

Corolário 7.1 *Sejam f uma função mensurável e g uma função integrável. Se $|f| \leq |g|$, então f é integrável e vale*

$$\int_X |f|\,d\mu \leq \int_X |g|\,d\mu.$$

Demonstração: Exercício. ■

Teorema 7.2 *Sejam $f, g \in \mathcal{L}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Nestas condições:*

a) $\alpha f + g \in \mathcal{L}$;

b) $\int_X cf + g\,d\mu = c\int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$.

Demonstração: A prova de que $\alpha f \in \mathcal{L}$ é um exercício. Verifiquemos que

$$\int_X \alpha f\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu.$$

- Se $\alpha = 0$, então $\alpha f \equiv 0$, logo

$$\int_X \alpha f\,d\mu = 0 = \alpha \int_X f\,d\mu.$$

- $\alpha > 0$, então

$$(\alpha f)^+ = \alpha f^+ \;\text{ e }\; (\alpha f)^- = \alpha f^-,$$

logo

$$\begin{aligned}
\int_X \alpha f\,d\mu = \int_X (\alpha f)^+\,d\mu - \int_X (\alpha f)^-\,d\mu \\
\int_X \alpha f^+\,d\mu - \int_X \alpha f^-\,d\mu \\
= \alpha\left(\int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu\right) \\
= \alpha \int_X f\,d\mu.
\end{aligned}$$

- $\alpha < 0$: Exercício.

Para demonstrar as demais afirmações, observe que se $f, g \in \mathcal{L}$, logo $|f|, |g| \in \mathcal{L}$, pelo Teorema 7.1. Segue da desigualdade

$$|f + g| \leq |f| + |g|,$$

da Proposição 6.2 e do Corolário 7.1 que $f + g \in \mathcal{L}$.

Para demonstrar que

$$\int_X f + g\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu,$$

observe que podemos escrever

$$f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-).$$

Assim, a igualdade desejada é obtida combinando-se a Observação 7.1 e o Teorema 7.1.

■

7.1 Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

Estabeleceremos agora um dos resultados mais importantes da teoria da medida.

Teorema 7.3 (Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ uma sequência de funções integráveis que converge, q.t.p., para uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$. Se existe uma função integrável $g \in \mathcal{L}$ tal que $|f_n| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e vale*

$$\int_X f\,d\mu = \lim \int_X f_n\,d\mu. \tag{27}$$

Demonstração: Assuma, inicialmente, que a convergência $f_n \to f$ ocorre em todos os pontos de X. Uma vez que

$$|f(x)| = \lim |f_n(x)| \leq g(x), \ \forall x \in X,$$

então $|f| \leq g$. Assim, segue do Corolário 7.1 que f é integrável.

Uma vez que $0 \leq g + f_n$, então obtemos do Lema de Fatou que

$$\begin{aligned}
\int_X g\,d\mu + \int_X f\,d\mu &= \int_X g + f\,d\mu \\
&\leq \liminf \int_X g + f_n\,d\mu \\
&= \liminf \left(\int_X g\,d\mu + \int_X f_n\,d\mu \right) \\
&= \int_X g\,d\mu + \liminf \int_X f_n\,d\mu,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_X f\,d\mu \leq \liminf \int_X f_n\,d\mu. \tag{28}$$

Por outro lado, também temos $0 \leq g - f_n$, logo o Lema de Fatou implica em

$$\begin{aligned}
\int_X g\,d\mu - \int_X f\,d\mu = \int_X g - f\,d\mu &\leq \liminf \int_X g - f_n\,d\mu \\
&= \liminf \left(\int_X g\,d\mu + \int_X f_n\,d\mu \right) \\
&= \int_X g\,d\mu - \limsup \int_X f_n\,d\mu,
\end{aligned}$$

donde

$$\limsup \int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu. \tag{29}$$

Combinando (28) e (29) obtemos (27).

Por fim, suponha $f_n \to f$, q.t.p., e seja

$$E = \{x \in X;\ \lim f_n(x) \neq f(x)\}$$

e defina a função $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ e sequência $\widetilde{f_n} : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, pondo

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \notin E, \\ 0, & \text{se } x \in E. \end{cases} \quad \text{e} \quad \widetilde{f_n}(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{se } x \notin E, \\ 0, & \text{se } x \in E. \end{cases}$$

Note que as funções $\widetilde{f_n}$ são todas integráveis e

$$\lim \widetilde{f_n}(x) = \widetilde{f}(x),\ \forall x \in X.$$

Como $|f_n| \leq g$, logo, pelo que foi provado acima, temos que $\widetilde{f}$ é integrável. Além disso, por ser $\mu(E) = 0$, então

$$\int_X f\,d\mu = \int_X \widetilde{f}\,d\mu \quad \text{e} \quad \int_X f_n\,d\mu = \int_X \widetilde{f_n}\,d\mu$$

Assim, segue do que foi provado que

$$\int_X f\,d\mu = \int_X \widetilde{f}\,d\mu = \lim \int_X \widetilde{f_n}\,d\mu = \lim \int_X f_n\,d\mu.$$

∎

7.2 Integral de Riemann e Integral de Lebesgue

Exibiremos abaixo um resultado qu mostra que toda função Riemann integrável (veja Definição 2.1) num intervalo é também Lebesgue integrável. Mais do que isso, verifica-se que funções Riemann integráveis estão sujeitas a condições sobre seus conjuntos de descontinuidade.

Observamos que, em grande parte, a a vantagem de se trabalhar com funções Lebesgue integráveis vem do fato de que tal conceito *conversa bem* com operações de limites. Entretanto, tal fato, em geral, não ocorre com funções Riemann integráveis.

No que segue, consideraremos funções reais $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. As integrais de f, com respeito a Riemann e a Lebesgue, serão denotadas por

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{e} \quad \int_{[a,b]} f \, d\mu,$$

respectivamente. (Aqui estamos entendendo μ como sendo a medida de Lebesgue, como introduzido no exemplo 4.1.)

Teorema 7.4 *Com respeito a uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ temos as seguintes proprieades:*

a) se f é Riemann integrável em $[a, b]$, então f é Lebesgue integrável em $[a, b]$. Neste caso, vale a igualdade

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f \, d\mu;$$

b) se f é limitada, então é Riemann integrável se, e somente se, f é contínua μ-q.t.p.

Demonstração: Veja o Teorema 11.33 na referência [4]. ■

Exemplo 7.1 *Considere a função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \notin \mathbb{Q}, \\ 0, \ x = 0, \\ 1/q, \ x = p/q \ (\textit{irredutível}). \end{cases}$$

Neste caso, temos[7]*:*

- *f é descontínua nos pontos racionais;*
- *f é contínua nos pontos irracionais;*

Segue destas observações que f é Riemann integrável, logo Lebegue. Assim:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{[-1,1]} f \, d\mu = 0.$$

[7] Verifique!

O próximo exemplo mostra que existem funções Lebesgue integráveis que não são Riemann.

Exemplo 7.2 *Considere a função* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Temos que f *não é Riemann integrável, uma vez que não é limitada. Por outro lado, considere a sequência de funções*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x}, & x \in (1/n,1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

para $n \geq 2$. *Como cada função* f_n *é contínua, então é Riemann integrável e portanto Lebesgue. Uma vez que* $\lim f_n = f$, *então*

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} f \, d\mu &= \lim \int_{[0,1]} f_n \, d\mu \\ &= \lim \int_0^1 f_n(x) dx \\ &= \lim \left[2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right] \\ &= 2. \end{aligned}$$

7.3 Exercícios

Exercício 7.1 *Verifique a validade da Observação 7.1.*

Exercício 7.2 *Demonstre a Proposição 7.1.*

Exercício 7.3 *Demonstre o Teorema 7.1.*

Exercício 7.4 *Demonstre o Corolário 7.1.*

Exercício 7.5 *Termine a demosntração do Teorema 7.2.*

Exercício 7.6 *Considere uma função mensurável* $f : X \to \mathbb{R}$ *tal que* $f = 0$, *em quase todos os pontos. Mostre que* $f \in \mathcal{L}$ *e que*

$$\int_X f \, d\mu = 0.$$

Exercício 7.7 *Considere uma função mensurável* $f : X \to \mathbb{R}$ *e seja* $g \in \mathcal{L}$ *tais que* $f = g$, *q.t.p. Mostre que* $f \in \mathcal{L}$ *e que*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

Exercício 7.8 *Considere uma função mensurável e limitada* $f : X \to \mathbb{R}$ *e seja* $g \in \mathcal{L}$. *Mostre que* $fg \in \mathcal{L}$.

Exercício 7.9 *É verdade que* $f \in \mathcal{L}$ *implica em* $f^2 \in \mathcal{L}$?

Exercício 7.10 *Sejam* $f_1, f_2 \in \mathcal{L}$. *Mosre que*

$$\int_E f_1\, d\mu = \int_E f_2\, d\mu, \forall E \in \mathcal{A}$$

se, somente se, $f_1 = f_2$, *q.t.p.*

Exercício 7.11 *Considere o conjunto* $X = \mathbb{N}$, *a* σ*-álgebra* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *e a medida*

$$\mu(E) = \begin{cases} \#(E), & \text{se } E \text{ é finito} \\ \infty, & \text{se } E \text{ é infinito.} \end{cases}$$

Mostre que se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é integrável se, e somente se, se* $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$ *é absolutamente convergente. Neste caso, vale a igualdade*

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} f(j).$$

8 Espaços de Banach

Considere um espaço vetorial (complexo ou real) V. Uma norma sobre V é uma função $\mathcal{N} : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

(N1) $\mathcal{N}(u) \geq 0$, para todo $u \in V$;

(N2) $\mathcal{N}(u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$;

(N3) $\mathcal{N}(\lambda u) = |\lambda|\mathcal{N}(u)$, para toda constante λ e todo $u \in V$;

(N4) $\mathcal{N}(u+v) \leq \mathcal{N}(u) + \mathcal{N}(v)$, para todo $u, v \in V$.

O par $(V, \mathcal{N})$ é dito espaço normado. Neste caso, costuma-se utilizar a notação $\mathcal{N}(v) = \|v\|$.

