# MATE 7010
# Equações Diferenciais Ordinárias
# S1 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

## APRESENTAÇÃO DO CURSO

**Ementa:** Existência e unicidade de soluções, dependência contínua dos parâmetros e dos dados iniciais, domínio máximo das soluções. Sistemas de equações lineares. Estabilidade, funções de Lyapunov, sistemas autônomos. Teorema de Poincaré-Bendixson e aplicações.

## Apresentação do curso

**Ementa:** Existência e unicidade de soluções, dependência contínua dos parâmetros e dos dados iniciais, domínio máximo das soluções. Sistemas de equações lineares. Estabilidade, funções de Lyapunov, sistemas autônomos. Teorema de Poincaré-Bendixson e aplicações.

**Critérios de avaliação:** Listas, provas e um projeto.

## Apresentação do curso

**Ementa:** Existência e unicidade de soluções, dependência contínua dos parâmetros e dos dados iniciais, domínio máximo das soluções. Sistemas de equações lineares. Estabilidade, funções de Lyapunov, sistemas autônomos. Teorema de Poincaré-Bendixson e aplicações.

**Critérios de avaliação:** Listas, provas e um projeto.

**Sobre o projeto:** Cada aluno escolherá um dentre os seguintes tópicos (capítulos do livro do Smale) e deverá preparar um texto (mínimo de 5 páginas) e também um seminário ($\pm 30$ minutos) que explore algum item discutido no capítulo selecionado.

- CHAPTER 7; Nonlinear Systems
- CHAPTER 8; Equilibria in Nonlinear Systems
- CHAPTER 9; Global Nonlinear Techniques
- CHAPTER 11; Applications in Biology
- CHAPTER 12; Applications in Circuit Theory
- CHAPTER 13; Applications in Mechanics
- CHAPTER 14; The Lorenz System
- CHAPTER 15; Discrete Dynamical Systems

## PRÉ-REQUISITOS (INFORMALMENTE)

(MATE - 7003) ÁLGEBRA LINEAR AVANÇADA:

- Autovalores e autovetores;
- Diagonalização;
- Forma canônica de Jordan.

(MATE - 7086) ANÁLISE NO $\mathbb{R}^N$ :

- Normas;
- Topologia (abertos, fechados, compactos, etc...)
- Funções contínuas;
- Diferenciabilidade.

# Plano

| Programa | Conteúdo |
|---|---|
| Parte I | Existência e unicidade de soluções |
| Parte II | Dependência contínua das condições iniciais e diferenciabilidade do fluxo |
| Parte III | Soluções de sistemas lineares e plano de fase |
| Parte IV | Teoria qualitativa: estabilidade |

## BIBLIOGRAFIA


- Hirsch, M. W., Smale, S., Devaney, R. L., Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, 2da ed., 2004.
- Sotomayor, J., Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- Doering, C. I., Lopes, A. O., Equações Diferenciais Ordinárias, IMPA, 2016.

## Referências por partes

- Parte I

1. Smale: Capítulo 17
2. Sotomayor: Capítulos I
3. Lopes: Capítulos, 8, 9 e 10.

- Parte II

1. Smale: Capítulo 17
2. Sotomayor: Capítulos II e VI.2
3. Lopes: Capítulos 10.3 e 10.4

- Parte III

1. Smale: Capítulos 2, 3, 4 e 6
2. Sotomayor: Capítulo III
3. Lopes: Capítulos 1 e 2

- Parte IV

1. Smale: Capítulo 10
2. Sotomayor: Capítulos VII e VIII
3. Lopes: Capítulo 5 e 6

## Equações diferenciais

- Nosso interesse neste curso é, em essência estudar as propriedades das soluções do problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

no qual $f = f(t,x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$ e $x : I \to \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo $t_0$.

# Equações diferenciais

- Nosso interesse neste curso é, em essência estudar as propriedades das soluções do problema
$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$
no qual $f = f(t, x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$ e $x : I \to \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo $t_0$.

## Os principais problemas:

- Existe solução para o P.V.I. (1)?

# Equações diferenciais

- Nosso interesse neste curso é, em essência estudar as propriedades das soluções do problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

no qual $f = f(t, x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$ e $x : I \to \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo $t_0$.

## Os principais problemas:

- Existe solução para o P.V.I. (1)?
- Se existe, é única? Qual a dependência em relação às condições iniciais?

## Equações diferenciais

- Nosso interesse neste curso é, em essência estudar as propriedades das soluções do problema
$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$
no qual $f = f(t,x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$ e $x : I \to \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo $t_0$.

