MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

02 DE MAIO

Aula de hoje: Estabilidade de singularidades

Trajetória (Órbita)

Definição

Chamamos de **trajetória** (ou **órbita**) de um ponto $x \in \mathcal{A}$ a solução maximal $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ da equação $x' = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x$. Por vezes, nos referimos a imagem

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi_x(t),\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

como sendo a trajetória de x.

Proposição (2)

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Então, duas órbitas nunca se interceptam, a menos que sejam a mesma trajetória (módulo uma translação no tempo).

Classificação de trajetórias

Definição

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica**: se existe $T > 0$ tal que $\phi(t+T,x) = \phi(t,x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica**: $\phi(t,x) \neq \phi(s,x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária**: $\phi(t,x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

Observação

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que $x \in \mathcal{A}$ é estacionário se, e somente se, $f(x) = 0$.
- Um ponto estacionário também é chamado de **ponto singular**.
- Singularidades também são chamadas de **ponto de equilíbrio**.

Estabilidade (Liapunov)

- No que segue, $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ denota um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Também assumiremos que o fluxo $\phi(t, x)$ está definido em $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$.

Estabilidade (Liapunov)

- No que segue, $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ denota um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Também assumiremos que o fluxo $\phi(t, x)$ está definido em $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$.

Definição

Seja x_0 um ponto de equilíbrio do campo f.

- diz-se que x_0 é **estável** se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_\delta(x_0)} \implies \|\phi(t, x) - x_0\| \leq \epsilon,\ t \geq 0.$$

ESTABILIDADE (LIAPUNOV)

- No que segue, $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ denota um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Também assumiremos que o fluxo $\phi(t, x)$ está definido em $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$.

DEFINIÇÃO

Seja x_0 um ponto de equilíbrio do campo f.

- diz-se que x_0 é **estável** se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_\delta(x_0)} \Longrightarrow \|\phi(t, x) - x_0\| \leq \epsilon, \ t \geq 0.$$

- diz-se que x_0 é **assintoticamente estável** se é estável e δ pode ser escolhido de modo que para todo $x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_r(x_0)}$ tem-se

$$\lim_{t \to \infty} \phi(t, x) = x_0.$$

Estabilidade (Liapunov)

- No que segue, $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ denota um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Também assumiremos que o fluxo $\phi(t,x)$ está definido em $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$.

Definição

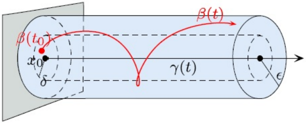
Seja x_0 um ponto de equilíbrio do campo f.

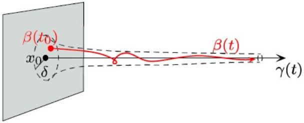
- diz-se que x_0 é **estável** se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_\delta(x_0)} \Longrightarrow \|\phi(t,x) - x_0\| \leq \epsilon,\ t \geq 0.$$

- diz-se que x_0 é **assintoticamente estável** se é estável e δ pode ser escolhido de modo que para todo $x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_r(x_0)}$ tem-se

$$\lim_{t\to\infty} \phi(t,x) = x_0.$$





Exemplos

- A origem é um **equilíbrio estável** do campo linear

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_2, -x_1) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot (x_1, x_2)^T \end{aligned}$$

Exemplos

- A origem é um **equilíbrio estável** do campo linear

$$f(x_1, x_2) = (x_2, -x_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot (x_1, x_2)^T$$

- A origem é um **equilíbrio assintoticamente estável** do campo linear

$$f(x_1, x_2) = (x_2, -\omega^2 x_1 - 2ax_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{bmatrix} \cdot (x_1, x_2)^T, \ 0 < a < \omega.$$

Exemplos

- A origem é um **equilíbrio estável** do campo linear

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_2, -x_1) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot (x_1, x_2)^T \end{aligned}$$

- A origem é um **equilíbrio assintoticamente estável** do campo linear

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_2, -\omega^2 x_1 - 2a x_2) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{bmatrix} \cdot (x_1, x_2)^T, \ 0 < a < \omega. \end{aligned}$$

- A origem é um equilíbrio **assintoticamente estável** do campo **não linear**

$$f(x_1, x_2) = (-x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1), x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1))$$

Estabilidade de sistemas lineares

Teorema

Seja $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax$ um campo linear qualquer. São equivalentes:

(a) A origem é um poço para A.;

(b) A é um atrator;

(c) O fluxo de A é contrativo;

(d) A origem é uma singularidade assintoticamente estável de A;

Campos não lineares: pêndulo simples com atrito

- Considere o campo

$$f(\theta, \omega) = (\omega, -g\sin(\theta) - k\omega),\ k > 0,$$

cujas singularidades são os pontos $(\ell\pi, 0)$, com $\ell \in \mathbb{Z}$ par.

Campos não lineares: pêndulo simples com atrito

- Considere o campo

$$f(\theta,\omega) = (\omega, -g\sin(\theta) - k\omega),\ k > 0,$$

cujas singularidades são os pontos $(\ell\pi, 0)$, com $\ell \in \mathbb{Z}$ par.

Teorema de Liapunov

Notações

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Denotamos por $Df(x_0)$ a derivada de f em x_0.
- Dizemos que x_0 é um **poço** de f se todos os autovalores de $Df(x_0)$ tem parte real negativa. Ou seja, se x_0 é um poço do campo linear

$$y' = Ay, \quad \text{sendo} \quad A = Df(x_0).$$

Teorema de Liapunov

Notações

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Denotamos por $Df(x_0)$ a derivada de f em x_0.
- Dizemos que x_0 é um **poço** de f se todos os autovalores de $Df(x_0)$ tem parte real negativa. Ou seja, se x_0 é um poço do campo linear

$$y' = Ay, \quad \text{sendo} \quad A = Df(x_0).$$

Teorema (Liapunov)

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se x_0 é um poço de f, então x_0 é uma singularidade assintoticamente estável para f.

Teorema de Liapunov

Notações

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Denotamos por $Df(x_0)$ a derivada de f em x_0.
- Dizemos que x_0 é um **poço** de f se todos os autovalores de $Df(x_0)$ tem parte real negativa. Ou seja, se x_0 é um poço do campo linear

$$y' = Ay, \ \ \text{sendo} \ \ A = Df(x_0).$$

Teorema (Liapunov)

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se x_0 é um poço de f, então x_0 é uma singularidade assintoticamente estável para f.

Exemplo: modelos de crescimento populacional com competição

- Para tais modelos, temos

$$x' = ax - bx^2, \ a, b > 0.$$