Exemplo 8.1 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base. A função $\mathcal{N} : V \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\|v\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \right)^{1/2}$$

é uma norma em V, sendo $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$.

Exemplo 8.2 *Considere $\mathcal{C}[a,b]$ o espaço vetorial das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. A função $\mathcal{N} : V \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\mathcal{N}(f) = \max_{x \in [0,1]} \{|f(x)|\}.$$

é uma norma em $\mathcal{C}[a,b]$.

Exemplo 8.3 *Considere $\mathcal{C}[a,b]$ o espaço vetorial das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. A função $\mathcal{N} : V \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\mathcal{N}(f) = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

é uma norma em $\mathcal{C}[a,b]$.

Definição 8.1 *Considere $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência num espaço normado $(V, \mathcal{N})$.*

a) Dizemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $x \in V$ *se, para cada* $\epsilon > 0$ *existir* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tais que*

$$n \geq n_0 \implies \|x_n - x\| < \epsilon.$$

b) Dizemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy se , para cada* $\epsilon > 0$ *existir* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tais que*

$$n, m \geq n_0 \implies \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Teorema 8.1 *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: De fato, considere $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $(V, \mathcal{N})$ que converge para $x \in V$. Dado $\epsilon > 0$, considere $\epsilon' = \epsilon/2$. Para este ϵ' existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n \geq n_0 \implies \|x_n - x\| < \epsilon'. \tag{30}$$

Dados quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &= \|(x_n - x) - (x_m - x)\| \\ &\leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\|. \end{aligned}$$

Se for $m, m \geq n_0$, então

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\| \\ &< \epsilon' + \epsilon' = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

■

O próximo exemplo mostra que, em geral, a recíproca deste resultado não é válida.

Exemplo 8.4 *Considere* $\mathcal{P}[0,1]$ *o espaço de todos os polinômios reais* $P : [0,1] \to \mathbb{R}$*. A função* $\mathcal{N} : V \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\mathcal{N}(P) = \max_{x\in[0,1]}\{|P(x)|\}.$$

é uma norma em $\mathcal{P}[0,1]$*. Considere em* $\mathcal{P}[0,1]$ *a sequência* $\{P_n\}_{n\in N}$ *dada por*

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Se $m < n$*, então dado* $x \in [0,1]$*, temos*

$$|P_n(x) - P_m(x)| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!}$$

logo

$$\|P_n(x) - P_m\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Uma vez que $\lim_n \sum_{k=0}^{n} 1/k! = e$*, então* $\{P_n\}_{n\in N}$ *é de Cauchy. Entretanto, tal sequência converge para a função exponencial, a qual não é um polinômio.*

Definição 8.2 *Um espaço normado* $(V,\mathcal{N})$ *é dito completo, ou de Banach, se toda sequência de Cauchy é convergente.*

Exemplo 8.5 *Os espaços normados dos exemplos 8.1, 8.2 e 8.7 são de Banach.*

Definição 8.3 *Um produto interno num espaço vetorial (real ou complexo) é uma função* $\mathcal{P} : V \times V \to \mathbb{R}$ *(ou* $\mathcal{P} : V \times V \to \mathbb{C}$*) que satisfaz as seguintes propriedades:*

(P1) $\mathcal{P}(\alpha u + v, w) = \alpha\mathcal{P}(u, w) + \mathcal{P}(v, w)$, $u, v, w \in V$ *e toda constante* α*;*

(P2) $\mathcal{P}(u, u) \geq 0$, *valendo a igualdades se, e somente se,* $u = 0$*;*

(P3) $\mathcal{P}(u, v) = \overline{\mathcal{P}(v, u)}$, *para todo* $u, v \in V$*;*

Neste caso, escrevermos $mathcal P(u, v) = \langle u, v\rangle$

Exemplo 8.6 *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita e* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *uma base. A função* $\mathcal{P} : V \times V \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta_j}$$

define um produto interno sobre V*, sendo*

$$u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \quad e \quad v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j.$$

Exemplo 8.7 *No espaço* $\mathcal{C}[a, b]$ *temos o produto interno definida por*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Teorema 8.2 *Se* V *é um espaço com produto interno* $\langle\cdot, \cdot\rangle$*, então*

$$\|u\| \doteq \langle u, u\rangle^{1/2} \tag{31}$$

define uma norma sobre V*.*

Demonstração: Exercício. ∎

Exemplo 8.8 *No espaço $\mathcal{C}[a,b]$ temos o produto interno definida por*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx,$$

logo obtemos a norma

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

Observação 8.1 *Nem toda norma é oriunda de um produto interno. Pesquise sobre a* ***lei do paralelogramo****.*

Definição 8.4 *Um espaço com produto interno V é dito um espaço de Hilbert quando $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, sendo $\|\cdot\|$ definida por* (31).

8.1 Exercícios

Exercício 8.1 *Considere o espaço vetorial $\mathcal{F}[a,b]$ das funções limitadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. A função $\mathcal{N} : V \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)|\}$$

é uma norma em $\mathcal{F}[a,b]$?

Exercício 8.2 *Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}^1[a,b]$ das funções limitadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. A função $\mathcal{N} : V \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} \{|f'(x)|\}$$

é uma norma em $\mathcal{F}[a,b]$?

Exercício 8.3 *Demonstre o Teorema 8.2.*

Exercício 8.4 *(Desafiador...) Sejam $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ duas normas quaisquer em $\mathbb{R}^n$.*

a) Mostre que existem constantes positivas A e B, que só depende de n, tais que

$$A\mathcal{N}_2(u) \leq \mathcal{N}_1(u) \leq B\mathcal{N}_2(u), \forall u \in V. \tag{32}$$

b) Mostre que se $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_1)$ é de Banach, então $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_2)$ também o é.

c) Mostre que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N})$ é de Banach, seja qual for a norma $\mathcal{N}$.

Exercício 8.5 *(Desafiador...) Mostre que todo espaço vetorial normado de dimensão finita V é de Banach.*

Dicas:

- *os itens a), b) e c) do exercício anterior são válidos aqui também*
- *todo espaço vetorial de dimensão finita é isomorfo a $\mathbb{R}^n$;*
- *utilize a existência do isomorfismo acima para construir uma norma em V;*
- *Via tal isomorfismo, conclua que V é de Banach.*

9 Os espaços L^p

Comecemos observando que $\mathcal{L} = (X, \mathcal{A}, \mu)$ é um $\mathbb{R}$ espaço vetorial com as operações naturais

$$\mathcal{L} \times \mathcal{L} \ni (f, g) \mapsto f + g; \ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

e

$$\mathbb{R} \times \mathcal{L} \ni (\alpha, f) \mapsto \alpha f; \ (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Além disso, está bem definida a função $\mathcal{N}_\mu : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{N}_\mu(f) = \int_X |f| \, d\mu,$$

a qual satisfaz as propriedades

1. $\mathcal{N}_\mu(f) \geq 0$, para toda $f \in \mathcal{L}$;
2. $\mathcal{N}_\mu(\alpha f) = |\alpha| \mathcal{N}_\mu(f)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e toda$f \in \mathcal{L}$;
3. $\mathcal{N}_\mu(f + g) \leq \mathcal{N}_\mu(f) + \mathcal{N}_\mu(g)$, para todo $f, g \in \mathcal{L}$.

Note que $\mathcal{N}_\mu$ não define uma norma em $\mathcal{L}$, pois não é verdade que $\mathcal{N}_\mu(f) = 0$ implica em $f \equiv 0$. De fato, o que temos é o seguinte:

$$\mathcal{N}_\mu(f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \, \mu - q.t.p.$$

Para corrigir esta "falha", considere em $\mathcal{L}$ a relação de equivalência

$$f \sim g \doteq f = g \, \mu - q.t.p.$$

Para cada $f\mathcal{L}$, sua classe de equivalência é o conjunto

$$[f] \doteq \{g \in \mathcal{L}; \ f = g \, \mu - q.t.p.\}.$$

Podemos então introduzir o seguinte espaço de funções.

Definição 9.1 *O espaço de Lebesgue $L^1 = L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ consiste do conjunto de todas as relações de equivalência em $\mathcal{L}$ munido das operações usuais*

$$\alpha[f] \doteq [\alpha f] \quad e \quad [f] + [g] \doteq [f + g].$$

Teorema 9.1 *A função $\mathcal{N}_\mu : L^1 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\mathcal{N}_\mu([f]) \doteq \int_X |f| \, d\mu \tag{33}$$

está bem definida e é uma norma sobre L^1.

Demonstração: Exercício. ∎

Observação 9.1 *Devemos sempre ter em mente que os elementos de* L^1 *são classes de equivalências, ou seja, conjuntos. Entretanto, por abuso de notação, dada uma classe* $[f] \in L^1$ *utilizaremos as expressões* $f \in L^1$*, ou* f *é uma função em* L^1*. Em particular, utilizaremos as notações*

$$\mathcal{N}_\mu([f]) = \mathcal{N}_\mu(f) = \|f\|_1.$$

Definição 9.2 *Dado* $1 \leq p < \infty$ *defini-se por* $L^p = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ *o conjunto de todas as classes de equivalência* $[f]$*, tais que* f *é mensurável e*

$$|f|^p \in \mathcal{L}.$$

Tal conjunto é dito espaço de Lebesgue das funções p-integráveis, o qual é uma espaço vetorial com as operações usuais

$$\alpha[f] \doteq [\alpha f] \quad e \quad [f] + [g] \doteq [f + g].$$

Para cada classe $[f] \in L^p$ *associa-se o número real*

$$\|f\|_p \doteq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}. \tag{34}$$

Teorema 9.2 (Desigualdade de Hölder) *Sejam* $f \in L^p$ *e* $g \in L^q$ *tais que* $p > 1$ *e* $1/p + 1/q = 1$*. Nestas condições, temos* $fg \in L^1$ *e vale*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q. \tag{35}$$

Demonstração: Considere $1 < \alpha < 1$ e a função

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha, \; t \geq 0.$$

Utilizando o teorema do valor médio é possível[8] mostrar que $\varphi(t) = 1$ se, e somente se, $t = 1$. Além disso, mostra-se que

$$t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha), \; t \geq 0.$$

Dados $a \geq 0$ e $b > 0$ obtemos, para $t = a/b$, a desigualdade

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq a\alpha + (1 - \alpha)b, \tag{36}$$

valendo a igualdade apenas quando $a = b$.

