

MATE 7010

Equações Diferenciais Ordinárias

S1 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



18 DE ABRIL

Aula de hoje: Atratores Lineares

TEOREMA

Seja $A \in M(n)$ uma matriz qualquer. Cada coordenada de qualquer solução de $x' = Ax$ é uma combinação linear das funções

$$t \mapsto t^j e^{at} \cos(bt) \text{ e } t \mapsto t^j e^{at} \sin(bt)$$

com $0 \leq j \leq n - 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda = a + ib$ é um autovalor de A .

TEOREMA

Seja $A \in M(n)$ uma matriz qualquer. Cada coordenada de qualquer solução de $x' = Ax$ é uma combinação linear das funções

$$t \mapsto t^j e^{at} \cos(bt) \text{ e } t \mapsto t^j e^{at} \sin(bt)$$

com $0 \leq j \leq n - 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda = a + ib$ é um autovalor de A .

COROLÁRIO

Se todos os autovalores de uma matriz $A \in M(n)$ são tais que

- sendo reais são negativos, ou
- sendo complexos tem parte real negativa,

então qualquer solução de $x' = Ax$ tende a 0, quanto $t \rightarrow \infty$.

TEOREMA

Seja $A \in M(n)$ uma matriz qualquer. Cada coordenada de qualquer solução de $x' = Ax$ é uma combinação linear das funções

$$t \mapsto t^j e^{at} \cos(bt) \text{ e } t \mapsto t^j e^{at} \sin(bt)$$

com $0 \leq j \leq n - 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda = a + ib$ é um autovalor de A .

COROLÁRIO

Se todos os autovalores de uma matriz $A \in M(n)$ são tais que

- sendo reais são negativos, ou
- sendo complexos tem parte real negativa,

então qualquer solução de $x' = Ax$ tende a 0, quanto $t \rightarrow \infty$.

VALE A RECÍPROCA!

- Se A possui um autovalor real positivo, ou imaginário com parte real negativa, então existe uma solução de $x' = Ax$ que não converge para zero quando $t \rightarrow \infty$.

EXEMPLO

- Para o sistema $x' = Ax$, $x(0) = x_0$, com

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & -4 \\ -3 & -9 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -14 & 9 & -4 \\ -3 & -9 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

teremos

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 = Q e^{tJ} Q^{-1} \\ &= Q \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2} e^{-t} & te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \cos(t) & e^{-2t} \sin(t) \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2t} \sin(t) & e^{-2t} \cos(t) \end{pmatrix} Q^{-1} x_0 \end{aligned}$$

ATRATORES

DEFINIÇÃO

Considere um campo linear $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax$, com $A \in M(n)$.

- Dizemos que a origem $0 \in \mathbb{R}^n$ é um **poço** para A se, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA}x = 0.$$

Neste caso, $e^{tA} \rightarrow 0$ em $M(n)$, quando $t \rightarrow \infty$.

- Dizemos que A é um campo atrator se todos os autovalores de A tem parte real negativa.

ATRATORES

DEFINIÇÃO

Considere um campo linear $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax$, com $A \in M(n)$.

- Dizemos que a origem $0 \in \mathbb{R}^n$ é um **poço** para A se, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA}x = 0.$$

Neste caso, $e^{tA} \rightarrow 0$ em $M(n)$, quando $t \rightarrow \infty$.

- Dizemos que A é um campo atrator se todos os autovalores de A tem parte real negativa.

PROPOSIÇÃO (1)

A origem é um poço de A se, e somente se, A é um atrator.

COEFICIENTES DE POLINÔMIOS CARACTERÍSTICOS

PROPOSIÇÃO (2)

Considere o polinômio

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0.$$

COEFICIENTES DE POLINÔMIOS CARACTERÍSTICOS

PROPOSIÇÃO (2)

Considere o polinômio

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0.$$

- Se $a_4 = 1$, então as raízes de p tem todas parte real negativa se, e somente se,

$$a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0 \text{ e } a_3a_2a_1 > a_3^2 + a_1^2.$$

- Se $a_4 = 0$ e $a_3 = 1$, então as raízes de p tem todas parte real negativa se, e somente se,

$$a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0 \text{ e } a_2a_1 > a_0.$$

COEFICIENTES DE POLINÔMIOS CARACTERÍSTICOS

PROPOSIÇÃO (2)

Considere o polinômio

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0.$$

- Se $a_4 = 1$, então as raízes de p tem todas parte real negativa se, e somente se,

$$a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0 \text{ e } a_3a_2a_1 > a_3^2 + a_1^2.$$