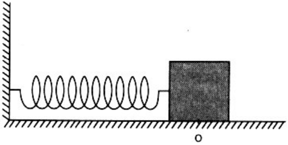
### Os principais problemas:

- Existe solução para o P.V.I. (1)?
- Se existe, é única? Qual a dependência em relação às condições iniciais?
- Qual o comportamento dessas soluções? Por exemplo, no caso

$$f(t,x) = A \cdot x(t), \; A = [a_{i,j}]_{n \times n}.$$

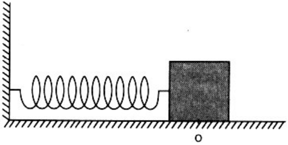
# O Oscilador Harmônico

- Considere uma mola (massa desprezível) onde está presa uma partícula de massa $m > 0$ em uma de suas extremidades e a outra é fixada numa parede. Suponha que em repouso a partícula permaneça sobre a origem e uma vez que entre em movimento ela se desloca de forma retilínea sobre uma superfície plana e horizontal, como indica a figura abaixo.



## O Oscilador Harmônico

- Considere uma mola (massa desprezível) onde está presa uma partícula de massa $m > 0$ em uma de suas extremidades e a outra é fixada numa parede. Suponha que em repouso a partícula permaneça sobre a origem e uma vez que entre em movimento ela se desloca de forma retilínea sobre uma superfície plana e horizontal, como indica a figura abaixo.




- Suponha também que a partícula esteja em movimento.
- Nosso propósito é determinar uma função $x = x(t)$ que indique a posição da partícula num instante $t \geq 0$.
- Se tal função existe e possui "boas"propriedades, então sabemos por experiências nas disciplinas de cálculo que as funções $x'(t)$ e $x''(t)$ indicam a velocidade e a aceleração, respectivamente, da partícula em cada instante $t$.

- Considere que neste sistema existam uma força de atrito $F_a$ entre a superfície e a partícula descrita por $F_a(t) = -\eta x'(t)$, sendo $\eta \geq 0$ o coeficiente de atrito independente do tempo e também uma força externa $F_e$, dependente do tempo. Suponha que $k > 0$ seja a constante da mola.

- Considere que neste sistema existam uma força de atrito $F_a$ entre a superfície e a partícula descrita por $F_a(t) = -\eta x'(t)$, sendo $\eta \geq 0$ o coeficiente de atrito independente do tempo e também uma força externa $F_e$, dependente do tempo. Suponha que $k > 0$ seja a constante da mola.
- Nestas condições podemos combinar a **Segunda Lei de Newton** com a **Lei de Hooke** para mostrar que a função $x = x(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária:

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t), \tag{2}$$

sendo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad a = \frac{\eta}{m} \geq 0 \text{ e } h(t) = \frac{F_e(t)}{m}.$$

- Considere que neste sistema existam uma força de atrito $F_a$ entre a superfície e a partícula descrita por $F_a(t) = -\eta x'(t)$, sendo $\eta \geq 0$ o coeficiente de atrito independente do tempo e também uma força externa $F_e$, dependente do tempo. Suponha que $k > 0$ seja a constante da mola.
- Nestas condições podemos combinar a **Segunda Lei de Newton** com a **Lei de Hooke** para mostrar que a função $x = x(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária:

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t), \tag{2}$$

sendo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad a = \frac{\eta}{m} \geq 0 \text{ e } h(t) = \frac{F_e(t)}{m}.$$

**PROPOSTA:**

- Fazer um estudo da equação (2) dividindo nos casos em que existe e não existe atrito entre a partícula e a superfície. (Por simplicidade, vamos supor $h = h(t) \equiv 0$).

## AUSÊNCIA DE ATRITO

- Suponha então $\eta = 0$, de modo que a equação (2) se reduz a

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{3}$$

## Ausência de atrito

- Suponha então $\eta = 0$, de modo que a equação (2) se reduz a
$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{3}$$
- Considere também as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$.

## Ausência de atrito

- Suponha então $\eta = 0$, de modo que a equação (2) se reduz a

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{3}$$

- Considere também as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$.