Em particular, se p e q são como no enunciado, então, para $\alpha = 1/p$, segue de (36) que

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \tag{37}$$

Assim, dados dois números rais $A \geq 0$ e $B > 0$ obtemos de (37) que

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}. \tag{38}$$

[8]Verifique!!!

Finalmente, sejam f e g como no enunciado, com $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$. Para cada $x \in X$, ponha

$$A_x = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \text{ e } B_x = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}.$$

Segue de (38) que

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}, \ \forall x \in X. \tag{39}$$

Observe que o produto fg é mensurável, uma vez que ambas as funções o são. O lado direito de (39) é integrável. Logo, temos do Corolário 7.1 que fg é integrável. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\int_X \left(\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \right) d\mu &\leq \int_X \left(\frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q} \right) d\mu \\
&= \int_X \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p}\, d\mu + \int_X \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}\, d\mu \\
&= \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int_X |f(x)|^p\, d\mu + \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int_X |g(x)|^q\, d\mu \\
&= \frac{\|f\|_p^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_q^q}{p\|f\|_p^p} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_X \left(\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \right) d\mu &= \frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q} \int_X |f(x)g(x)| d\mu \\
&= \frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q}.
\end{aligned}$$

Combinando essas duas estimativas chaga-se em (35).

■

Observação 9.2 *A desigualdade de Hölder o produto de uma função em L^p por uma em L^q resulta numa função integrável, quando $p > 1$ e $1/p + 1/q$. Neste caso, diz-se que p e q são índices conjugados.*

Teorema 9.3 (Desigualdade de Cauchy-Bundyakovskii-Schwarz) *Sejam $f, g \in L^2$. Então, fg é integrável e vale*

$$\left| \int_X fg\, d\mu \right| \leq \int_X |fg|\, d\mu \leq \|f\|_2\|g\|_2 \tag{40}$$

Demonstração: Segue da desigualdade de Hölder para $p = q = 1/2$. ■

Teorema 9.4 (Desigualdade de Minkowski) *Sejam $f, g \in L^p$, $p \geq 1$. Então, $f+g \in L^p$ e*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{41}$$

Demonstração: O caso $p = 1$ já está feito, logo podemos assumir $p > 1$. Note então que

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}.$$

Por Hölder, temos

$$\int_X f(f+g)^{p-1}\, d\mu \leq \left(\int_X f^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X (f+g)^{p-1} q\, d\mu\right)^{1/q}, \tag{42}$$

bem como

$$\int_X g(f+g)^{p-1}\, d\mu \leq \left(\int_X g^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X (f+g)^{p-1} q\, d\mu\right)^{1/q}. \tag{43}$$

Somando (42) e (43) temos

$$\int_X (f+g)^p\, d\mu \leq \left[\int_X (f+g)^p\, d\mu\right]^{1/q} \left[\left(\int_X f^p\, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p\, d\mu\right)^{1/p}\right], \tag{44}$$

uma vez que $(p-1)q = p$.

Dividindo (43) por $\left[\int_X (f+g)^p\, d\mu\right]^{1/q}$ chega-se

$$\left[\int_X (f+g)^p\, d\mu \leq\right]^{1-1/q} \leq \left(\int_X f^p\, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p\, d\mu\right)^{1/p}.$$

Mas, $1 - 1/q = 1/p$, logo

$$\left[\int_X (f+g)^p\, d\mu \leq\right]^{1/p} \leq \left(\int_X f^p\, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p\, d\mu\right)^{1/p},$$

o que prova o resultado.

■

Corolário 9.1 *O número $\|\cdot\|_p$ dado em (34) define uma norma em L^p.*

Demonstração: Exercício. ■

Teorema 9.5 *O espaço L^p é uma espaço de Banach com respeito a norma $\|\cdot\|_p$, para cada $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Considere $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ uma sequência de Cauchy. Por definição, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $m, n \geq n_0$ implica em

$$\int_X |f_m - f_n|^p\, d\mu = \|f_m - f_n\|_p^p < \epsilon^p. \tag{45}$$

Segue disto que podemos obter uma subsequência $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}$ tal que

$$\|g_{k+1} - g_k\|_p < 2^{-k}, \ k \in \mathbb{N}. \tag{46}$$

Considere a função $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$g(x) = |g_1(x)| + \lim_n \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|,$$

a qual pertence a $\mathbb{M}^+(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Pelo Lema de Fatou, temos que

$$\int_X |g|^p \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \left\{ \int_X \left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \right)^p d\mu \right\}$$

Agora, aplicando Minkowski, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_X |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} &\le \liminf_{n\to\infty} \left\{ \|g_1\|_p + \sum_{k=1}^{n} \|g_{k+1} - g_k\|_p \right\} \\ &\le \|g_1\|_p + 1. \end{aligned}$$

Portanto, se $E = \{x \in X; g(x) < \infty\}$, então $E \in \mathcal{A}$ e $\mu(X \setminus E) = 0$. Assim, a série que define g converge μ-q.t.p.. Em particular, temos também que $g\chi_E \in L^p$.

Defina então a função $f : X \to \mathbb{R}$, pondo

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } \ x \in E, \\ 0, & \text{se } \ x \notin E. \end{cases}$$

Note que $|g_k| \le \sum_{j=k}^{\infty} |g_{j+1} - g_j| \le g$ e ainda $g_k \to f$, q.t.p. Portanto, segue do Teorema da Convergência Dominada que $f \in L^p$.

Uma vez que $|f - g_k|^p \le 2^p g^p$, então novamente pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$0 = \lim \|f - g_k\|_p,$$

donde segue que g_k converge para f com relação norma de L^p.

Segue de (46) que se $m \ge n_0$ e k é suficientemente grande, então

$$\int_X |f_m - g_k|^p \, d\mu \le \epsilon^p.$$

Pelo lema de Fatou,

$$\int_X |f_m - f|^p \, d\mu \le \liminf_k \int_X |f_m - g_k|^p \, d\mu < \epsilon^p,$$

para todo $m \ge n_0$. Portanto, a sequência $\{f_n\}$ converge para f em L^p.

$\blacksquare$

9.1 Exercícios

Exercício 9.1 *Demonstre o teorema 9.1.*

Exercício 9.2 *Sejam $f \in L^1$ e $\epsilon > 0$. Mostre que existe uma função φ mensurável e simples tal que*

$$\|f - \varphi\|_1 \leq \epsilon.$$

Exercício 9.3 *Demonstre o Corolário 9.1.*

Exercício 9.4 *Mostre que*

$$\langle f, g \rangle = \int_X f g \, d\mu$$

define um produto interno em L^2. Conclua que L^2 é um espaço de Hilbert quando munido com tal produto interno.

10 O espaço L^2

Neste capítulo investigamos algumas propriedades do espaços L^2, ou seja, o espaço das classes de equivalência $[f]$, tais que f é mensurável e

$$|f|^2 \in \mathcal{L},$$

ou ainda,

$$\int_X |f|^2 \, d\mu < \infty.$$

Segue do Exercício 9.4 que $(L^2, \langle \cdot, \rangle)$ é um espaço de Hilbert, com

$$\langle f, g \rangle = \int_X fg \, d\mu,$$

e

$$\|f\|_{L^2} = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_X |f|^2 \, d\mu \right)^{1/2}.$$

Nesta seção iremos admitir funções $f : X \to \mathbb{C}$. Em particular, o produto interno em L^2 assume a forma

$$\langle f, g \rangle = \int_X f\overline{g} \, d\mu,$$

sendo que $\overline{g}$ indica o complexo conjugado da função g.
Demonstração: Consequência do Teorema (9.3). ■

O resultado abaixo diz que o conjunto da funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ é denso em $L^2([a, b])$.

Teorema 10.1 *Seja $f \in L^2([a, b])$. Dado $\epsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{C}([a, b])$ tais que*

$$\|f - g\|_{L^2} < \epsilon.$$

Demonstração: Veja o Teorema 11.38 em [4]. ■

Definição 10.1 *Uma sequência de funções $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2$ é dito **ortonormal** se*

$$\int_X \varphi_n \overline{\varphi}_m \, d\mu = \begin{cases} 0, & se \quad m \neq n, \\ 1, & se \quad m = n. \end{cases}$$

Considere então uma sequência ortonormal $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2$ e seja $f \in L^2$. Definimos os números

$$c_n = \int_X f\overline{\varphi}_n \, d\mu, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para indicar que c_n são os coeficientes de f, com respeito a $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, iremos utilizar a notação

$$f \approx \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \varphi_n.$$

Neste ponto, enfatizamos que não estamos assumindo qualquer tipo de convergência no lado esquerdo da expressão acima.

10.1 Generalizações dos cursos de equações diferencias

O próximo resultado, conhecido como identidade de Parseval, estende técnicas apresentadas nos cursos básicos de equações diferenciais.

Teorema 10.2 *Considere $f \in L^2([-\pi, \pi])$ e suponha*

$$f \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Denotando $S_j = \sum_{n=-j}^{j} c_n e^{inx}$, obtem-se

$$\lim_{n \to \infty} \|f - S_n\|_{L^2} = 0.$$

Além disso, temos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \, d\mu.$$

Demonstração: Ver Teorema 11.40 em [4]. ∎

Corolário 10.1 *Se $f \in L^2([-\pi, \pi])$ é tal que $\int_{-\pi}^{\pi} f e^{-inx} \, d\mu = 0$, para todo n, então $\|f\|_{L^2} = 0$.*

É interessante observar que, deste resultado, podemos afirmar o seguinte: se

$$f \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

e

$$g \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

então $f = g$, q.t.p.

