MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

11 de Maio

Aula de hoje: Estabilidade de singularidades - Linearização e Instabilidade

Trajetória (Órbita)

Definição

Chamamos de **trajetória** (ou **órbita**) de um ponto $x \in \mathcal{A}$ a solução maximal $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ da equação $x' = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x$. Por vezes, nos referimos a imagem

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi_x(t),\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

como sendo a trajetória de x.

Proposição (2)

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Então, duas órbitas nunca se interceptam, a menos que sejam a mesma trajetória (módulo uma translação no tempo).

Classificação de trajetórias

Definição

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica**: se existe $T > 0$ tal que $\phi(t+T,x) = \phi(t,x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica**: $\phi(t,x) \neq \phi(s,x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária**: $\phi(t,x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

Observação

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que $x \in \mathcal{A}$ é estacionário se, e somente se, $f(x) = 0$.
- Um ponto estacionário também é chamado de **ponto singular**.
- Singularidades também são chamadas de **ponto de equilíbrio**.

Estabilidade (Liapunov)

- No que segue, $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ denota um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Também assumiremos que o fluxo $\phi(t,x)$ está definido em $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$.

Definição

Seja x_0 um ponto de equilíbrio do campo f. Dizemos que x_0 é **estável** se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_\delta(x_0)} \Longrightarrow \|\phi(t,x) - x_0\| \leq \epsilon, \ t \geq 0.$$

- Topologicamente: dada qualquer vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0, existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^n$ de x_0, tal que $W \subset \mathcal{A} \cap U$ e

$$\phi(t,x) \in U, \ \forall x \in W \ \text{ e } \ \forall t \geq 0.$$

Teorema de Liapunov

Notações

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Denotamos por $Df(x_0)$ a derivada de f em x_0.
- Dizemos que x_0 é um **poço** de f se todos os autovalores de $Df(x_0)$ tem parte real negativa. Ou seja, se x_0 é um poço do campo linear

$$y' = Ay, \quad \text{sendo} \quad A = Df(x_0).$$

Teorema (Liapunov)

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se x_0 é um poço de f, então x_0 é uma singularidade assintoticamente estável para f.

- Dada uma base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de R^n podemos definir o produto interno $\langle x, y\rangle_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta$, sendo $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ e $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$. Em particular, temos a norma $\|x\|_{\mathcal{B}} = \left\{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2\right\}^{1/2}$.

Lema

Seja $A \in M(n)$ uma matriz real tal que para qualquer autovalor λ tem-se $C_1 < \Re(\lambda) < C_2$. Existe então uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$C_1 \leq \langle Ax, x\rangle_{\mathcal{B}} \leq C_2, \ \forall x \in \mathbb{R}^n; [x]_{\mathcal{B}} = 1.$$

Lema

Sejam $[\cdot]$ a norma associada a um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{R}^n$ e $\eta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável. Então, para cada $t \in I$, valem as igualdades

$$\frac{d}{dt}[\eta(t)]^2 = 2\langle \eta'(t), \eta(t)\rangle \ \text{ e } \ \frac{d}{dt}[\eta(t)] = \frac{\langle \eta'(t), \eta(t)\rangle}{[\eta(t)]}, \ \eta(t) \neq 0.$$

Singularidade instável

Definição

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que x_0 é **instável** se não é estável.

Teorema

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $Df(x_0)$ possui algum autovalor com parte real positiva, então x_0 é uma singularidade instável para f.

Demonstração

Podemos assumir que:

- $x_0 = 0$ e $\mathcal{A}$ um aberto contento a origem;
- $A = \text{diag}(A_1, A_2)$, sendo que os autovalores de A_1 tem parte real positiva e os de A_2 com parte real negativa, ou nula.

Demonstração

Podemos assumir que:

- $x_0 = 0$ e $\mathcal{A}$ um aberto contento a origem;
- $A = \text{diag}(A_1, A_2)$, sendo que os autovalores de A_1 tem parte real positiva e os de A_2 com parte real negativa, ou nula.

Denotemos por:

- V_1 o auto-espaço gerado pelos autovetores associados aos autovalores em A_1 e de modo análogo V_2. Note que $\dim(V_1) \geq 1$. Em particular, $A_1(V_1) \subseteq V_1$ e $A_2(V_2) \subseteq V_2$.
- $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$. Assim,
$$\mathbb{R}^n \ni z = (x, y),\ x \in V_1,\ y \in V_2.$$

Demonstração

Podemos assumir que:

- $x_0 = 0$ e $\mathcal{A}$ um aberto contento a origem;
- $A = \text{diag}(A_1, A_2)$, sendo que os autovalores de A_1 tem parte real positiva e os de A_2 com parte real negativa, ou nula.

Denotemos por:

- V_1 o auto-espaço gerado pelos autovetores associados aos autovalores em A_1 e de modo análogo V_2. Note que $\dim(V_1) \geq 1$. Em particular, $A_1(V_1) \subseteq V_1$ e $A_2(V_2) \subseteq V_2$.
- $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$. Assim,
$$\mathbb{R}^n \ni z = (x, y), \ x \in V_1, \ y \in V_2.$$

Considere:

- $\alpha, \beta > 0$ tais que

$$\Re(\lambda) > 8\beta, \ \text{ para } \ \lambda \ \text{ autovalor em } \ A_1 \ \text{ e}$$
$$\Re(\lambda) \geq -\alpha, \ \text{ para } \ \lambda \ \text{ autovalor em } \ A_2;$$

Podemos escolher:

- produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ em V_1 e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ em V_2 tais que

$$8\beta|x|_1^2 \leq \langle A_1 x, x \rangle_1, \ \forall x \in V_1,$$
$$-\alpha|y|_2^2 \leq \langle A_2 y, y \rangle_2 \leq 2\beta|y|_2^2, \ \forall y \in V_2.$$