### Temos então o P.V.I.

$$\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

cuja única solução é

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t).$$

- Podemos observar graficamente como se comportam simultaneamente tais funções, no seguinte sentido: Defina $y(t) = x'(t)$, então temos a seguinte equação planar:

$$(x(t), y(t)) = x_0(\cos(\omega t), -\omega sen(\omega t)).$$

- Podemos observar graficamente como se comportam simultaneamente tais funções, no seguinte sentido: Defina $y(t) = x'(t)$, então temos a seguinte equação planar:

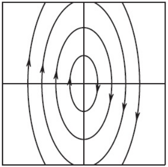
$$(x(t), y(t)) = x_0(\cos(\omega t), -\omega sen(\omega t)).$$

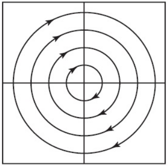
- Considerando agora a norma Euclidiana em $\mathbb{R}^2$, temos para cada $t \geq 0$:

$$\|(x(t), y(t))\|^2 = x_0^2[\cos^2(\omega t) + \omega^2 sen^2(\omega t)].$$

## ASSIM:

- Temos uma **trajetória** elíptica, em particular para $\omega = 1$ temos uma circunferência. Observe que independentemente da escolha das condições iniciais podemos obter as mesmas conclusões e então obter o **retrato de fase** determinado pela figura:





# NA PRESENÇA DE ATRITO

- Suponha agora $\eta > 0$ e que $0 < a < \omega$. Assim, a equação (2) se reduz a

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{5}$$

## Na presença de atrito

- Suponha agora $\eta > 0$ e que $0 < a < \omega$. Assim, a equação (2) se reduz a
$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{5}$$
- Considere também as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$.

## Na presença de atrito

- Suponha agora $\eta > 0$ e que $0 < a < \omega$. Assim, a equação (2) se reduz a
$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{5}$$
- Considere também as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$.

### Temos então o P.V.I.

$$\begin{cases} x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = 0., \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = 0, \end{cases} , \tag{6}$$

cuja única solução é
$$x(t) = e^{-at} x_0 \cos(\omega t).$$

- Definindo então $y(t) = x'(t)$, segue que
$$(x(t), y(t)) = e^{-at}x_0(\cos(\omega t), -a\cos(\omega t) - \omega sen(\omega t)).$$

- Definindo então $y(t) = x'(t)$, segue que
$$(x(t), y(t)) = e^{-at}x_0(\cos(\omega t), -a\cos(\omega t) - \omega sen(\omega t)).$$
- Neste caso,
$$||(x(t), y(t))||^2 = e^{-2at}x_0^2[(1 + a^2)\cos^2(\omega t) + \omega^2 sen^2(\omega t) + a\omega sen(\omega t)],$$

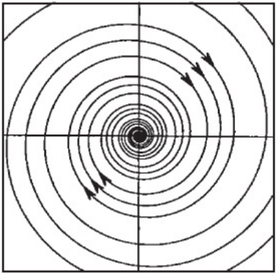
donde
$$\lim_{t\to\infty} ||(x(t), y(t))|| = 0$$

- Definindo então $y(t) = x'(t)$, segue que
$$(x(t), y(t)) = e^{-at}x_0(\cos(\omega t), -a\cos(\omega t) - \omega sen(\omega t)).$$
- Neste caso,
$$||(x(t), y(t))||^2 = e^{-2at}x_0^2[(1 + a^2)\cos^2(\omega t) + \omega^2 sen^2(\omega t) + a\omega sen(\omega t)],$$

donde
$$\lim_{t\to\infty} ||(x(t), y(t))|| = 0$$

## Assim:

- Assim, temos **trajetórias** em espirais que convergem para zero, sendo que o **retrato de fase** é determinado pela figura:



## Uma bela observação...

- Note que a equação
$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t), \tag{7}$$
equivale ao sistema
$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -2ay(t) - \omega^2 x(t) + h(t) \end{cases},$$
com $y(t) = x'(t)$. Ou ainda,
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

## UMA BELA OBSERVAÇÃO...

- Note que a equação
$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t), \tag{7}$$
equivale ao sistema
$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -2ay(t) - \omega^2 x(t) + h(t) \end{cases},$$
com $y(t) = x'(t)$. Ou ainda,
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

- Assim, as discussões sobre a equação diferencial (7) recaem sobre propriedades da matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix}.$$

## Uma bela observação...

- Note que a equação
$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t), \tag{7}$$
equivale ao sistema
$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -2ay(t) - \omega^2 x(t) + h(t) \end{cases},$$
com $y(t) = x'(t)$. Ou ainda,
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}. \tag{8}$$
- Assim, as discussões sobre a equação diferencial (7) recaem sobre propriedades da matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix}.$$
- De fato, o relevante será a configuração do autovalores de $A$.

## DE MODO GERAL...

- Veremos que uma E.D.O. de ordem $n$, com coeficientes constantes, da forma

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t),$$

pode ser estudada pelo sistema

$$X'(t) = AX(t) + b(t),$$

sendo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ e } b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.$$