10.2 Os resultados acima em espaços X quaisquer

Teorema 10.3 *Sejam $\{\varphi_n\}$ uma sequência ortonormal em L^2 e $\{c_n\}$ uma sequência de números complexos tais que $\sum_n |c_n|^2 < \infty$. Defina a sequência*

$$S_n = c_1 \varphi_1 + \ldots + c_n \varphi_n.$$

Nestas condições, existe $f \in L^2$ tal que s_n converge para f, na norma de L^2. Mais ainda,

$$f \approx \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \varphi_n.$$

Demonstração: Ver Teorema 11.43 em [4]. ∎

Definição 10.2 *Um sequência ortonormal $\{\varphi_n\}$ é dita completa se*

$$\int_X f\overline{\varphi}_n \, d\mu = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

então $\|f\|_{L^2} = 0$.

Teorema 10.4 *Seja $\{\varphi_n\}$ uma sequência ortonormal completa. Se $f \in L^2$ é tal que*

$$f \approx \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \varphi_n,$$

então

$$\int_X |f|^2 \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2.$$

Demonstração: Ver Teorema 11.45 em [4]. ∎

Finalmente, podemos concluir o seguinte: combinando os Teoremas 10.3 e 10.4 temos que toda sequência ortonormal induz uma correspondência biunívoca entre funções em L^2 com sequências numéricas $\{c_n\}_n$ tais que $\sum |c_n|^2 < \infty$.

Mais do que isso, a representação

$$f \approx \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \varphi_n,$$

indica que L^2 pode ser visto como um espaço euclidiano de dimensão infinita, no qual c_n são as coordenadas e φ_n é uma "base".

A Conjuntos

Não será foco deste curso uma discussão formal sobre o conceito de *conjunto*. Para nossos fins a seguinte definição, dada por George Cantor (1845-1918), será suficiente:

Chama-se ***conjunto*** *o agrupamento num todo de objetos, bem definidos e discerníveis, de nossa percepção ou de nosso entendimento, chamados os elementos do conjunto.*

Ao longo desta disciplina (bem como ao longo do curso de matemática) estudam-se vários tipos de conjuntos como, por exemplo, os numéricos, de pontos, de curvas, de funções, de triângulos, etc. Alguns exemplos são:

(a) Os conjuntos[9] numéricos:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{Z} &= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{Q} &= \{p/q;\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\} \\
\mathbb{I} &= \{\text{números irracionais}\} \\
\mathbb{R} &= \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \\
\mathbb{C} &= \{z = a + ib;\ a, b \in \mathbb{R};\ i^2 = -1\}
\end{aligned}
$$

(b) Conjunto das funções polinomiais, das funções trigonométricas;

(c) Gráficos de funções;

(d) Retas, planos, esferas;

Tendo como base a definição dada por Cantor iremos sempre assumir o seguinte: um conjunto A é formado por seus elementos e iremos dizer qualquer um de seus elementos pertence a ele. Neste sentido, temos as notações:

$$
\begin{aligned}
x \in A &\doteq x \ \text{ é um elemento (ou pertence) ao conjunto } \ A. \\
x \notin A &\doteq x \ \text{ não é um elemento (ou não pertence) ao conjunto } \ A.
\end{aligned}
$$

Neste ponto, defini-se o conjunto vazio, denotado por $\emptyset$, o qual não possui nenhum elemento.[10]

Para ilustrar o uso das notações acima, considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\} \ \text{ e } \ C = \{9, 10\}. \tag{47}$$

Podemos então afirmar que

- $1 \in A$, $2 \in A$, $7 \in A$ e $9 \in A$;

[9] Veja que várias das igualdades abaixo não tem nenhum rigor matemático...

[10] Observe que estamos, neste ponto, contrariando o que estávamos assumindo: um conjunto A é formado por seus elementos...

- $1 \in B$ e $7 \in B$;
- $9 \in C$ e $10 \in C$;

Com respeito ao exemplo acima destacamos os seguintes fatos:

(i) Note que todos os elementos de B são também elementos de A;

(ii) Existem elementos de A que não são elementos de B;

(iii) Os conjuntos B e C não possuem elementos comuns.

Com base nestas observações introduzimos os seguintes conceitos:

Definição A.1 *Sejam A e B dois conjuntos.*

(i) Dizemos que B é subconjunto de A (notação $B \subset A$) quando todo elemento de B for elemento de A;

(ii) Dizemos que B é subconjunto próprio de A (notação $B \subsetneq A$) quando $B \subset A$ e existe pelo menos um $x \in A$ tal que $x \notin B$;

(iii) Dizemos que os conjuntos A e B são iguais quando $A \subset B$ e $B \subset A$. Neste caso, escreve-se $A = B$. Em particular, escrevemos $A \subseteq B$ para indicar que A é subconjunto de B, ou igual a B.

Enfatizamos os seguintes fatos:

a) A definição de igualdade de conjuntos, apesar de ser muito intuitiva e, aparentemente, trivial fornece uma importante *ferramenta* para a demonstração de alguns resultados. Vamos explorar este assunto mais adiante.

b) Convém ressaltar que, tão importante quanto entender quando um conjunto A é subconjunto de um conjunto B, é entender quando essa propriedade falha: *A não está contido em B, quando existe alguma elemento de A que não é elemento de B.* Em símbolos:
$$A \not\subset B \doteq \exists x \in A;\ x \notin B.$$

c) Note que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto.

Exemplo A.1 *Se A, B e C são os conjuntos em* (47)*, então:*

- *$B \subsetneq A$;*
- *$A \neq B$;*

Exemplo A.2 *Considerando o conjunto $A = \{0, 2, \{3, 7\}\}$ temos:*

- $0 \in A$;
- $3 \notin A$;
- $\{3,7\} \in A$;
- $\{\{3,7\}\} \subset A$;
- $\{2\} \subset A$;
- $7 \notin A$;
- $\{0,2\} \subset A$;
- $\{3\} \not\subset A$;

Definição A.2 *Sejam A e B dois conjuntos tais que $A \subseteq B$. Defini-se o complementar de A, com respeito ao conjunto B, como sendo os elementos de B que não estão em A. Utilizaremos as notações $B - A$, ou A^C. Assim, temos:*

$$A^C = B - A = \{x \in B, \quad \text{tais que} \quad x \notin A\}$$

Exemplo A.3

- *Se $A = \{1,2\}$ e $B = \{1,2,3,4\}$, então $A^C = \{3,4\}$.*
- *Se $A = \{1,2\}$ e $B = \{1,2\}$, então $A^C = \emptyset$.*

Exercício A.1 *Considere o conjunto $A = \{1,3,5,7,11\}$. Determine quais das afirmações abaixo são falsas e quais são verdadeiras.*

(a) $1 \in A$

(b) $2 \in A$

(c) $7 \notin A$

(d) $11 \in A$

(e) $\{1\} \in A$

(f) $\{1,3,4\} \subset A$

(g) $\{1,3\} \cap \{3,5,7\} \subset A$

(h) $4 \subset A$

(i) $\emptyset \subset A$

Exercício A.2 *Considere os conjuntos*

$$A = \{1,2,3\} \quad e \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

(a) Verifique se são falsas ou verdadeiras as seguintes afirmações:

(a_1) $2 \in A$;

(a_2) $11 \in A$;

(a_3) $1 \in \mathcal{P}(A)$;

(a_4) $\{1,3\} \subset A$;

(a_5) $\{2,3\} \in \mathcal{P}(A)$;

(a_6) $\{1,3\} \in A$;

Exercício A.3 *Considere os conjuntos*

- $A = \{1,2,3,4,5\}$,
- $B = \{2,3,4\}$,
- $C = \{2,4,5\}$.

Determine quais das afirmações abaixo são falsas e quais são verdadeiras.

(a) $A \subset B$

(b) $A \subset C$

(c) $B \subset A$

(d) $B \subset C$

(e) $C \subset A$

(f) $C \subset B$

(g) $C \subset C$

(h) $\emptyset \subset B$

A.1 União e Interseção

Dados dois conjuntos A e B, a reunião (ou união) o novo conjunto, denotado por $A \cup B$, que contém todos os elementos de A e todos os elementos B. Em símbolos:

$$A \cup B = \{x, \quad \text{tais que} \quad x \in A, \quad \text{ou} \quad x \in B\} \tag{48}$$

Por sua vez, a interseção de A e B é conjunto, denotado por $A \cap B$, que contém os elementos comuns a A e B. Em símbolos:

$$A \cap B = \{x, \quad \text{tais que} \quad x \in A, \quad \text{e} \quad x \in B\}. \tag{49}$$

Exemplo A.4 *Sejam A, B e C os conjuntos $A = \{1, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 7, 10\}$ e $C = \{8, 10\}$.*

- $A \cup B = \{1, 5, 7, 9, 10\}$;
- $A \cap B = \{1, 7\}$;
- $B \cup C = \{1, 7, 8, 10\}$;
- $B \cap C = \{10\}$;

Proposição A.1 *As seguintes afirmações são verdadeiras para quaisquer subconjuntos A, B e C de um conjunto U.*

(a) $(A \cap B) \subset A$

(b) $A \subset (A \cup B)$

(c) $A \subset B$ *e* $B \subset C \implies A \subset C$

(d) $(A \cup B) = (A \cap B) \iff A = B$

(e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(f) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(g) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(h) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Demonstração:

(a) Pela definição de inclusão devemos provar que qualquer elemento do conjunto $A \cap B$ é também um elemento do conjunto A. Considere então $x \in A \cap B$. Segue de (49) que $x \in A$ e $x \in B$, logo

$$x \in A \cap B \implies x \in A \implies A \cap B \subset A.$$

(b) Para verificar este item devemos mostrar que todo elemento de A é um elemento de $A \cup B$. Para tanto, dado $x \in A$ segue de (48) que $x \in A \cup B$.

(c) Exercício.

(d) Este é um resultado do tipo **se e somente se**, ou seja, devemos provar duas afirmações:

(i) $(A \cup B) = (A \cap B) \implies A = B$;

(ii) $A = B \implies (A \cup B) = (A \cap B)$;

Para provar (i) devemos assumir que vale a igualdade $(A \cup B) = (A \cap B)$ e provar que $A = B$, ou seja, demonstar que $A \subset B$ e $B \subset A$.