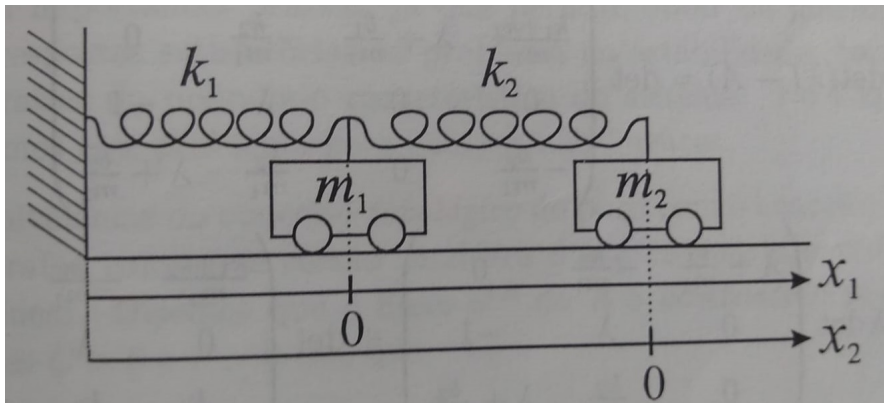
- Se $a_4 = 0$ e $a_3 = 1$, então as raízes de p tem todas parte real negativa se, e somente se,

$$a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0 \text{ e } a_2a_1 > a_0.$$

- Procurar: Routh-Hurwitz

MOLAS ACOPLADAS

- Considere um sistema com duas molas e dois carrinhos (se deslocando horizontalmente) como na figura e assuma que exista atrito.



- Denotando por x_1 e x_2 a posição dos carrinhos 1 e 2, respectivamente, obtemos o sistema

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -(k_1 + k_2)x_1 - b_1 x_1' + k_2 x_2 \\ m_2 x_2'' = -k_2 x_1 - k_2 x_2 - b_2 x_2' \end{cases}$$

- Denotando por x_1 e x_2 a posição dos carrinhos 1 e 2, respectivamente, obtemos o sistema

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -(k_1 + k_2)x_1 - b_1 x_1' + k_2 x_2 \\ m_2 x_2'' = -k_2 x_1 - k_2 x_2 - b_2 x_2' \end{cases}$$

- Escrevendo $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1'$, $y_3 = x_2$ e $y_4 = x_2'$ temos o sistema

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{pmatrix} y(t).$$

- Denotando por x_1 e x_2 a posição dos carrinhos 1 e 2, respectivamente, obtemos o sistema

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -(k_1 + k_2)x_1 - b_1 x_1' + k_2 x_2 \\ m_2 x_2'' = -k_2 x_1 - k_2 x_2 - b_2 x_2' \end{cases}$$

- Escrevendo $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1'$, $y_3 = x_2$ e $y_4 = x_2'$ temos o sistema

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{pmatrix} y(t).$$

- O polinômio característico da matriz deste sistema é

$$p(x) = x^4 + \left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_2}{m_2} \right) x^3 + \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2} \right) x^2 + \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} \frac{b_2}{m_2} + \frac{b_1 k_2}{m_1 m_2} \right) x + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}.$$

- Denotando por x_1 e x_2 a posição dos carrinhos 1 e 2, respectivamente, obtemos o sistema

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -(k_1 + k_2)x_1 - b_1 x_1' + k_2 x_2 \\ m_2 x_2'' = -k_2 x_1 - k_2 x_2 - b_2 x_2' \end{cases}$$

- Escrevendo $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1'$, $y_3 = x_2$ e $y_4 = x_2'$ temos o sistema

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{pmatrix} y(t).$$

- O polinômio característico da matriz deste sistema é

$$p(x) = x^4 + \left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_2}{m_2} \right) x^3 + \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2} \right) x^2 + \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} \frac{b_2}{m_2} + \frac{b_1 k_2}{m_1 m_2} \right) x + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}.$$

- Mostra-se que tal polinômio satisfaz as condições na Proposição (2), donde o sistema é atrator.
- O movimento do sistema tende ao repouso.

FLUXO CONTRATIVOS

DEFINIÇÃO

Dizemos que o fluxo $\phi(t, x) = e^{tA}x$ de um campo linear A é contrativo se existem constantes $C > 0$ e $\tau > 0$ tais que

$$\|e^{tA}x\| \leq Ce^{-\tau t}\|x\|, \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

FLUXO CONTRATIVOS

DEFINIÇÃO

Dizemos que o fluxo $\phi(t, x) = e^{tA}x$ de um campo linear A é contrativo se existem constantes $C > 0$ e $\tau > 0$ tais que

$$\|e^{tA}x\| \leq Ce^{-\tau t}\|x\|, \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

PROPOSIÇÃO(3)

Sejam $A \in M(n)$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Se a parte real de cada autovalor de A é menor do que β , então existe $C \geq 1$ tal que

$$\|e^{tA}\| \leq Ce^{t\beta}, \forall t \geq 0.$$

FLUXO CONTRATIVOS

DEFINIÇÃO

Dizemos que o fluxo $\phi(t, x) = e^{tA}x$ de um campo linear A é contrativo se existem constantes $C > 0$ e $\tau > 0$ tais que

$$\|e^{tA}x\| \leq Ce^{-\tau t}\|x\|, \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

PROPOSIÇÃO(3)

Sejam $A \in M(n)$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Se a parte real de cada autovalor de A é menor do que β , então existe $C \geq 1$ tal que

$$\|e^{tA}\| \leq Ce^{t\beta}, \forall t \geq 0.$$

TEOREMA

Seja $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax$ um campo linear qualquer. São equivalentes:

- (a) A origem é um poço para A ;
- (b) A é um atrator;
- (c) O fluxo de A é contrativo.