Podemos escolher:

- produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ em V_1 e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ em V_2 tais que

$$8\beta|x|_1^2 \leq \langle A_1 x, x \rangle_1, \ \forall x \in V_1,$$
$$-\alpha|y|_2^2 \leq \langle A_2 y, y \rangle_2 \leq 2\beta|y|_2^2, \ \forall y \in V_2.$$

Temos em $\mathbb{R}^n$:

- o produto interno

$$\langle z, w \rangle = \langle x, v \rangle_1 + \langle y, u \rangle_2,$$

  sendo $z = (x, y)$ e $w = (v, u)$;
- a norma

$$|z| = \left(|x|_1^2 + |y|_2^2 \right)^{1/2}.$$

- Fixado $0 < a \leq 1$, tal que $a \leq 4\alpha^{-1}\beta$, defina

$$C_a = \{(x, y) \in V_1 \oplus V_2;\ |y|_2 \leq a|x|_1\}$$

e

$$C = C_a(\delta) = \{z \in C_a; |z| \leq \delta\}.$$

- Fixado $0 < a \leq 1$, tal que $a \leq 4\alpha^{-1}\beta$, defina

$$C_a = \{(x,y) \in V_1 \oplus V_2;\ |y|_2 \leq a|x|_1\}$$

e

$$C = C_a(\delta) = \{z \in C_a; |z| \leq \delta\}.$$

- **Afirmação (1):** Vale a desigualdade

$$\langle f(z), z\rangle \geq \beta|z|^2,\ \forall z \in C.$$

- Fixado $0 < a \leq 1$, tal que $a \leq 4\alpha^{-1}\beta$, defina

$$C_a = \{(x,y) \in V_1 \oplus V_2;\ |y|_2 \leq a|x|_1\}$$

e

$$C = C_a(\delta) = \{z \in C_a; |z| \leq \delta\}.$$

- **Afirmação (1):** Vale a desigualdade

$$\langle f(z), z\rangle \geq \beta |z|^2,\ \forall z \in C.$$

- **Afirmação (2):** Enquanto a trajetória de f por z permanecer em $\mathrm{int}(C)$ ela se afasta exponencialmente de z.

- Fixado $0 < a \leq 1$, tal que $a \leq 4\alpha^{-1}\beta$, defina

$$C_a = \{(x,y) \in V_1 \oplus V_2;\ |y|_2 \leq a|x|_1\}$$

e

$$C = C_a(\delta) = \{z \in C_a; |z| \leq \delta\}.$$

- **Afirmação (1):** Vale a desigualdade

$$\langle f(z), z\rangle \geq \beta |z|^2,\ \forall z \in C.$$

- **Afirmação (2):** Enquanto a trajetória de f por z permanecer em $\mathrm{int}(C)$ ela se afasta exponencialmente de z.
- **Afirmação (3):** Qualquer trajetória de f por um ponto do cone C só pode sair de C depois de atingir a esfera $|z| = \delta$.

- Fixado $0 < a \leq 1$, tal que $a \leq 4\alpha^{-1}\beta$, defina

$$C_a = \{(x, y) \in V_1 \oplus V_2;\ |y|_2 \leq a|x|_1\}$$

e

$$C = C_a(\delta) = \{z \in C_a; |z| \leq \delta\}.$$

- **Afirmação (1):** Vale a desigualdade

$$\langle f(z), z\rangle \geq \beta|z|^2,\ \forall z \in C.$$

- **Afirmação (2):** Enquanto a trajetória de f por z permanecer em $\mathrm{int}(C)$ ela se afasta exponencialmente de z.
- **Afirmação (3):** Qualquer trajetória de f por um ponto do cone C só pode sair de C depois de atingir a esfera $|z| = \delta$.

Conclusão:

A vizinhança $U = B_\delta(0)$ tem a seguinte propriedade

- trajetórias de todos os pontos arbitrariamente próximos de 0 que estão em C saem de U.

Prova da afirmação 3

- Considere a função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(z) = h(x, y) = a^2|x|_1^2 - |y|_2^2.$$

Prova da afirmação 3

- Considere a função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(z) = h(x, y) = a^2|x|_1^2 - |y|_2^2.$$

- h se anula na fronteira de C_a e é positiva em $\mathrm{int}(C_a)$.

Prova da afirmação 3

- Considere a função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(z) = h(x, y) = a^2 |x|_1^2 - |y|_2^2.$$

- h se anula na fronteira de C_a e é positiva em $\mathrm{int}(C_a)$.
- $Dh(z) \cdot f(z) > 0, \ \forall z \in C \setminus \{0\}$.

PROVA DA AFIRMAÇÃO 3

- Considere a função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(z) = h(x, y) = a^2|x|_1^2 - |y|_2^2.$$

- h se anula na fronteira de C_a e é positiva em $\text{int}(C_a)$.
- $Dh(z) \cdot f(z) > 0, \ \forall z \in C \setminus \{0\}$.
- h cresce ao longo das trajetórias de f por pontos de $C \setminus \{0\}$.

Prova da afirmação 3

- Considere a função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(z) = h(x, y) = a^2|x|_1^2 - |y|_2^2.$$

- h se anula na fronteira de C_a e é positiva em $\operatorname{int}(C_a)$.
- $Dh(z) \cdot f(z) > 0, \ \forall z \in C \setminus \{0\}$.
- h cresce ao longo das trajetórias de f por pontos de $C \setminus \{0\}$.

Conclusão:

A trjetória de f por qualquer ponto de $C \setminus \{0\}$ permanece no interior de C, pelo menos até atingir a esfera $|z| = \delta$.