Considere então $x \in A$. Segue do item (b) que $x \in A \cup B$, mas pela hipótese $(A \cup B) = (A \cap B)$ temos

$$x \in A \subset A \cup B = A \cap B,$$

então $x \in A \cap B$ e pela definição de interseção obtemos $x \in B$, portanto $A \subset B$.

Para provar que $B \subset A$ podemos seguir as mesmas ideias, pois para $x \in B$ temos

$$x \in B \subset A \cup B = A \cap B,$$

concluindo então a prova da afirmação (i).

A demonstração da afirmação (ii) segue dos seguintes fatos:

$$A = B \implies A \cup B = A \cup A = A$$

e

$$A = B \implies A \cap B = A \cap A = A$$

Assim, $A \cup B = A = A \cap B$, logo fica conluida a prova do item (d).

(e) Exercício.

(f) Exercício.

(g) Para provar a igualdade destes conjuntos devemos verificar as duas inclusões

(i) $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$

(ii) $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$

Para verificar (i) note que se $x \in (A \cup B)^C$, então $x \notin A \cup B$, logo x não pode ser elemento de A e não pode ser elemento de B. Temos então $x \notin A$ e $x \notin B$, ou seja, $x \in A^C$ e $x \in B^C$. Mostramos então que

$$x \in (A \cup B)^C \implies x \in A^C \cap B^C$$

Agora, se $x \in A^C \cap B^C$ então $x \notin A$ e $x \notin B$, logo $x \notin A \cup B$ e portanto $x \in (A \cup B)^C$, o que conclui a prova de (ii).

(h) Exercício.

■

Exercício A.4 *Dados os conjuntos*

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{2, 4, 6, 8\} \quad C = \{3, 4, 5, 6\},$$

determine:

- $A \cap B$ *e* $A \cup B$
- $A \cap C$ *e* $A \cup C$
- $B \cap C$ *e* $B \cup C$
- $(A \cap B) \cap C$ *e* $A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C$ *e* $A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cup C$ *e* $A \cap (B \cup C)$

Exercício A.5 *Considere o conjunto universo* $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *e os subconjuntos*

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 5\}, \quad Y = \{1, 2, 3\} \quad e \quad Z = \{4, 6, 8\}.$$

Determine:

- X^C, Y^C *e* Z^C
- $X^C \cap X$ *e* $X^C \cup X$
- $X \cap Y$, $X \cap Z$ *e* $Y \cap Z$
- $(X \cup Y)^C$ *e* $X^C \cup Y^C$
- $(X \cap Y)^C$ *e* $X^C \cap Y^C$
- $(X \cap Z)^C$ *e* $X^C \cap Z^C$

A.2 Produto cartesiano

Seja $\{x, y\}$ um conjunto, cujos elementos podem ou não ser distintos. Para estes elementos definimos dois novos elementos, chamados de pares ordenados, indicados por (x, y) e (y, x). Dado um outro par ordenado (x', y') definimos

$$(x, y) = (x', y') \text{ se, e somente se, } x = x' \text{ e } y = y'$$

Definição A.3 *Dados dois conjuntos não vazios* A *e* B *definimos o produto cartesiano (notação* $A \times B$*) de* A *por* B *como sendo o conjunto de todos os pares ordenados* (x, y) *tais que* $x \in A$ *e* $y \in B$*. Simbolicamente:*

$$A \times B = \{(x, y);\ x \in A \quad e \quad y \in B\}$$

Exemplo A.5 *Com respeito aos conjuntos* $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$ *e* $C = \{0\}$ *temos:*

(a) $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$ *(b)* $A \times C = \{(a, 0), (b, 0)\}$

Observação A.1 *É interessante notar que o produto cartesiano não é comutativo, ou seja, nem sempre vale a igualdade* $A \times B = B \times A$*. De fato, basta considerar o produto de conjuntos distintos.*

Exercício A.6 *Determine os elementos dos seguintes produtos cartesianos:*

- $\{1\} \times \{1, 2\}$
- $\{1, 2\} \times \{a, b, c\}$
- $\{0, 1\} \times \{3, 4\}$
- $\{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\}$
- $\{0, 2\} \times \{0, 2\}$
- $\{\{1, 2\}, \{3\}\} \times \{\{5\}, \{6\}\}$

Exercício A.7 *Considere os conjuntos* $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 3\}$ *e* $C = \{3, 4\}$. *Determine:*

- $A \times (B \cup C)$
- $(A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C)$
- $(A \times B) \cap (A \times C)$

Exercício A.8 *Prove as seguintes afirmações:*

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$*;*

(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$*;*

(c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$*;*

(d) $A \subset A', B \subset B' \Rightarrow A \times B \subset A' \times B'$*;*

A.3 Relação de equivalência

Nesta seção introduziremos a noção de um elemento a de um conjunto A estar relacionado a um elemento b de um conjunto B, o que iremos denotar por $a\mathcal{R}b$. Note que a notação $a\mathcal{R}b$ exibe os elementos a e b justamente como a notação (a, b) para um elemento do cartesiano $A \times B$. Tal comparação nos leva a seguinte definição.

Definição A.4 *Uma relação entre os conjuntos* A *e* B *é um subconjunto* $\mathcal{R}$ *de* $A \times B$. *Neste caso, lês-se* $(a, b) \in \mathcal{R}$ *como* a *está relacionado com* b *e utilizamos a notação* $a\mathcal{R}b$.

Exemplo A.6 *Considere* A *um conjunto e o produto cartesiano* $A \times A$. *Uma relação de* A *com* A *é o conjunto*

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A; x = y\},$$

ou seja, $\Delta = \{(x, x); x \in A\}$. *Em particular, note que se* $x \neq y$, *então* $(x, y) \neq \mathcal{R}$. *Logo, tal relação nada mais é do que a relação de igualdade entre elementos.*

Observação A.2 *Uma relação entre um conjunto* A *e ele mesmo será chamada de* ***relação em*** A.

Exemplo A.7 *O conjunto*

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ pq = 0\}$$

define uma relação de $\mathbb{Z}$. *Em particular, note que se* $p, q \in \mathbb{Z}$, *então*

$$p\mathcal{R}q \iff pq = 0.$$

Exemplo A.8 *O conjunto*

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y = 2\pi m,\ \textit{para algum } m \in \mathbb{Z}\}$$

é uma relação de $\mathbb{R}$. *Em particular, note que se* $x, y \in \mathbb{R}$, *então*

$$x\mathcal{R}y \iff \exists m \in \mathbb{Z};\ x - y = 2\pi m.$$

Definição A.5 *Uma partição de um conjunto A é uma decomposição deste em subconjuntos tais que cada elemento de A pertence a apenas um destes subconjuntos. Tais subconjuntos são chamados de células.*

Exemplo A.9 *a) O intervalo $I = [1, 2] \subset \mathbb{R}$ pode ser escrito como*

$$I = [1, 1/2) \cup [1/2, 2]$$

b) O conjunto $\mathbb{N}$ pode ser particionado como

$$\mathbb{N} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j, \quad \textit{sendo} \quad E_j = \{j\}.$$

Note que uma partição sobre um conjunto A define, de forma natural, uma relação $\mathcal{R}$ sobre A, a saber: dados $x, y \in A$ ponha

$$x\mathcal{R}y \doteq x \text{ e } y \text{ pertencem a mesma célula.} \tag{50}$$

Note que tal relação satisfaz as seguintes propriedades:

- $x\mathcal{R}x$, para qualquer $x \in A$;
- se $x\mathcal{R}y$, então $y\mathcal{R}x$;
- se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, então $x\mathcal{R}z$.

Relações que satisfazem tais propriedades são de grande interesse, logo introduzimos o seguinte conceito:

Definição A.6 (Relação de Equivalência) *Uma relação $\mathcal{R}$ num conjunto A é dita **relação de equivalência** quando satisfaz as seguintes propriedades:*

(reflexiva) *$x\mathcal{R}x$, para todo $x \in A$;*

(simétrica) *se $x\mathcal{R}y$, então $y\mathcal{R}x$;*

(transitiva) *se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, então $x\mathcal{R}z$.*

Para uma relação de equivalência iremos utilizar a notação $x \sim y$, ao invés de $x\mathcal{R}y$.

Exemplo A.10 *Em $\mathbb{R}$ temos a relação de equivalência*

$$x \sim y \doteq \ \exists m \in \mathbb{Z}; \ x - y = 2\pi m.$$

De fato, note que se $x \in \mathbb{R}$, então $x - x = 0 = 2\pi\, 0$, logo $x \sim x$. Se $x \sim y$, então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x - y = 2\pi m \Longrightarrow y - x = 2\pi(-m),$$

logo $y \sim x$, pois $-m \in \mathbb{Z}$.

Finalmente, suponha $x \sim y$, $y \sim z$ e sejam $m, k \in \mathbb{Z}$ tais que

$$x - y = 2\pi m \quad e \quad y - z = 2\pi k.$$

Note que

$$\begin{aligned} x - z &= x - z + y - y = (x - y) + (y - z) \\ &= 2\pi m + 2\pi k \\ &= 2\pi(m + k). \end{aligned}$$

Como $m + k \in \mathbb{Z}$, então $x \sim z$.

Exemplo A.11 *Considere X um conjunto e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto de suas partes, ou seja,*

$$\mathcal{P}(X) = \{A;\ A \subset X\}$$

Em $\mathcal{P}(X)$ temos que a relação

$$A\mathcal{R}B \doteq A \subset B.$$

não é de equivalência.

Exemplo A.12 (Para aqueles que já tem noção de limites de sequências) *Considere Γ o conjunto de todas as sequências de números reais. Dadas duas sequências*

$$X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad e \quad Y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

podemos definir a seguinte relação de equivalência em Γ:

$$X \sim Y \doteq \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n.$$

Exercício A.9 *Seja A um conjunto no qual está fixada uma partição. Mostre que a relação (50) é de equivalência.*

Definição A.7 (Classe de equivalência) *Considere uma relação de equivalência $\sim$ em um conjunto A. Dado $x \in A$, sua classe de equivalência é, por definição, o conjunto*

$$[x] \doteq \{y \in A;\ x \sim y\}.$$

Os elementos de $[x]$ serão chamados de ***representantes*** *da classe. O conjunto de todas as classes de equivalências, geradas por $\sim$, é chamado de conjunto quociente e será denotado por $A\,/\sim$. Assim,*

$$A\,/\sim \doteq \{[x];\ x \in A\}.$$

Lema A.1 *Considere uma relação de equivalência $\sim$ em um conjunto A. Então, são válidas as seguintes afirmações:*

i) $[x] \neq \emptyset$, *para qualquer* $x \in A$;

ii) *se* $a, b \in [x]$, *então* $a \sim b$;

iii) *Se* $a \in [x]$, *então* $[x] = [a]$;

iv) *Dados* $x, y \in A$, *então* $[x] = [y]$, *ou* $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Demonstração: Note que $x \sim x$, para todo $x \in A$, logo $x \in [x]$, portanto $[x] \neq \emptyset$. Assim, fica provada a parte i).

Para verificar ii), considere $a, b \in [x]$. Então,

$$x \sim a \ \text{ e } \ x \sim b.$$

Como $x \sim a$ implica em $a \sim x$ (por simetria), logo (por transitividade) $a \sim b$.

Verifiquemos agora a afirmação iii). Para tanto, sejam $b \in [a]$ e $a \in [x]$. Por definição, temos

$$x \sim a \ \text{ e } \ a \sim b,$$

portanto (transitividade) $x \sim b$, logo $b \in [x]$, ou seja, $[a] \subset [x]$. Um raciocínio análogo mostra que $[x] \subset [a]$, portanto $[x] = [a]$.

Finalmente, demonstremos a parte vi), o que equivale a provar o seguinte:

$$\text{se } [x] \cap [y] \neq \emptyset, \text{ então } [x] = [y].$$

Considere então $z \in [x] \cap [y]$. Por definição, temos:

$$(I)\ x \sim z \text{ e } \ (II)\ y \sim z$$

Dado $w \in [x]$, temos $w \sim x$. Utilizando (I) e a propriedade transitiva, obtemos $w \sim z$. Assim, segue, de (II) e da propriedade transitiva, que $y \sim w$. Portanto, $w \sim [y]$, logo $[x] \subset [y]$. Um raciocínio análogo nos dá $[y] \subset [x]$, o que implica em $[x] = [y]$.

■

A.4 Exercícios

Exercício A.10 *Mostre que* $A/\sim$ *é uma partição de* A.

Exercício A.11 *Considere* X *um conjunto e* $\mathcal{P}(X)$ *o conjunto de suas partes. Defina em* $\mathcal{P}(X)$ *a seguinte relação:*

$$A \sim B \doteq \textit{ existe uma função bijetiva } f : A \to B.$$

a) *Mostre que* $\sim$ *é uma relação de equivalência em* $\mathcal{P}(X)$.

b) *Supondo* $X = \mathbb{R}$, *mostre que* $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

Exercício A.12 *Dado um número natural* n *defina a seguinte relação em* $\mathbb{Z}$:

$$r \sim s \doteq r - s \ \textit{ é divisível por } n,$$

ou seja, existe $q \in \mathbb{Z}$ *tal que* $r - s = nq$.

a) Mostre que $\sim$ é de equivalência.

b) Fixado n, qual é a classe do zero?

c) Se $n = 2$, então o que significa $[x] \cap [y] = \emptyset$? E quanto a $[x] \cap [y] \neq \emptyset$?

Exercício A.13 *Construa exemplos de conjuntos A, B e C que não satisfazem as seguintes afirmações:*

(a) Se $A \cap B = \emptyset$ e $B \cap C = \emptyset$, então $A \cap C = \emptyset$;

(b) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \cap B \neq \emptyset$;

(c) Se $A \cap B \subset C$, então $A \subset C$;

Exercício A.14 *Dê um exemplo de conjuntos A, B e C tais que $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$.*

Exercício A.15 *Sejam a e b dois números pertencentes conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Determine a interseção dos conjuntos*

$$M(a) = \{a, 2a, 3a, \ldots\} \quad e \quad M(b) = \{b, 2b, 3b, \ldots\}.$$

Exercício A.16 *Sejam $A, B \subset E$. Prove que:*

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c,$$
$$A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B.$$

Exercício A.17 *Dados $A, B \subset E$, prove que $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B^c = \emptyset$.*

Exercício A.18 *Se $A, X \subset E$ são tais que $A \cap X = \emptyset$ e $A \cup X = E$, então $X = A^c$.*

Exercício A.19 *Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X, tais que $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$. Mostre que se Y é um outro subconjunto de X, então $Y \subseteq A$, ou $Y \subseteq B$.*

Exercício A.20 *Sejam X_1, X_2, Y_1, Y_2 subconjuntos de um conjunto W tais que*

$$X_1 \cup X_2 = W, \; Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, \; X_1 \subset Y_1 \quad e \quad X_2 \subset Y_2.$$

Mostre que $X_1 = Y_1$ e $X_2 = Y_2$.

Exercício A.21 *Dada uma família de conjuntos $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ defina*

$$F_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i, \quad para\ cada \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que se $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$, para todo $n \geqslant n_0$.

Exercício A.22 *Sejam L e M dois conjuntos de índices e duas famílias de conjuntos $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$, $\{B_\mu\}_{\mu\in M}$,*

$$\{A_\lambda \cup B_\mu\}_{(\lambda,\mu)\in L\times M} \quad e \quad \{A_\lambda \cap B_\mu\}_{(\lambda,\mu)\in L\times M}.$$

(a) Exiba um exemplo para o caso em que L e M são finitos;

(b) Exiba um exemplo para o caso em que L e M são infinitos;

(c) Prove as seguintes igualdades

$$\left(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\right) \bigcap \left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$$

$$\left(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda\right) \bigcup \left(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cup B_\mu)$$

Exercício A.23 *Seja $\{A_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times N}$ uma família de conjuntos com índices em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Exiba uma demonstração, ou um contra-exemplo, para a seguinte igualdade:*

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{i,j}\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}\right)$$

Exercício A.24 *Dada uma sequência de conjuntos $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$, considere os conjuntos*

$$\limsup A_n \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \quad e \quad \liminf A_n \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right).$$

(a) Prove que $\limsup A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A_n para uma infinidade de valores de n;

(b) Prove que $\liminf A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a todo A_n, salvo para uma quantidade finita de de valores de n;

(c) Prove que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$;

(d) Se $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n, então

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i.$$

(e) Se $A_{n+1} \subset A_n$ para todo n, então

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i.$$

(f) Exiba um exemplo em que $\liminf A_n \neq \limsup A_n$;

Exercício A.25 *Para cada elemento $n \in \mathbb{N}$ defina $A_n = \{(n+1)k,\ \forall k \in \mathbb{N}\}$.*

(a) Determine $A_1 \times A_2$;

(b) Determine

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad e \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

B Funções

Neste capítulo estudaremos funções e suas propriedades básicas. Comecemos com a seguinte definição (pouco intuitiva):

Definição B.1 *Sejam A e B dois conjuntos, com $A \neq \emptyset$. Dizemos que uma relação f entre A e B é uma **função** se, a cada elemento $a \in A$ existe um único elemento $b \in B$ tais que $(a, b) \in f$. Neste caso, escreve-se $b \doteq f(a)$.*

Enfatizamos os seguintes fatos sobre uma função f entre A e B:

i) se $(a, b) \in f$, então escrevemos $b \doteq f(a)$ e dizemos que b é a imagem de a pela função f;

ii) utilizamos a notação $f : A \to B$;

iii) o conjunto A é dito domínio de f, enquanto que B é dito contra-domínio de f.

Exemplo B.1 *Considere as seguintes relações de R em R:*

$$f = \{(x, y); y = 3x + 2\} \quad e \quad g = \{(x, y); x^2 = y^2\}.$$

- *Note que f é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pois se $(x, y_1) \in f$ e $(x, y_2) \in f$, então $y_1 = y_2$.*
- *Por outro lado, g não é uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De fato, note que $(1, 1) \in g$, bem como $(1, -1) \in g$.*

Teorema B.1 *Se f e g são duas funções entre A e B, então*

$$f = g \iff f(x) = g(x), \ \forall x \in A. \tag{51}$$

Demonstração: De fato, suponha $f = g$. Por definição, temos

$$f \subset A \times B \quad \text{e} \quad g \subset A \times B.$$

Dado $x \in A$, considere $y \in B$ tal que $y = f(x)$, donde $(x, y) \in f$. Uma vez que $f = g$, então $f \subset G$, logo $(x, y) \in g$. Portanto, devemos ter $y = g(x)$ e assim $f(x) = y = g(x)$. Desta forma, fica demonstrado que

$$f = g \implies f(x) = g(x), \ \forall x \in A.$$

Verifiquemos agora a outra implicação. Assim, assuma que

$$f(x) = g(x), \ \forall x \in A.$$

Desta igualda temos que $x \in A$ implica em

$$(x, f(x)) = (x, g(x)).$$

Como $(x, f(x)) \in f$, então $(x, g(x)) \in g$, logo $f \subset g$. De modo análogo, temos $g \subset f$ e assim temos $f = g$.

$\blacksquare$

Observação B.1 *Note que a definição dada acima é pouco intuitiva e menos ainda aplicável para estudarmos funções e suas propriedades. De modo mais prático, podemos considerar uma função $f : A \to B$ como um trio:*

a) O domínio A;

b) O contra-domínio B;

c) Uma regra f que, a cada $x \in A$, associa um ***único*** *$b \in B$, o qual denota-se por $b = f(a)$.*

Está será a ***definição*** *que estaremos utilizando no decorrer deste curso. Em particular, podemos dizer que duas funções $f, g : A \to B$ são iguais quado $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$.*

Definição B.2 *Sejam $f : A \to B$ uma função, $X \subset A \neq \emptyset$ e $Y \subset B$ um conjunto não vazio.*

a) A imagem direta de X por f é o conjunto

$$f(X) = \{y \in B;\ y = f(x), \quad \text{para algum} \ \ x \in X\}. \tag{52}$$

b) A imagem inversa de Y por f é o conjunto

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A;\ f(x) \in Y\}. \tag{53}$$

Exemplo B.2 *Considere $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Neste caso, note que $f^{-1}(\{1\})$ coincide com a circunferência centrada na origem e de raio 1.*

Exemplo B.3 *Uma reta que tem equação $ax + by = c$ é o conjunto de pontos*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ ax + by = c\}.$$

Note que tomando $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = ax + by$ obtemos

$$R = f^{-1}\{c\}.$$

Observação B.2

- *Note que $f(X)$ é um subconjunto de B. Em particular, quando $X = A$, dizemos que $f(A)$ é a* ***imagem*** *da função f, a qual é indicada por $Im(f)$.*
- *Por outro lado, $f^{-1}(Y)$ é um subconjunto de A, o qual pode ser vazio.*

Exercício B.1 *Considere $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ e $f : A \to B$ dada por $f(n) = n + 1$. Determine* *(a)* $f(A)$;

(b) $f(\{1,3\})$

(c) $f(1)$;

(d) $f^{-1}(\{2,4,6\})$;

(e) $f^{-1}(\{5\})$;

(f) $f^{-1}(\{2,4,6,8,9,10\})$.

Exercício B.2 *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Determine:

(a) $f(\mathbb{Q})$;

(b) $f(\mathbb{Q}^C)$;

(c) $f^{-1}(\{0\})$;

(d) $f([0,1])$; *Aqui,* $[0,1]$ *indica o intervalo de 0 a 1, contendo estes extremos.*

(e) $f^{-1}([4,5))$; *Aqui,* $[4,5)$ *indica o intervalo de* 4 *a* 5*, contendo* 4*, mas não o* 5.

Definição B.3 (Função identidade) *Dado um conjunto não vazio* X *defini-se a função identidade* $I : X \to X$ *pondo* $I(x) = x$.

Definição B.4 (Restrição) *Dados uma função* $f : X \to Y$ *e um conjunto não vazio* $A \subset X$ *defini-se a função* $f|_A : A \to Y$ *pondo* $f|_A(x) = f(x)$.

Definição B.5 *O gráfico de uma função* $f : A \to B$ *é o subconjunto* $G_f \subset A \times B$ *definido por*

$$G_f = \{(x,y) \in A \times B;\ y = f(x)\}.$$

Exercício B.3 *Esboce o gráfico da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x$. *Esboce o gráfico da função* f *quando esta é restrita ao conjunto* $\mathbb{Z}$.

Definição B.6 *Uma função* $f : A \to B$ *é dita*

i) *injetiva se* $x, y \in A$ *são tais que* $f(x) = f(y)$, *então* $x = y$.

ii) *sobrejetiva se* $Im(f) = B$.

iii) *bijetiva se é injetiva e sobrejetiva.*

Exemplo B.4 *A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $f(x) = x^2$ *não é injetiva, pois* $f(-1) = f(1)$. *Tal função também não é sobrejetiva, pois não existe* $x \in \mathbb{Z}$ *tal que* $f(x) = -4$.

Exemplo B.5 *A função* $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $g(x) = 3x + 1$ *é injetiva, mas não sobrejetiva. De fato, suponha* $x, w \in \mathbb{Z}$ *tais que* $g(x) = g(w)$. *Segue da definição de* g *que* $3x + 1 = 3w + 1$, *donde* $x = w$. *Assim,* g *é injetiva. Para verificar que* g *não é sobre, basta notar que não existe* $x \in \mathbb{Z}$ *tal que* $g(x) = 0$.

Teorema B.2 *Suponha* $f : A \to B$ *uma função bijetiva. Então, existe uma função bijetiva* $g : B \to A$ *que satisfaz a seguinte propriedade:*

$$f(x) = y \iff x = g(y). \tag{54}$$

Demonstração: Exercício. ■

B.1 Composição de funções

Definição B.7 *Sejam* $f : A \to B$ *e* $g : X \to Y$ *duas funções tais que*

$$Im(f) \subset X.$$

Nestas condições, defini-se a função $g \circ f : A \to Y$ *pondo*

$$(g \circ f)(x) \doteq g(f(x)).$$

Dizemos que $g \circ f$ *é a função composta das funções* g *e* f.

Observação B.3 *Note que nem sempre é verdade que* $g \circ f = f \circ g$. *De fato, mesmo que exista* $g \circ f$, *nada garante a existência de* $f \circ g$. *Por outro lado, é sempre verdade que*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),$$

supondo válida as composições.

Definição B.8 *A inversa de uma função* $f : A \to B$, *quando existe, é uma função* $g : B \to A$ *tal que*

$$(g \circ f)(x) = x, \ \forall x \in A \tag{55}$$

e

$$(f \circ g)(y) = y, \ \forall y \in B. \tag{56}$$

Neste caso, utiliza-se a notação $g = f^{-1}$.

Teorema B.3 *Uma função $f : A \to B$ é inversível se, e somente se, é bijetiva.*

Demonstração: Suponha $f : A \to B$ é inversível. Para verificar que f é injetiva, considere $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Note então que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Mas, por (55), temos

$$g(f(x_1)) = x_1 \ \text{ e } \ g(f(x_2)) = x_2,$$

logo $x_1 = x_2$.

Para demonstrar a sobrejetividade, tome $y \in B$. Definindo $x = g(y)$, obtemos de (56) que

$$f(x) = f(g(y)) = y.$$

A demonstração da recíproca é consequência imediata do Teorema B.2.

■

B.2 Exercícios

Exercício B.4 *As funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x$ são iguais? Explique.*

Exercício B.5 *Considere as seguintes definições a respeito de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

- *f é dita uma função **par** se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*
- *f é dita uma função **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

a) Mostre que $f(x) = x^2$ é par.

b) Mostre que $f(x) = x^3$ é ímpar.

c) Exiba uma função que não é par e nem ímpar.

d) Mostre que qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar.

Exercício B.6 *As funções f e g, cujas regras são dadas respectivamente por*

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad e \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

podem ser iguais? Explique.

Exercício B.7 *Demonstre o Teorema B.2.*

Exercício B.8 *Considere uma função $f : A \to B$. Mostre que a função $g : A \to Im(f)$, dada por $g(x) = f(x)$ é sobrejetiva.*

Exercício B.9 *Dados conjuntos A e B, suponha que existam funções injetivas $f : A \to B$ e $g : B \to A$. Prove que existe uma bijeção $h : A \to B$.*

Exercício B.10 *Considere em* $\mathbb{R}^2$ *as seguintes operações:*

$$(x,y)+(w,z)=(x+w,y+z) \quad e \quad \alpha\cdot(x,y)=(\alpha x,\alpha y),\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Suponha $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *uma função não nula que satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $f(\alpha(x,y))=\alpha f(x,y)$;

ii) $f((x,y)+(w,z))=f(x,y)+f(w,z)$.

Mostre que f *é injetiva se, e somente se,* $f(x,y)=(0,0)$ *implica em* $(x,y)=(0,0)$.

Exercício B.11 *Sejam* X *um conjunto e* $A\subset X$ *um subconjunto. Defina a função* $\chi_A:X\to\mathbb{R}$ *pondo*

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & se\ \ x\in A,\\ 0, & se\ \ x\notin A.\end{cases}$$

Mostre que:

a) se $A,B\subset X$, *então* $\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B$;

b) se $A,B\subset X$, *então*

$$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B;$$

c) $\chi_{A^C}=1-\chi_A$.

Exercício B.12 *Sejam* X *um conjunto não vazio e* $\mathcal{P}(X)$ *o conjunto de suas partes. Defina em* $\mathcal{P}(X)$ *a seguinte relação:*

$$A\sim B \ \doteq\ \text{existe uma função bijetiva}\ \ f:A\to B.$$

Mostre que $\sim$ *é uma relação de equivalência.*

Exercício B.13 *Considere* $f:A\to B$ *uma função sobrejetiva e defina em* A *a seguinte relação:*

$$x\sim y\ \doteq\ f(x)=f(y).$$

a) Mostre que $\sim$ *é uma relação de equivalência.*

b) Se f *é injetiva, então quantos elementos temos numa classe* $[x]$*?*

c) Defina $X=A/\sim$. *Mostre que a função* $F:X\to B$ *dada por*

$$F([x])=f(x)$$

está bem definida, isto é, independe da escolha do representante x *de* $[x]$.

d) Mostre que a função F *é bijetiva.*

Exercício B.14 *Considere uma função* $f:X\to Y$, *conjuntos* $A\subset X$ *e* $B\subset Y$.

(a) Mostre que $f[f^{-1}[B]]\subset B$ *e* $f^{-1}[f[A]]\supset A$;;

(b) Mostre um exemplo onde não vale $f[f^{-1}[B]]=B$, *ou* $f^{-1}[f[A]]=A$;

(c) Mostre que se f é sobrejetiva, então $f[f^{-1}[B]] = B$.

Exercício B.15 *Considere um conjunto A e uma coleção de subconjuntos $\{A_\lambda\}_{\lambda\in M}$, sendo M um conjunto de índices. Dada uma função $f : A \to B$, mostre que:*

(a) $f\left[\bigcup_{\lambda\in M} A_\lambda\right] = \bigcup_{\lambda\in M} f[A_\lambda]$;

(b) $f\left[\bigcap_{\lambda\in M} A_\lambda\right] \subset \bigcap_{\lambda\in M} f[A_\lambda]$;

(c) Obtenha um exemplo em que $f[\bigcap_{\lambda\in M} A_\lambda] \neq \bigcap_{\lambda\in M} f[A_\lambda]$;

Supondo $\{B_\mu\}_{\mu\in L}$ uma coleção de subconjunto de B, para uma família de índices L. Mostre que:

(d) $f^{-1}\left[\bigcup_{\lambda\in M} B_\mu\right] = \bigcup_{\lambda\in M} f^{-1}[B_\mu]$;

(f) $f^{-1}\left[\bigcap_{\lambda\in M} B_\mu\right] = \bigcap_{\lambda\in M} f^{-1}[B_\mu]$;

C Supremo e ínfimo

Neste capítulo iremos rever (aprender), de forma bem resumida, sobre supremo e ínfimo de subconjuntos em $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$). Uma discussão mais profunda (e muito bem escrita) pode ser vista na referência [4].

Um número real α é dito uma cota inferior de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se

$$\alpha \leq x, \ \forall x \in A.$$

Por outro lado, um número real β é dito uma cota superior de A se

$$x \leq \beta, \ \forall x \in A.$$

O seguinte resultado pode ser encontrado na referência [4].

Teorema C.1 *Todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ que é limitado inferiormente possui cota inferior. Analogamente, todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ que é limitado superiormente possui cota superior.*

Definição C.1 *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto qualquer. Dizemos que $\alpha \in \mathbb{R}$ é o ínfimo de A quando α é a maior das cotas inferiores de A, isto é,*

$$\gamma \leq x, \forall x \in A, \Longrightarrow \gamma \leq \alpha.$$

Por outro lado, dizemos que $\beta \in \mathbb{R}$ é o supremo de A quando β é a menor das cotas superiores de A, isto é,

$$x \leq \gamma, \forall x \in A, \Longrightarrow \beta \leq \gamma.$$

Utilizaremos as notações

$$\alpha = \inf A \quad e \quad \beta = \sup A.$$

Observação C.1 ***É extremamente importante notar que, mesmo existindo*** $\inf A$***, ou*** $\sup A$***, pode ocorrer*** $\inf A \notin A$ ***e*** $\sup A \notin A$***. Veja o exemplo abaixo***

Exemplo C.1 *Tomando $A = (-1, 2) \subset \mathbb{R}$ temos*

$$\inf A = -1 \notin A \quad e \quad \sup A = 2 \notin A$$

Teorema C.2 *Todo subconjunto limitado inferiormente em $\mathbb{R}$ possui ínfimo. Analogamente, todo subconjunto limitado superiormente em $\mathbb{R}$ possui supremo.*

Demonstração: Exercício. ∎

Proposição C.1 *Considere um subconjunto, não vazio, $A \subset \mathbb{R}$.*

a) Se $\alpha = \inf A$, então dado $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in A$ tal que $\alpha \leq x_\epsilon < \alpha + \epsilon$.

b) Se $\beta = \sup A$, então dado $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in A$ tal que $\beta - \epsilon < x_\epsilon \leq \beta$.

c) Se $\alpha = \inf A$, então existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha.$$

d) Se $\beta = \sup A$, então existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha.$$

Demonstração: Exercício. ■

C.1 Supremo e ínfimo em $\overline{\mathbb{R}}$

Para introduzirmos a ideia de supremo e ínfimo em $\overline{\mathbb{R}}$ note, inicialmente, que

$$-\infty < x < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Segue disto que **todo subconjunto de** $\overline{\mathbb{R}}$ possui, pelo menos, uma cota inferior e uma superior em $\overline{\mathbb{R}}$, a saber, $-\infty$ e $+\infty$, respectivamente. Assim, se $A \subset \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente, então

$$\sup_{\overline{\mathbb{R}}} = +\infty.$$

De modo análogo, se $A \subset \mathbb{R}$ é ilimitado inferiormente, então

$$\inf_{\overline{\mathbb{R}}} = -\infty.$$

Concluindo, iremos admitir que $+\infty$ pode ser o supremo de um conjunto na reta estendida, bem como, $-\infty$ pode ser o ínfimo de um conjunto. Não iremos sobrecarregar as notações e, portanto, continuaremos a escrever $\inf A$ e $\sup A$.

Em particular, temos o seguinte:

a) Se $S \subset \overline{\mathbb{R}}$ e $\inf S = +\infty$, então $S \subseteq \{+\infty\}$;

b) Se $S \subset \overline{\mathbb{R}}$ e $\sup S = -\infty$, então $S = \{-\infty\}$, ou $S = \emptyset$;

c) Se $S \subset \overline{\mathbb{R}}$ e $\sup S = +\infty$, então S não possui cota superior em $\mathbb{R}$;

d) Se $S \subset \overline{\mathbb{R}}$ e $\inf S = -\infty$, então S não possui cota inferior em $\mathbb{R}$;

C.2 Supremo e ínfimo de funções

Uma das aplicações de supremo e ínfimo que temos interesse é quando estudamos estes conceitos sobre funções. Para tanto, considere um conjunto X, uma função $f : X \to \mathbb{R}$ e seja

$$f(X) = \{f(x);\ x \in X\} \subset \mathbb{R}$$

Assim, podemos definir:

$$\inf_{x \in X} f \doteq \inf f(X),$$

caso exista $\inf f(X)$. De modo análogo,

$$\sup_{x \in X} f \doteq \sup f(X),$$

caso exista $\sup f(X)$.

Note então que se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada[11], isto é, existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in X$, então existem $\inf_{x\in X} f$ e $\sup_{x \in X} f$.

Finalmente, observe que se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, então

$$f(X) = \{f(x);\ x \in X\} \subset \overline{\mathbb{R}}.$$

Neste caso, se $f(X)$ é ilimitado inferiormente em $\mathbb{R}$, então

$$\inf_{x \in X} f = -\infty.$$

Analogamente, se $f(X)$ é ilimitado superiormente em $\mathbb{R}$, então

$$\sup_{x \in X} f = +\infty.$$

C.3 Limi-sup e limi-inf de conjuntos

Considere uma sequência de conjuntos $A_1, A_2, \dots A_n, \dots,$. Definimos então:

$$\limsup A_n \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) \quad \text{e} \quad \liminf A_n \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right).$$

Proposição C.2 *Sejam $\{A_n\}$, $\limsup A_n$ e $\liminf A_n$ como acima. Temos então:*

(a) $\limsup A_n$ *é o conjunto dos elementos que pertencem a A_n para uma infinidade de valores de n;*

(b) $\liminf A_n$ *é o conjunto dos elementos que pertencem a todo A_n, salvo para uma quantidade finita de de valores de n;*

[11] Se f for apenas limitada inferiormente, $m \leq f(x),\ \forall x \in X$, então existe $\inf_{x \in X} f$. De modo análogo, existe $\sup_{x\in X} f$ se f é apenas limitada superiormente

(c) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$;

(d) se $A_n \subset A_{n+1}$ *para todo* n, *então*

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_n.$$

(e) Se $A_{n+1} \subset A_n$ *para todo* n, *então*

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_n.$$

C.4 Exercícios

Exercício C.1 *(Desafiador...) Demonstre o Teorema C.1.*

Exercício C.2 *(Desafiador...) Demonstre o Teorema C.2.*

Exercício C.3 *Sejam* A *e* B *subconjuntos limitados de* $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que $A \cup B$ *é limitado;*

(b) Mostre que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$;

Exercício C.4 *Sejam* A *um subconjunto limitado de* $\mathbb{R}$ *e* $A_0 \subset A$, *não vazio. Mostre que*

$$\inf(A) \leqslant \inf(A_0) \leqslant \sup(A_0) \leqslant \sup(A)$$

Exercício C.5 *Mostre que se* $A \subset \mathbb{R}$ *contém uma de suas cotas superiores, então esta cota superior é o supremo de* A;

Exercício C.6 *Sejam* A *e* B *subconjuntos limitados e não vazios de* $\mathbb{R}$ *e defina*

$$A + B \doteq \{a + b, \ \forall a \in A \quad e \quad b \in B\}$$

(a) Mostre que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$;

(b) Mostre que $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$;

Exercício C.7 *Sejam* A *e* B *subconjuntos limitados e não vazios de* $\mathbb{R}$ *e defina*

$$A \cdot B \doteq \{a \cdot b, \ \forall a \in A \quad e \quad b \in B\}$$

(a) Se $A, B \subset \mathbb{R}^+$, *mostre que* $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$;

(b) Se $A, B \subset \mathbb{R}^-$, *mostre que* $\sup(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B)$;

(c) Se $A \subset \mathbb{R}^+$ *e* $B \subset \mathbb{R}^-$, *mostre que* $\inf(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \inf(B)$;

Exercício C.8 *Sejam X um conjunto não vazio e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função com $Im(f)$ um conjunto limitado. Dado $a \in \mathbb{R}$ mostre que*

$$\sup\{a + f(x);\ x \in X\} = a + \sup\{f(x);\ x \in X\}$$
$$\inf\{a + f(x);\ x \in X\} = a + \inf\{f(x);\ x \in X\}$$

Exercício C.9 *Sejam X um conjunto não vazio e $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções com $Im(f)$ e $Im(g)$ limitados. Mostre que*

$$\sup\{f(x) + g(x);\ x \in X\} \leqslant \sup\{f(x);\ x \in X\} + \sup\{g(x);\ x \in X\}$$
$$\inf\{f(x) + g(x);\ x \in X\} \geqslant \inf\{f(x);\ x \in X\} + \inf\{g(x);\ x \in X\}$$

Exercício C.10 *Exiba um exemplo no qual*

$$\liminf A_n \neq \limsup A_n.$$

Referências

[1] BARTLE, R., Elements of Integration. John Wiley Sons, 1966.

[2] ROYDEN, Real Analysis. MacMillan Pub., 1963.

[3] RUDIN, W., Real and Complex Analysis. Mc-Graw Hill, 1966.

[4] RUDIN, W., Principles of Mathematical Analysis. Mc-Graw Hill, 1976.

[5] TAUSK, D. V; Notas Para o Curso de Medida e Integração `https://www.ime.usp.br/~tausk/texts/NotasMedida.pdf`.

[6] GELFERT, K., Introdução a Medida e Integração (Notas de curso); `http://www.im.ufrj.br/~gelfert/cursos/MAA371/2018-2-MedInt.pdf`